Alfred H. Clifford

La décomposition d'un demi-groupe commutatif en ses composantes archimédiennes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 20, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 20

21 mai 1962

LA DÉCOMPOSITION D'UN DEMI-GROUPE COMMUTATIF EN SES COMPOSANTES ARCHIMÉDIENNES

par Alfred H. CLIFFORD

L'existence d'une telle décomposition, et sa description explicite (théorèmes 1 et 2 ci-dessous), sont dues indépendamment à TAMURA et KIMURA [3], à THIERRIN [4] et à HEWITT et ZUCKERMAN [2].

Ceux-ci vont plus loin que les autres (théorèmes 3 et 5), ayant le but d'employer cette décomposition dans leur théorie des caractères d'un demi-groupe commutatif, qui sera traitée dans ma deuxième conférence. Les deux théories se trouvent dans "Algebraic theory of semigroups" ([1], § 4.3 et § 5.5), et je m'y réfère pour les démonstrations des théorèmes.

Soit D un demi-groupe commutatif. Nous disons que a est <u>diviseur</u> de b ($a , b \in D$), et nous écrivons $a|b$, si $a = b$ ou s'il existe x dans D tel que $ax = b$. C'est une relation sur D qui est réflexive, transitive, et régulière. Nous disons que D est <u>archimédien</u> si, pour chaque $a , b \in D$, il existe un entier positif n tel que $a|b^n$. Remarquons qu'un groupe abélien G totalement ordonné est archimédien dans le sens usuel si et seulement si la partie strictement positive de G est archimédienne dans le sens défini ci-dessus.

Par un <u>demi-treillis</u> nous entendons un demi-groupe commutatif Y tel que chaque élément α de Y est idempotent ($\alpha^2 = \alpha$). Soit $\varphi : D \to Y$ un homomorphisme d'un demi-groupe D sur un demi-treillis Y. Posons $D_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$; alors $D_\alpha D_\beta \subseteq D_{\alpha\beta}$ pour chaque $\alpha , \beta \in Y$. En particulier, $D_\alpha^2 \subseteq D_\alpha$; c'est-à-dire que chaque D_α est sous-demi-groupe de D. Si nous définissons

$$a \rho b \quad (a , b \in D) \quad \text{si} \quad \varphi(a) = \varphi(b) \qquad ,$$

alors ρ est une <u>congruence</u> sur D (relation d'équivalence régulière) qui est aussi <u>idempotente</u> ($a^2 \rho a$ pour chaque $a \in D$). Inversement, si ρ est une congruence idempotente sur D et si Y désigne le demi-groupe quotient D/ρ, alors Y est un demi-treillis qui est image homomorphe de D. Nous disons que D est <u>la réunion du demi-treillis</u> Y <u>de sous-demi-groupes</u> D_α ($\alpha \in Y$).

L'intersection η de toutes les congruences idempotentes ρ_i ($i \in I$) sur D est une congruence sur D qui est aussi idempotente : $a \eta b$ veut dire $a \rho_i b$ pour chaque $i \in I$, et puisque $a \rho_i a^2$ pour chaque $i \in I$, nous en déduisons que $a \, \eta \, a^2$. La congruence η est la plus fine de toutes les congruences idempotentes sur D, et D/η est le demi-treillis homomorphe maximum de D dans le sens : un demi-treillis, qui est image homomorphe de D, est aussi image homomorphe de D/η.

THÉORÈME 1. - Soit η la plus fine congruence idempotente sur un demi-groupe commutatif D.

Alors $a \, \eta \, b$ $(a, b \in D)$ si et seulement si chacun des éléments a, b est diviseur d'une puissance de l'autre ($a|b^m$ et $b|a^n$ pour des entiers positifs convenables m et n).

THÉORÈME 2. - Tout demi-groupe commutatif D peut être exprimé (et d'une seule façon) comme la réunion d'un demi-treillis Y de demi-groupes archimédiens D_α $(\alpha \in Y)$. Le demi-treillis Y est isomorphe au demi-treillis homomorphe maximum D/η de D, et les D_α $(\alpha \in Y)$ sont les classes d'équivalence de $D \bmod \eta$.

Nous appelons les D_α (qui sont uniques) les composantes archimédiennes de D.

Nous disons qu'un demi-groupe commutatif D est séparatif si

$$a^2 = b^2 = ab \quad (a, b \in D) \quad \text{implique} \quad a = b \quad .$$

(Pour la raison de ce terme, voir la deuxième conférence.)

THÉORÈME 3. - Un demi-groupe commutatif D est séparatif si et seulement si ses composantes archimédiennes sont simplifiables.

Pour la théorie des caractères, un cas important est celui d'un demi-groupe qui est réunion de groupes. Je rappelle à ce sujet un théorème que j'ai donné autrefois (Annals of Math., 42(1941) p. 1037-1049 ; théorème 4.11, p. 128, dans notre livre).

THÉORÈME 4. - Soit D un demi-groupe qui est réunion de groupes dont les éléments neutres commutent les uns avec les autres. Alors D est la réunion d'un demi-treillis Y de groupes G_α $(\alpha \in Y)$. Y est isomorphe au demi-treillis $\{e_\alpha : \alpha \in Y\}$ des idempotents de D, e_α désignant l'élément neutre de G_α. De plus, les e_α sont dans le centre de D, et si nous définissons

$$a\varphi_{\alpha\beta} = ae_\beta \qquad (\alpha \geqslant \beta \in Y \; ; \; a \in G_\alpha) \quad ,$$

alors $\varphi_{\alpha\beta}$ est un homomorphisme de G_α dans G_β, et $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ entraîne

(1) $$\varphi_{\alpha\beta}\,\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma} \quad .$$

Si $a \in G_\alpha$ et $b \in G_\beta$ $(\alpha\ ., \ \beta \in Y)$ alors

(2) $$ab = (a\varphi_{\alpha\gamma})(b\varphi_{\beta\gamma}) \quad \text{où} \quad \gamma = \alpha\beta \quad .$$

Inversement, si nous avons une application biunivoque $\alpha \to G_\alpha$ d'un demi-treillis Y sur un ensemble de groupes disjoints, et un système d'homomorphismes $\varphi_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta$ $(\alpha \geqslant \beta)$ satisfaisant à (1), alors (2) définit dans $D = \bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha$ un produit associatif tel que le demi-groupe D est réunion des groupes G_α dont les éléments neutres commutent les uns avec les autres.

Les G_α sont les sous-groupes maximaux de D, et en même temps les composantes archimédiennes de D.

THÉORÈME 5. - Un demi-groupe commutatif D peut être plongé dans un demi-groupe commutatif qui est réunion de groupes si et seulement si D est séparatif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - Algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - The ℓ_1-algebra of a commutative semigroup, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 70-97.

[3] TAMURA (T.) and KIMURA (N.). - On decompositions of a commutative semigroup, Kodai math. Sem. Rep., t. 6, 1954, p. 109-112.

[4] THIERRIN (Gabriel). - Sur quelques propriétés de certaines classes de demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 1335-1337.