Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alfred H. Clifford

Caractères d'un demi-groupe commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1961-1962), exp. nº 21, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 21

29 mai 1962

CARACTÈRES D'UN DEMI-GROUPE COMMUTATIF

par Alfred H. CLIFFORD

La théorie des caractères d'un demi-groupe commutatif est due indépendamment à Š. SCHWARZ ([4], [5], [6]) et à HEWITT et ZUCKERMAN ([2] § 3, [3] § 5).

Elle se trouve, un peu remaniée et avec quelques additions, dans "Algebraic theory of semigroups" ([1], § 5.5). Suivant HEWITT et ZUCKERMAN, nous employons la théorie de la décomposition d'un demi-groupe commutatif en ses composantes archimédiennes ([1], § 4.3), que j'ai présentée dans ma première conférence, le 21 mai 1962. Je renvoie le lecteur à [1] pour les démonstrations complètes des théorèmes.

Soit D un demi-groupe commutatif. Par caractère de D nous entendons une application χ de D dans le corps des nombres complexes telle que

(1) $$\chi(a)\ \chi(b) = \chi(ab) \qquad (\forall\ a\ ,\ b \in D) \quad ,$$

(2) χ n'est pas identiquement zéro si D possède un élément neutre .

La condition (2) évite quelques petits ennuis. En présence de (1), elle est équivalente à : si D possède un élément neutre u, alors $\chi(u) = 1$. Si D ne possède pas d'élément neutre, et si le symbole u ne désigne pas un élément de D, l'ensemble $D' = D \cup \{u\}$ devient demi-groupe avec élément neutre u si nous définissons les produits

$$ua = au = a \qquad (\forall\ a \in D) \ , \qquad u^2 = u$$

(sans changement pour les produits d'éléments de D). Il y a une correspondance biunivoque $\chi \leftrightarrow \chi'$ entre les caractères χ de D et ceux, χ', de D', telle que χ soit la restriction de χ' à D. Pour cette raison, nous ne diminuons pas la généralité en faisant l'hypothèse que D contient un élément neutre u, ce que nous ferons dans la suite.

Le § 5.5 de [1] a été écrit de façon que tous les résultats soient valables si nous imposons à la notion de caractère χ la condition suivante :

(3) $$|\chi(a)| = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \qquad (\forall\ a \in D) \quad .$$

La condition (3) est une conséquence de la condition (1) si D est périodique : dans ce cas, $\chi(a)$ est ou 0 ou une racine de l'unité. HEWITT et ZUCKERMAN appellent "semicharacter" une application χ satisfaisant à (1), non identiquement nulle, telle que l'ensemble $\{\chi(a) : a \in D\}$ de ses valeurs soit borné. Il n'est pas nécessaire que la condition (3) soit satisfaite par les "semicharacters", et les résultats suivants ne sont pas valables pour eux (par exemple, le théorème 6).

Soit D un demi-groupe commutatif (avec élément neutre u), et soit D^* l'ensemble des caractères de D (sans ou avec la condition (3)). Pour chaque χ, ψ dans D^*, on définit le produit $\chi\psi$ par

$$(\chi\psi)(a) = \chi(a)\ \psi(a) \qquad (\forall\ a \in D) \quad ,$$

et alors il est facile de voir que D^* est un demi-groupe commutatif avec élément neutre.

THÉORÈME 6. - D^* <u>est une réunion de groupes.</u>

En effet, soit $\chi \in D^*$. Nous définissons ε et χ' par

$$\varepsilon(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(a) \neq 0 \quad , \\ 0 & \text{si } \chi(a) = 0 \quad ; \end{cases}$$

$$\chi'(a) = \begin{cases} 1/\chi(a) & \text{si } \chi(a) \neq 0 \quad , \\ 0 & \text{si } \chi(a) = 0 \quad . \end{cases}$$

Alors $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\varepsilon\chi = \chi$ et $\chi\chi' = \varepsilon$. Ceci montre que χ appartient au sous-groupe maximal de D^* dont ε est l'élément neutre. (Dans [1], suivant SCHWARZ, nous démontrons que D^* est la réunion d'un demi-treillis Y^* de groupes, où Y^* est isomorphe au demi-treillis des idéaux premiers de D.)

Traitons d'abord le cas le plus simple : D est lui-même une réunion de groupes. Alors (théorème 4 de l'exposé n° 20) D est la réunion d'un demi-treillis Y de groupes G_α $(\alpha \in Y)$. Soit e_α l'élément neutre de G_α. Si $\chi \in D^*$, $\chi(e_\alpha) = 1$ ou 0, et si $\chi(e_\alpha) = 0$ alors $\chi(a) = 0$ pour chaque $a \in G_\alpha$. Nous disons que χ est <u>principal</u> s'il existe $\beta \in Y$ tel que $\chi(e_\alpha) = 1$ si et seulement si $\alpha \geqslant \beta$. L'élément β est unique, il s'appelle le <u>sommet</u> de χ.

THÉORÈME 7.

(A) Soit χ un caractère principal de D, et soit β son sommet. La restriction χ' de χ à G_β est un caractère de G_β, et, pour chaque $a \in D$,

$$(1) \qquad \chi(a) = \begin{cases} \chi'(ae_\beta) & \text{si } ae_\beta \in G_\beta, \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases} .$$

(B) Soit $\beta \in Y$, et soit χ' un caractère du groupe G_β. Alors (1) définit un caractère principal χ de D ayant pour sommet β et coïncidant avec χ' sur G_β.

(C) Si Y satisfait la condition minimale, alors chaque caractère de D est principal.

Revenons au cas général. Nous verrons (théorème 9) que D^* est isomorphe à E^*, où E est une réunion de groupes ; de plus, on peut construire chaque caractère de D d'une manière simple en partant d'un caractère de E.

Nous disons que les caractères de D séparent les éléments de D si $a \neq b$ dans D implique l'existence d'un caractère χ de D tel que $\chi(a) \neq \chi(b)$. Rappelons que D est dit séparatif si $a^2 = b^2 = ab$ $(a, b \in D)$ impliquent $a = b$. Voici la raison d'être de ce terme.

THÉORÈME 8. - Les caractères de D séparent les éléments de D si et seulement si D est séparatif.

Définissons la relation σ sur D par :

$$a \,\sigma\, b \quad (a, b \in D) \quad \text{si} \quad \chi(a) = \chi(b) \quad \text{pour chaque} \quad \chi \in D^* .$$

Il est facile de voit que σ est une congruence. Soit D' le demi-groupe quotient D/σ, et soit θ l'application naturelle de D sur D'. Il est facile aussi de voir que la relation

$$(2) \qquad \chi(a) = \chi'(a\theta) \qquad (\forall\ a \in D)$$

établit un isomorphisme $\chi \to \chi'$ de D^* sur D'^*. Il en résulte que les caractères de D' séparent les éléments de D', d'où (théorème 8) D' est séparatif. Mais cela implique (théorème 5 de l'exposé n° 20) que D' peut être plongé dans un demi-groupe E qui est la réunion d'un demi-treillis Y de groupes G_α $(\alpha \in Y)$, tels que chaque G_α soit le groupe des quotients (ab^{-1}) d'une composante archimédienne D'_α de D'. Si χ' est un caractère de D', et si a, $b \in D'_\alpha$, on peut démontrer que $\chi'(a) = 0$ si et seulement si $\chi'(b) = 0$, que

$$(3) \qquad \chi''(ab^{-1}) = \begin{cases} \chi'(a)/\chi'(b) & \text{si } \chi(a) \neq 0 \text{ et } \chi(b) \neq 0 \quad , \\ 0 & \text{sinon} \quad , \end{cases}$$

définit un caractère de E, et que l'application $\chi' \to \chi''$ est un isomorphisme de D'^* sur E^*.

THÉORÈME 9. - Si D est un demi-groupe commutatif avec élément neutre, il existe un demi-groupe commutatif E avec élément neutre, qui est une réunion de groupes, et tel que le demi-groupe D^* de caractères de D soit isomorphe à celui, E^*, de E. L'isomorphisme $\chi \to \chi''$ est la composition de (2) $\chi \to \chi'$ et (3) $\chi' \to \chi''$.

Grâce au théorème 9, pour donner la structure de D^*, on peut faire l'hypothèse que D est une réunion de groupes, comme dans le théorème 7. Mais jusqu'à ce moment, nous ne pouvons la préciser que dans le cas ou le demi-treillis Y satisfait la condition minimale, et où par conséquent tous les caractères de D sont principaux. Du théorème 7 résulte que l'ensemble des caractères principaux de D ayant le sommet β est un groupe isomorphe au groupe G_β^* de caractères du groupe G_β. Alors D^* est la réunion des groupes G_β^*.

Si G et H sont des groupes abéliens, et si φ est un homomorphisme de G dans H, on définit l'adjoint φ^* de φ par

$$(\chi\varphi^*)(a) = \chi(a\varphi) \qquad (\forall \ a \in G \ , \ \ \chi \in H^*) \qquad .$$

C'est un homomorphisme de H^* dans G^*.

THÉORÈME 10. - Soit D un demi-groupe commutatif avec élément neutre, qui est la réunion d'un demi-treillis Y de groupes G_α $(\alpha \in Y)$, tel que Y satisfait la condition minimale.

Soit $\varphi_{\alpha\beta}$ $(\alpha \geqslant \beta)$ l'homomorphisme de G_α dans G_β donné par le théorème 4. Alors Y est un treillis. Soit Y^* le "dual" de Y, et soit D^* le demi-groupe des caractères de D. Alors D^* est isomorphe au demi-groupe qui est la réunion du (demi)-treillis Y^* des groupes G_α^* de caractères des G_α et ayant pour système d'homomorphismes $\varphi_{\alpha\beta}^* : G_\beta^* \to G_\alpha^*$ ($\beta \geqslant \alpha$ dans Y^*, c'est-à-dire, $\alpha \geqslant \beta$ dans Y), où $\varphi_{\alpha\beta}^*$ est l'adjoint de $\varphi_{\alpha\beta}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - Algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - Finite dimensional convolution algebras, Acta Mathematica, t. 93, 1955, p. 67-119.

[3] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - The ℓ_1-algebra of a commutative semigroup, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 70-97.

[4] SCHWARZ (Štefan). - Teorija kharakterov kommutativnykh polugrupp, Czechoslovak math. J., t. 4, 1954, p. 219-247.

[5] SCHWARZ (Štefan). - Kharaktery kommutativnykh polugrupp kak funkcii klassov, Czechoslovak math. J., t. 4, 1954, p. 291-295.

[6] SCHWARZ (Štefan). - O nekotoroj svjazi galua v teorii kharakterov polygrupp, Czechoslovak math. J., t. 4, 1954, p. 296-313.