Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

CLAUDE JOULAIN

Sur les anneaux non commutatifs. I. Radical

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 13, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 13

5 mars 1962

SUR LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS.
I. RADICAL

par Claude JOULAIN

Introduction. - On considère, dans cet exposé, des idéaux d'un anneau A, non nécessairement commutatif, non nécessairement unitaire, et les idéaux d'un demi-groupe non commutatif, sans élément unité. La première partie est consacrée à l'étude des idéaux premiers, et du radical de Baer et McCoy, d'un idéal bilatère dans un anneau A, ou dans un demi-groupe D. La seconde partie, traite des idéaux primitifs, et du radical de Jacobson, d'un idéal bilatère, dans un anneau A. Les références bibliographiques sont indiquées au cours de l'exposé qui reprend, dans ses grandes lignes, un chapitre de l'ouvrage [10].

1. Idéaux premiers. Radical de Baer et McCoy.

DÉFINITION 1.1. - L'idéal bilatère $\wp$ est dit premier dans l'anneau A, s'il vérifie la propriété

$$aAb \subseteq \wp \implies a \in \wp \text{ ou } b \in \wp$$

(cf. N. H. McCOY [10]).

Remarque. - Cette définition équivaut à la suivante

$$aAb \subseteq \wp \, , \quad ab \in \wp \implies a \in \wp \text{ ou } b \in \wp \quad ,$$

qui n'en diffère qu'apparemment, lorsque A n'est pas unitaire.

DÉFINITION 1.2. - Un idéal bilatère $\wp$, est dit complètement premier, s'il vérifie la propriété

$$ab \in \wp \implies a \in \wp \text{ ou } b \in \wp$$

(cf. FITTING [5]).

Dans le cas commutatif, cette notion coïncide avec celle d'idéal premier.

Dans le cas non commutatif, tout idéal complètement premier, est premier, d'après la remarque précédente. Mais la réciproque est fausse : dans l'anneau M_2 des matrices carrées d'ordre 2 sur un corps, l'idéal nul est un idéal bilatère premier, mais non complètement premier.

PROPRIÉTÉ 1.1. - Pour qu'un idéal bilatère $\mathfrak{P}$ soit premier, il faut et il suffit qu'on ait la propriété

$$BC \subseteq \mathfrak{P} \Longrightarrow B \subseteq \mathfrak{P} \text{ ou } C \subseteq \mathfrak{P} \quad .$$

Cette propriété, portant sur le produit des idéaux bilatères, fournit une définition d'un idéal premier, équivalente à celle de N. H. McCOY ; c'est la définition donnée par N. JACOBSON (cf. N. JACOBSON [7]).

<u>Démonstration</u>. - Soit $\mathfrak{P}$ un idéal bilatère premier, et soient B et C deux idéaux bilatères tels que : $B \not\subseteq \mathfrak{P}$, $C \not\subseteq \mathfrak{P}$. Si b et c, sont deux éléments de B et C tels que $b \notin \mathfrak{P}$, $c \notin \mathfrak{P}$, on a

$$bAc \not\subseteq \mathfrak{P} \quad .$$

Or $bAc \subseteq BC$, il en résulte

$$BC \not\subseteq \mathfrak{P} \quad .$$

Réciproquement, soit $\mathfrak{P}$ un idéal bilatère, vérifiant la propriété $BC \subseteq \mathfrak{P} \Longrightarrow B \subseteq \mathfrak{P}$ ou $C \subseteq \mathfrak{P}$. Soient b et c tels que $bAc \subseteq \mathfrak{P}$. On a

$$(AbA)(AcA) \subseteq \mathfrak{P} \Longrightarrow AbA \subseteq \mathfrak{P} \text{ ou } AcA \subseteq \mathfrak{P} \quad .$$

Soit $AbA \subseteq \mathfrak{P}$; si (b) est l'idéal bilatère engendré par b, on a

$$(b)^3 \subseteq AbA \subseteq \mathfrak{P} \Longrightarrow (b) \subseteq \mathfrak{P} \Longrightarrow b \in \mathfrak{P} \quad .$$

DÉFINITION 1.3. - Un idéal bilatère $\mathfrak{S}$ est dit semi-premier, s'il vérifie la propriété

$$\mathfrak{J}^n \subseteq \mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S} \quad ,$$

($\mathfrak{J}$ idéal bilatère) (cf. A. CHÂTELET [4]).

Un idéal premier est semi-premier, d'après la propriété 1.1.

Une intersection d'idéaux semi-premiers est un idéal semi-premier.

Toutes ces notions s'appliquent sans modification à un demi-groupe D .

DÉFINITION 1.4. - Un anneau A est dit premier (resp. semi-premier), si l'idéal nul est premier (resp. semi-premier).

Un anneau d'intégrité est un anneau dans lequel l'idéal nul est complètement premier.

Si $\mathfrak{P}$ est un idéal complètement premier propre, d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D), le complément $A - \mathfrak{P}$ (resp. $D - \mathfrak{P}$) est multiplicativement fermé.

Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier propre d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D), le complément $A - \mathfrak{P}$ (resp. $D - \mathfrak{P}$) est un m-système, conformément à la définition suivante.

DÉFINITION 1.5. - On appelle m-système d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D), un sous-ensemble non vide $\mathfrak{M}$ de A (resp. de D), tel que

$$b \in \mathfrak{M}, \quad c \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \exists \; x \in A \text{ (resp. } D) \text{ avec } bxc \in \mathfrak{M} \quad .$$

Cette notion généralise celle de système multiplicativement fermé ; elle permet d'étendre au cas non commutatif, des résultats démontrés par W. KRULL dans le cas commutatif (cf. W. KRULL [8]).

THÉORÈME 1.1. - $\mathfrak{J}$ étant un idéal bilatère d'un anneau A (resp. d'un demi-groupe D), il y a identité entre les idéaux bilatères suivants

a. l'intersection S_a des idéaux premiers contenant $\mathfrak{J}$;

b. l'ensemble S_b des éléments x , tels que tout m-système, contenant x , rencontre $\mathfrak{J}$;

c. l'intersection S_c des idéaux semi-premiers contenant $\mathfrak{J}$, c'est-à-dire, le plus petit idéal semi-premier contenant $\mathfrak{J}$.

Démonstration.

1° Tout idéal premier étant semi-premier, on a $S_c \subseteq S_a$.

2° On a $S_b \subseteq S_c$. Soit $\beta \in S_b$, $\beta \notin S_c$. Il existe un idéal semi-premier $\mathbb{S}$, contenant $\mathfrak{J}$, tel que $\beta \notin \mathbb{S}$. On a $(\beta) \nsubseteq \mathbb{S}$ et par conséquent $(\beta)^3 \nsubseteq \mathbb{S}$.

Il en résulte que $\beta A \beta \nsubseteq \mathbb{S}$; et, par suite, il existe $\lambda \in A$ (resp. D) tel que $\beta_1 = \beta\lambda\beta \notin \mathbb{S}$. De même, il existe $\lambda_1 \in A$ (resp. D) avec

$$\beta_2 = \beta_1 \lambda \beta_1 \notin \mathbb{S} \quad .$$

On définit ainsi, de proche en proche, un m-système $(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ qui ne rencontre pas $\mathbb{S}$, donc qui ne rencontre pas $\mathfrak{J}$, et qui contient β ; ce qui est contraire à $\beta \in S_b$.

3° On a $S_a \subseteq S_b$. Soit $\alpha \in S_a$, $\alpha \notin S_b$; alors, il existe un m-système $\mathfrak{M}$, contenant α, et ne rencontrant pas $\mathfrak{J}$. L'ensemble des idéaux bilatères, contenant $\mathfrak{J}$ et ne rencontrant pas $\mathfrak{M}$, n'est pas vide, et c'est un ensemble inductif. D'après le théorème de Zorn, cet ensemble possède un élément maximal, soit $\mathfrak{P}$; montrons que $\mathfrak{P}$ est premier.

Soient B et C deux idéaux bilatères non contenus dans $\mathfrak{P}$; pour montrer que $BC \nsubseteq \mathfrak{P}$, il suffit de montrer que $(B + \mathfrak{P})(C + \mathfrak{P}) \nsubseteq \mathfrak{P}$. On peut alors supposer que $B \supset \mathfrak{P}$ et $C \supset \mathfrak{P}$. Il existe donc $b \in B \cap \mathfrak{M}$ et $c \in C \cap \mathfrak{M}$, d'où λ tel que $b\lambda c \in \mathfrak{M}$; et, par suite, $b\lambda c \notin \mathfrak{P}$, ce qui implique $BC \nsubseteq \mathfrak{P}$. L'idéal $\mathfrak{P}$ est donc un idéal premier, contenant $\mathfrak{J}$, et ne contenant pas α, ce qui est contraire à $\alpha \in S_a$.

On a établi $S_a \subseteq S_b \subseteq S_c \subseteq S_a$, d'où le théorème 1.1.

COROLLAIRE. - Pour qu'un idéal soit semi-premier, il faut et il suffit qu'il soit l'intersection (finie ou infinie) d'idéaux premiers.

DÉFINITION 1.6. - L'idéal bilatère $S_a = S_b = S_c$, déterminé dans le théorème 1.1, s'appelle le radical de Baer et McCoy, de l'idéal bilatère $\mathfrak{J}$, et se note $\mathcal{R}(\mathfrak{J})$.

La démonstration du théorème, utilisant les m-systèmes, est due en substance à N. H. McCOY [11].

En particulier, pour qu'un anneau A soit semi-premier, il faut et il suffit que le radical de Baer et McCoy de l'idéal nul soit nul.

L'application $\mathfrak{J} \to \mathcal{R}(\mathfrak{J})$, vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathcal{R}(\mathfrak{I}) \supseteq \mathfrak{I} \quad ,$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathfrak{I})) = \mathcal{R}(\mathfrak{I}) \quad ,$$

$$\mathcal{R}(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) = \mathcal{R}(\mathfrak{I}_1) \cap \mathcal{R}(\mathfrak{I}_2) \quad .$$

Ces propriétés sont mises en évidence par S. A. AMITSUR [1] dans sa théorie générale des radicaux ; on les déduit facilement du théorème 1.1.

On étend la notion de radical aux idéaux à gauche X d'un anneau A, d'un demi-groupe D, ou aux sous-modules X d'un A-module M, en considérant les idéaux bilatères

$$X \overset{\bullet}{.} A \ , \qquad X \overset{\bullet}{.} D \ , \qquad X \overset{\bullet}{.} M \quad .$$

($X \overset{\bullet}{.} A$ est le résiduel à gauche de X par A, c'est l'ensemble des $x \in A$ tels que $xA \subseteq X$).

DÉFINITION 1.7. - On appelle radical de Baer et McCoy de l'idéal à gauche X de l'anneau A (resp. de l'idéal à gauche X du demi-groupe D avec 0, du sous-module X du A-module M) le radical de Baer et McCoy de l'idéal bilatère $X \overset{\bullet}{.} A$ (resp. de l'idéal bilatère $X \overset{\bullet}{.} D$, de l'idéal bilatère $X \overset{\bullet}{.} M$).

2. Idéaux primitifs. Radical de Jacobson.

DÉFINITION 2.1. - X étant un idéal à gauche d'un anneau A, on dit que e est élément unité à droite modulo X, si on a, pour tout $a \in A$,

$$a - ae \in X \quad .$$

S'il existe un élément unité à droite modulo X, l'idéal à gauche X est dit régulier (cf. N. JACOBSON [7], N. BOURBAKI [3]).

Si l'anneau A est unitaire, tout idéal à gauche est régulier ; l'élément unité de l'anneau est élément unité à droite modulo X, quel que soit l'idéal à gauche X.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Soit X un idéal à gauche propre, régulier, et soit e, élément unité à droite modulo X. On peut trouver un idéal à gauche Y, maximal, contenant X, tel que e soit élément unité à droite modulo Y.

On a $e \notin X$, sinon $a - ae \in X$, $\forall\ a \in A$, entraînerait $X = A$, ce qui est contraire à X propre. L'ensemble des idéaux à gauche, contenant X et ne contenant pas e , est inductif, et, d'après le théorème de Zorn, possède un élément maximal Y . Montrons que Y est maximal dans l'ensemble des idéaux à gauche de l'anneau A .

On a $Y \neq A$, car $e \notin Y$.

D'autre part, soit $Y \subset Z$; alors $e \in Z$ et on a, $\forall\ a \in A$,

$$a - ae \in X \implies a - ae \in Z \implies a \in Z \quad ,$$

d'où $Z = A$.

Enfin, $\forall\ a \in A$, $a - ae \in Y$ donc e est élément unité à droite modulo Y , et Y est régulier.

DÉFINITION 2.2. - Un idéal bilatère $\mathcal{P}$ est dit primitif à gauche, s'il est de la forme

$$\mathcal{P} = M^{\bullet}.\, A \quad ,$$

où M est un idéal maximal régulier de l'anneau A .

Une définition équivalente d'un idéal primitif à gauche est la suivante :

$\mathcal{P}$ est l'annulateur d'un A-module à gauche $\mathfrak{M}$, simple, et tel que $A\mathfrak{M} \neq 0$ (cf. N. JACOBSON [7]).

Le A-module $\mathfrak{M}$ est le module quotient A/M , A étant considéré comme A-module à gauche.

PROPRIÉTÉ 2.2. - Tout idéal primitif à gauche, est premier.

Soit $\mathcal{P}$ un idéal primitif à gauche ; on a $\mathcal{P} = 0^{\bullet}.\, \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un A-module à gauche, simple, tel que $A\mathfrak{M} \neq 0$.

Soient $B \supset \mathcal{P}$, $C \supset \mathcal{P}$ deux idéaux bilatères ; il existe $x \in \mathfrak{M}$ tel que $Cx \neq 0$, d'où $Cx = \mathfrak{M}$. De même, on a $B\mathfrak{M} \neq 0$, d'où $BCx \neq 0$ et $BC \nsubseteq \mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ 2.3. - a étant un élément n'appartenant pas à l'idéal à gauche maximal M , l'idéal à gauche $X = M^{\bullet}.\, a = \{x \in A ;\ xa \in M\}$ est :

ou bien l'idéal Λ ,

ou bien un idéal à gauche maximal régulier.

Soit $M^{\bullet}. a \neq \Lambda$; et soit $b \notin M^{\bullet}. a$.

On a $ba \notin M$; M étant maximal, si $(ba|$ est l'idéal à gauche engendré par ba , on a

$$(ba| + M = \Lambda \quad .$$

Il existe donc $e \in (b|$ tel que

$$a = ea + m \quad \text{avec} \quad m \in M \quad .$$

Si x est un élément quelconque de Λ , on a

$$(x - xe)\ a = xa - x(a - m) \equiv xm \in M$$

d'où $x - xe \in X$, ce qui montre que e est élément unité à droite modulo X , et que X est régulier.

De plus, $x \in X + (b|$, ce qui montre que X est maximal.

THÉORÈME 2.1. — $\mathfrak{J}$ étant un idéal bilatère de l'anneau Λ , il y a identité entre les idéaux suivants :

a. l'intersection S_a des idéaux primitifs à gauche contenant $\mathfrak{J}$,

b. l'intersection S_b des idéaux à gauche maximaux réguliers contenant $\mathfrak{J}$.

<u>Démonstration.</u>

1° $S_a \subseteq S_b$. — Nous allons montrer que tout idéal à gauche, maximal régulier contenant $\mathfrak{J}$, contient un idéal primitif à gauche contenant $\mathfrak{J}$.

Soit M un idéal à gauche maximal régulier, et soit e élément unité à droite modulo M . $\mathfrak{P} = M^{\bullet}. \Lambda$ est primitif à gauche.

Si $x \in \mathfrak{P}$, on a $x - xe \in M$ et $xe \in M$ d'où $x \in M$ et $\mathfrak{P} \subsetneq M$.

De plus, si $\mathfrak{J} \subseteq M$, $\mathfrak{J}\Lambda \subseteq M \Longrightarrow \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{P}$.

Il en résulte :

$$S_a \subseteq S_b \quad .$$

2° $S_b \subseteq S_a$. — On a $S_a = \bigcap_M M^{\bullet}. A$. Or

$$M^{\bullet}. A = \bigcap_{a \in A} M^{\bullet}. a \quad .$$

D'où

$$S_a = \bigcap_{M^{\bullet}.a} M^{\bullet}. a \quad .$$

S_a est donc l'intersection d'idéaux à gauche maximaux réguliers contenant $\mathfrak{J}$ (propriété 2.3) ; il en résulte

$$S_b \subseteq S_a \quad .$$

DÉFINITION 2.3. — L'idéal bilatère $S_a = S_b$, défini dans le théorème 2.1, s'appelle le radical de Jacobson (à gauche) de $\mathfrak{J}$ dans A, et se note $\mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$. On définit de façon analogue, le radical de Jacobson à droite de l'idéal $\mathfrak{J}$.

Un résultat remarquable est l'identité du radical de Jocobson à gauche et du radical de Jacobson à droite.

Il suffit de démontrer cette identité pour l'idéal nul, et de considérer ensuite l'anneau quotient $A/\mathfrak{J}$. On introduit pour cela la notion d'élément quasi-régulier.

DÉFINITION 2.4. — Un élément a, d'un anneau A, est dit quasi-régulier à gauche, s'il existe un élément b tel que $a + b - ba = 0$.

Dans un anneau unitaire, on a la définition équivalente : a est quasi-régulier à gauche, si $1 - a$ est inversible à gauche.

En effet,

$$a + b - ba = 0 \iff (1 - b)(1 - a) = 1 \quad .$$

On définit de même un élément quasi-régulier à droite.

Un élément a est quasi-régulier, s'il existe $b \in A$ tel que

$$a + b - ba = a + b - ab = 0 \quad .$$

Cette notion va nous permettre de caractériser le radical de Jacobson à gauche de l'idéal nul, appelé également radical de l'anneau.

PROPRIÉTÉ 2.4. - Le radical de Jacobson à gauche de l'idéal 0, est le plus grand idéal à gauche, constitué d'éléments quasi-réguliers à gauche.

1° Tout élément de $\mathcal{R}_J(0)$ est quasi-régulier à gauche.

Soit $a \in \mathcal{R}_J(0)$. Les éléments de la forme $b - ba$, où $b \in A$, forment un idéal à gauche X ; cet idéal est $X = A$. En effet, supposons $X \neq A$. X est régulier et a est élément unité à droite modulo X. D'après la propriété 2.1, il existe un idéal à gauche Y maximal régulier contenant X, tel que a soit élément unité à droite modulo Y. On a : $a \in Y$, car $\mathcal{R}_J(0) \subseteq Y$.

Comme $X \subseteq Y$, on a, $\forall \ b \in A$,

$$b = b - ba + ba \in Y \implies Y = A$$

ce qui est contraire à Y maximal.

Il en résulte $X = A$, et il existe $b \in A$, tel que

$$b - ba = - a$$

soit

$$a + b - ba = 0 \quad .$$

2° Réciproquement, soit X un idéal à gauche dont tous les éléments sont quasi-réguliers à gauche, montrons que $X \subseteq \mathcal{R}_J(0)$.

Soit $a \in X$, $a \notin \mathcal{R}_J(0)$, alors il existe un idéal à gauche maximal régulier M tel que $a \notin M$. On a

$$(a| + M = A \quad .$$

Si e est élément unité à droite modulo M, on a :

$$e \in M + (a| \quad ,$$

soit

$$e = m + c \ , \quad m \in M \ , \quad c \in (a| \quad ,$$

$$c \in (a| \subseteq X \implies c \text{ quasi-régulier à gauche} \quad ;$$

il existe donc b tel que $c + b - bc = 0$, soit

$$e - m + b - b(e - m) = 0 \implies e \in M \quad .$$

Mais

$$e \in M \implies A = M \quad ,$$

ce qui est contraire à M maximal.

PROPRIÉTÉ 2.5. - Un idéal à gauche X, dont tous les éléments sont quasi-réguliers à gauche, a tous ses éléments quasi-réguliers.

Soit $a \in X$; il existe b tel que

$$a + b - ba \in X \quad ,$$

d'où $b \in X$; et il existe c tel que

$$b + c - cb = 0 \quad .$$

Il en résulte

$$(b + c)a - c(a + b) = 0 \implies ba = cb \implies a = c \implies a + b - ab = a + b - ba = 0$$

et a est quasi-régulier.

Des propriétés 2.4 et 2.5, on déduit la caractérisation suivante du radical de Jacobson à gauche de l'idéal 0.

PROPRIÉTÉ 2.6. - Le radical de Jacobson, à gauche de 0, est le plus grand idéal à gauche, constitué d'éléments quasi-réguliers.

Le radical de Jacobson étant un idéal bilatère, cette propriété 2.6 entraîne l'identité du radical de Jacobson à gauche et du radical de Jacobson à droite. On a également le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Tout nil-idéal, à gauche, est contenu dans le radical de Jacobson de l'anneau.

En effet, si a est un élément d'un nil-idéal, on a $a^n = 0$.

En posant $b = - a - a^2 - \ldots - a^{n-1}$, il vient

$$a + b - ba = a + b - ab = 0 \quad .$$

a est donc quasi-régulier et $a \in \mathcal{R}_J(0)$.

PROPRIÉTÉ 2.7. - Le radical de Baer et McCoy d'un idéal bilatère $\mathfrak{I}$ est contenu dans le radical de Jacobson de $\mathfrak{I}$.

Ceci résulte du fait que tout idéal primitif à gauche est premier.

En général, il n'y a pas égalité entre le radical de Baer et McCoy, et le radical de Jacobson, comme le montre l'exemple suivant dans le cas commutatif.

On considère un anneau d'intégrité commutatif, local et unitaire, dont l'idéal maximal n'est pas nul. On a dans ce cas $\mathcal{R}(0) = 0$, $\mathcal{R}_J(0) = M$.

Exemples.

Anneau des fractions $\frac{a}{b}$, où a et b sont entiers, b n'étant pas multiple du nombre premier p.

Anneau des fractions $\frac{f(x)}{g(x)}$, où $g(0) \neq 0$, $f(x)$, $g(x) \in K[x]$.

Les anneaux, pour lesquels on a $\mathcal{R}(\mathfrak{I}) = \mathcal{R}_J(\mathfrak{I})$ pour tout idéal bilatère $\mathfrak{I}$, sont appelés anneaux de Jacobson (cf. O. GOLDMANN [6] et W. KRULL [9]).

On verra, dans l'exposé suivant, un exemple intéressant d'anneau de Jacobson, constitué par les anneaux unitaires artiniens.

L'application $\mathfrak{I} \to \mathcal{R}_J(\mathfrak{I})$ satisfait aux propriétés déjà signalées pour le radical de Baer et McCoy (cf. S. A. AMITSUR [1]).

On peut étendre la notion de radical de Jacobson à un idéal à gauche X de l'anneau A, ou à un sous-module X d'un A-module à gauche M, en considérant les idéaux bilatères $X \,{}^{\circ}\!. A$ et $X \,{}^{\bullet}\!. M$.

DEFINITION 2.5. – On appelle radical de Jacobson d'un idéal à gauche X d'un anneau A (resp. d'un sous-module X d'un A-module M) le radical de Jacobson de l'idéal bilatère $X \cdot A$ (resp. de l'idéal bilatère $X \cdot M$).

Dans le cas des anneaux unitaires, certains auteurs considèrent un autre radical de l'idéal à gauche X de l'anneau A (resp. du sous-module X du A-module M), égal à l'intersection des idéaux à gauche maximaux contenant X (resp. des sous-modules maximaux contenant X). (cf. N. BOURBAKI [3]).

Il s'agit bien d'un autre radical ; en effet, dans un anneau unitaire, tout idéal à gauche étant régulier, le radical de Jacobson d'un idéal à gauche X coïncide avec l'intersection des idéaux à gauche maximaux contenant $X \cdot A$; mais, si X n'est pas un idéal bilatère, le radical de Jacobson ne coïncide pas nécessairement avec l'intersection des idéaux à gauche maximaux contenant X.

On peut définir également le radical de Jacobson à gauche d'un idéal à gauche d'un demi-groupe D à élément unité, comme l'intersection des idéaux à gauche maximaux de D contenant X. Dans le cas où X est un idéal bilatère, le radical de Jacobson à gauche ne coïncide pas avec le radical de Jacobson à droite, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un anneau. Il en est ainsi pour le demi-groupe des applications d'un ensemble infini dans lui-même.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMITSUR (S. A.). – A general theory of radicals, I : Radicals in complete lattices, Amer. J. of Math., t. 74, 1952, p. 774-786 ; II : Radicals in rings and bicategories, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 100-125 ; III : Applications, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 126-136.

[2] BAER (Reinhold). – Radical ideals, Amer. J. of Math., t. 65, 1943, p. 537-568.

[3] BOURBAKI (Nicolas). – Algèbre, Chapitre VIII. – Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Eléments de Mathématique, 23).

[4] CHÂTELET (Albert). – Arithmétique et algèbre modernes, t. 1 : Notions fondamentales, groupes. – Paris, Presses universitaires de France, 1954 ("Euclide", 1re section) ; t. 2 : Anneaux et corps, calcul algébrique, idéaux et divisibilité. – Paris, Presses universitaires de France, 1956 ("Euclide", 1re section).

[5] FITTING (Hans). – Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Annalen, t. 111, 1935, p. 19-41.

[6] GOLDMANN (Oscar). – Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, Math. Z., t. 54, 1951, p. 136-140.

[7] JACOBSON (Nathan). – Structure of rings. – Providence, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc., Coll. Publ., 37).

[8] KRULL (Wolfgang). - Idealtheorie. - Berlin, J. Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik ..., Band 4, Heft 3).

[9] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.

[10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars (Mémorial des Sciences mathématiques) (à paraître).

[11] McCOY (Neal H.). - Prime ideals in general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.