

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ROGER DESQ

Étude de quelques relations d'équivalence définies dans un demi-groupe D

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1961-1962), exp. n° 11,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE QUELQUES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE
DÉFINIES DANS UN DEMI-GROUPE D

par Roger DESQ

Introduction. - Cet exposé est consacré à l'étude de certaines relations d'équivalence dans un demi-groupe D . Ces relations sont voisines des équivalences principales bilatères étudiées par R. CROISOT [2].

La première partie est consacrée aux définitions générales. Dans la deuxième partie est introduite la notion de complexe semi-fort, notion à la fois plus faible que celle de complexe fort [3] et que celle de complexe bilatèrement fort [2]. Toutefois dans un demi-groupe, ayant un élément unité à droite par exemple, un complexe semi-fort à droite est un complexe fort.

La troisième partie précise quelques propriétés des complexes semi-forts L -symétriques..

Les L -résidus sont définis et comparés aux résidus. Ils conduisent dans la dernière partie à la notion d'idéal D^2 -fermé à droite. Dans son travail, R. CROISOT [2] caractérise les demi-groupes D dans lesquels D^3 est simple ; ici s'introduisent assez naturellement des caractérisations analogues pour les demi-groupes D dans lesquels D^3 est simple à droite ou à gauche.

1. Définitions et notions générales.

Soit D un demi-groupe, D^* le demi-groupe anti-isomorphe de D . Nous considérerons $\mathcal{Q} = D \times D^*$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, y) où $x, y \in D$ avec comme multiplication

$$(x, y)(x', y') = (xx', y' y) \quad .$$

DÉFINITION 1.1. - Soit H un complexe de D . Nous noterons $\mathcal{E}_H$ la relation d'équivalence suivante dans $\mathcal{Q}$

$$(x, y) \equiv (x', y') \quad (\mathcal{E}_H) \quad \Longleftrightarrow \quad (H \cdot x) \cdot y = (H \cdot x') \cdot y' \quad .$$

THÉOREME 1.1. - Si on a $(x, y) \equiv (x', y') \pmod{\mathcal{L}_H}$, alors on a

$$(xx_1, y) \equiv (x' x_1, y') \pmod{\mathcal{L}_H}, \quad \forall x_1 \in D$$

et

$$(x, y_1 y') \equiv (x', y_1 y) \pmod{\mathcal{L}_H}, \quad \forall y_1 \in D,$$

en particulier, $\mathcal{L}_H$ est une relation d'équivalence régulière à droite dans $\mathcal{Q}$.

En effet, si $u \in (H \cdot xx_1) \cdot y$, on a $x_1 u \in (H \cdot x) \cdot y$, d'où $x_1 u \in (H \cdot x') \cdot y'$ ce qui entraîne $u \in (H \cdot x' x_1) \cdot y$. De même, si $v \in (H \cdot x' x_1) \cdot y'$; $v \in (H \cdot xx_1) \cdot y$; par suite, on a bien

$$(x' x_1, y') \equiv (xx_1, y) \pmod{\mathcal{L}_H}.$$

Si $(x, y) \equiv (x', y') \pmod{\mathcal{L}_H}$ pour tout $(x_1, y_1) \in \mathcal{Q}$, on a

$$(xx_1, y) \equiv (x' x_1, y') \pmod{\mathcal{L}_H}$$

ce qui donne $(xx_1, y_1 y') \equiv (x' x_1, y_1 y)$; soit

$$(x, y)(x_1, y_1) \equiv (x', y')(x_1, y_1) \pmod{\mathcal{L}_H}.$$

DÉFINITION 1.2. - L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathcal{Q}$ tels que $(H \cdot x) \cdot y = \emptyset$ sera appelé résidu de H dans $\mathcal{Q}$ et noté $\mathbb{W}_H$.

THÉOREME 1.2. - Si $\mathbb{W}_H \neq \emptyset$, c'est une classe modulo $\mathcal{L}_H$ et un idéal à droite de $\mathcal{Q}$.

DÉFINITION 1.3. - Nous considérerons dans D les relations suivantes

$$x \equiv x' \pmod{L_H} \text{ si pour } \forall y \in D \text{ on a } (x, y) \equiv (x', y) \pmod{\mathcal{L}_H}$$

$$y \equiv y' \pmod{H^L} \text{ si pour } \forall x \in D \text{ on a } (x, y) \equiv (x, y') \pmod{\mathcal{L}_H}$$

L_H et H^L sont évidemment des relations d'équivalence, et, d'après le théorème 1, on peut dire que L_H est régulière à droite et H^L régulière à gauche.

Soit $\overline{W}_H = \{x, \text{ tels que, pour tout } y, (x, y) \in \mathbb{W}_H\}$. $\overline{W}_H$ constitue donc une classe modulo L_H .

$$x \in \overline{W}_H \iff \text{il n'existe pas de produit } uy \text{ avec } xuy \in H \iff (H \cdot x) \cap D^2 = \emptyset.$$

Par suite $\overline{W}_H$ contient le résidu à droite W_H de H dans D (P. DUBREIL [3]).

$\overline{W}_H$ est un idéal à droite, on a même $\overline{W}_H D \subseteq W_H \subseteq \overline{W}_H$ c'est-à-dire $\overline{W}_H \subseteq W_H \cdot D$. Mais d'autre part si $a \in W_H \cdot D$, $aD \subseteq W_H$, ce qui donne $a \in \overline{W}_H$. D'où

THÉOREME 1.3. - Le résidu à droite W_H de H dans D est inclus dans une classe modulo L_H , cette classe étant $W_H \cdot D$.

THÉOREME 1.4. - $x \equiv x' \pmod{L_H} \iff (H \cdot x) \cap D^2 = (H \cdot x') \cap D^2$.

Soit $x \equiv x' \pmod{L_H}$. Si $uy \in (H \cdot x) \cap D^2$, on a $u \in (H \cdot x) \cdot y$, d'où

$$u \in (H \cdot x') \cdot y \implies uy \in (H \cdot x) \cap D^2.$$

Si $(H \cdot x) \cap D^2 = (H \cdot x') \cap D^2$, et si, pour un y , on a $u \in (H \cdot x) \cdot y$, on voit que $u \in (H \cdot x') \cdot y$ et inversement.

COROLLAIRE. - La relation d'équivalence principale R_H est incluse dans L_H .

Si H est fort, R_H et L_H coïncident sur $D - \overline{W}_H$.

Si D est globalement idempotent, $R_H = L_H$.

Si H est bilatèrement fort (R. CROISOT [2]) et si D est commutatif, $L_H = R_H^1$ (équivalence principale bilatère).

Nature de $\mathbb{W}_H$ - $\mathbb{W}_H \supseteq (\overline{W}_H, D) \cup (D, {}_H\overline{W})$, ${}_H\overline{W}$ étant l'ensemble des $y \in D$ tels que $\forall x \in D, (x, y) \in \mathbb{W}_H$.

Si $(a, b) \in \mathbb{W}_H - (\overline{W}_H, D) \cup (D, {}_H\overline{W})$, $a \notin \overline{W}_H$, donc il existe u, x avec $ax \equiv k \in K = H \cap D^3$; de même $b \notin {}_H\overline{W}$, $\exists y, v$ avec $yvb = k' \in K$.

$$(a, b) \in \mathbb{W}_H \implies (a, b)(ux, yv) = (k, k') \in \mathbb{W}_H.$$

Donc si $(K, K) \cap \mathbb{W}_H = \emptyset$, on a

$$\mathbb{W}_H = (\overline{W}_H, D) \cup (D, {}_H\overline{W}).$$

Cette condition est en particulier remplie si $H^3 \subset H$, donc si H est un sous-demi-groupe. Dans ce cas, on a de plus $\overline{W}_H = W_H$, ${}_H\overline{W} = {}_H W$.

En effet, soit $x \notin W_H$, il existe y avec $xy \in H$, mais alors pour tout $h \in H$,

$$xyh \in H \implies x \notin \overline{W}_H.$$

2. H est un complexe semi-fort, ou b-fort.

DÉFINITION 2.1. - b-fort signifie bilatèrement fort au sens de CROISOT [3].

Un complexe H sera dit semi-fort à droite, si, pour tout x tel que $H \cdot x \neq \emptyset$, $H \cdot x$ est un complexe fort.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Tout complexe b -fort est semi-fort (à droite et à gauche). Ceci résulte de ce que

$$H \text{ } b\text{-fort} \iff (H \cdot x) \cdot y \text{ } \chi \text{ } (H \cdot x') \cdot y' \implies (H \cdot x) \cdot y = (H \cdot x') \cdot y'$$

PROPRIÉTÉ 2.2. - Tout complexe fort est semi-fort.

On vérifie aisément que si H est fort, $H \cdot x$ est fort à gauche.

PROPRIÉTÉ 2.3. - Les complexes semi-forts à droite forment une famille de Moore.

Construction de la fermeture de Moore associée. - H étant un complexe donné, on construit

$$T^1_{(x,y)} = \bigcup_{x' \in D} \{x'[(H \cdot x) \cdot y]y \text{ si ceci rencontre } H \cdot\}$$

$$H_1 = H \cup \left(\bigcup_{x,y \in D} T^1_{(x,y)} \right)$$

H_1 étant ainsi obtenu, on construit H_2 à partir de H_1 comme on a construit H_1 à partir de H , etc.

On a donc

$$H \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n \subseteq \dots$$

Soit $\bar{H} = \bigcup_n H_n$.

On vérifie :

1° que $\bar{H}$ est un complexe semi-fort à droite ;

2° que si K est un complexe semi-fort à droite, contenant H , il contient $\bar{H}$.

$\bar{H}$ est bien la fermeture de Moore pour H associée à la famille de Moore formée par les complexes semi-forts à droite.

Pour la fermeture semi-forte, on remplace $T^1_{(x,y)}$ par

$$\bigcup_{x',y' \in D} \{x'[(H \cdot x) \cdot y]y \text{ et } x[(H \cdot x) \cdot y]y' \text{ s'ils rencontrent } H\}.$$

Pour la fermeture b -forte, on pose

$$T^1_{(x,y)} = \bigcup_{x',y' \in D} \{x'[(H \cdot x) \cdot y]y' \text{ si ceci rencontre } H\}.$$

THÉOREME 2.1. - Si H est un complexe b-fort, il existe une bijection entre

$$\{\mathcal{O}/\mathcal{L}_H - \mathbb{W}_H\} \text{ et } \{D/R'_H - W'_H\}$$

Soit $\overline{(x, y)}$ la classe modulo $\mathcal{L}_H$ contenant (x, y) dans $\mathcal{O}$.

Soit $\overline{a}$ la classe modulo R'_H contenant a dans D .

Si $\overline{(x, y)} \neq \mathbb{W}_H$, il existe $u \in (H \cdot x) \cdot y$

$$u \in (H \cdot x) \cdot y \Leftrightarrow (x, y) \in H \cdot u$$

donc

$$\overline{(x, y)} \subseteq H \cdot u$$

pour tout $u \in (H \cdot x) \cdot y$.

Si $(x', y') \in H \cdot u$, on a

$$u \in (H \cdot x) \cdot y \cap (H \cdot x') \cdot y',$$

H étant b-fort, on en déduit que $(x', y') \in \overline{(x, y)}$.

Donc $\overline{(x, y)} = H \cdot u$ pour tout $u \in (H \cdot x) \cdot y$.

On montre de même que, si $\overline{a} \neq W'_H$,

$$\overline{a} = (H \cdot x) \cdot y \text{ pour tout couple } (x, y) \in H \cdot a.$$

Soit φ l'application de $(\mathcal{O}/\mathcal{L}_H - \mathbb{W}_H)$ dans $(D/R'_H - W'_H)$ définie par :

$$\varphi[\overline{(x, y)}] = (H \cdot x) \cdot y.$$

On voit que φ est une application injective qui a pour application inverse

$$\psi : \psi(\overline{a}) = H \cdot a.$$

THÉOREME 2.2. - Si H est semi-fort à droite et si $(ax, c) \equiv (bx, c) \pmod{\mathcal{L}_H}$ avec $(ax, c) \notin \mathbb{W}_H$, alors $(a, c) \equiv (b, c) \pmod{\mathcal{L}_H}$. De même

$$(a, xc) \equiv (b, xc) \text{ et } (a, xc) \notin \mathbb{W}_H \Rightarrow (a, c) \equiv (b, c) \pmod{\mathcal{L}_H}.$$

Si H est b-fort, alors

$$(ax, c) \equiv (bx, d) \pmod{\mathcal{L}_H} \text{ avec } (ax, c) \notin \mathbb{W}_H \text{ entraine } (a, c) \equiv (b, d) \pmod{\mathcal{L}_H}$$

$$(a, yc) \equiv (b, yd) \pmod{\mathcal{L}_H} \text{ avec } (a, yc) \notin \mathbb{W}_H \text{ entraine } (a, c) \equiv (b, d) \pmod{\mathcal{L}_H}$$

donc $\mathcal{L}_H$ est simplifiable à droite dans $\mathcal{O} - \mathbb{W}_H$.

Soit H semi-fort à droite, $(ax, c) \notin \mathbb{W}_H$, donc il existe

$u \in (H \cdot ax) \cdot c \cap (H \cdot bx) \cdot c \Rightarrow xu \in (H \cdot a) \cdot c \cap (H \cdot b) \cdot c$
 Mais $H \cdot c$ est fort, donc $(H \cdot a) \cdot c = (H \cdot b) \cdot c$; par suite,

$$(a, c) \equiv (b, c) \quad (\mathcal{L}_H) .$$

COROLLAIRE. - Si H est semi-fort à droite et si $(K, K) \cap \mathbb{W}_H = \emptyset$, où $K = H \cap D^3$, alors L_H est simplifiable à droite dans $D - \overline{W}_H$.

Soit $ac \equiv bc \quad (L_H)$ avec $ac \notin \overline{W}_H$, si $y \in \overline{W}$, on a (a, y) et $(b, y) \in \mathbb{W}_H$, donc $(a, y) \equiv (b, y) \quad (\mathcal{L}_H)$.

Si $y \notin \overline{W}$ d'après l'hypothèse $(ac, y) \in \mathbb{W}_H$, mais alors le théorème 2.2 entraîne $(a, y) \equiv (b, y) \quad (\mathcal{L}_H)$.

D'où pour $\forall y$, on a $(a, y) \equiv (b, y) \quad (\mathcal{L}_H)$; par suite $a \equiv b \quad (L_H)$.

THEOREME 2.3. - Soient H un complexe, A une classe modulo L_H , différente de $\overline{W}_H$.

a. On a $\overline{W}_H \subseteq \overline{W}_A$ et $L_H \subseteq L_A$; si de plus $H \subseteq A$, alors $\overline{W}_H = \overline{W}_A$.

b. Si H est semi-fort à droite et si $\mathbb{W}_H$ vérifie la condition suivante

$$xuy \equiv x'uy \equiv xvy \quad (L_H), \quad xuy \notin \overline{W}_H, \quad (xuy, z) \in \mathbb{W}_H \Rightarrow (x'vy, z) \in \mathbb{W}_H$$

alors A est un complexe semi-fort à droite.

c. Si H est semi-fort, A est fort.

d. Si H est b-fort, A est fort et b-fort.

Démontrons par exemple (c). - Soient $u \in A \cdot x \cap A \cdot x'$ et $v \in A \cdot x$.
 On a $xu \equiv x'u \equiv xv \quad (L_H)$, car ils appartiennent à A . Si pour y on a $(xu, y) \notin \mathbb{W}_H$, alors le théorème 2.2 donne

$$(x, y) \equiv (x', y) \quad (\mathcal{L}_H) \text{ d'où le théorème 1.1 } \Rightarrow (xv, y) \equiv (x'v, y) .$$

Supposons que pour z on ait $(xu, z) \in \mathbb{W}_H$ et $(x'v, z) \notin \mathbb{W}_H$, il existe donc β avec $x'v\beta z \in H$.

$A \neq \overline{W}_H$, il existe donc α et y avec $xu\alpha y, x'u\alpha y, x'v\alpha y \in H$.

$$v \in (H \cdot x') \cdot \beta z \cap (H \cdot x') \cdot \alpha y ;$$

mais H , semi-fort à gauche, donne $(H \cdot x') \cdot \beta z = (H \cdot x') \cdot \alpha y$. Or $u \in (H \cdot x') \cdot \alpha y$; par suite $x'u\beta z \in H$, mais ceci contredit le fait que $(x'u, z) \in \mathbb{W}_H$. Nous avons montré que, pour tout y , $(xu, y) \equiv (x'v, y) \quad (\mathcal{L}_H)$;

par suite

$$xu \equiv x'v \ (L_H) \Rightarrow x'v \in \Lambda \Rightarrow \Lambda \text{ fort.}$$

THEOREME 2.4. - Soit H un complexe semi-fort à droite. Soit S un sous-demi-groupe inclus dans H et tel que $SH \subseteq H$, alors

- S est inclus dans une classe U_S modulo $L_H \neq \overline{W}_H$.
 - U_S est un sous-demi-groupe unitaire à droite.
 - C'est le plus petit complexe unitaire à droite contenant S , si $K = D^3 \cap H$ est inclus dans S .
- a. Si $(s, y) \in \mathbb{W}_H$ avec $s \in S$, alors $y \in \overline{W}_H$; en effet, si on avait x, α avec $x\alpha y \in H$, on aurait $sx\alpha y \in H$, d'où $x\alpha \in (H \cdot s) \cdot y$. Donc si $(s, y) \in \mathbb{W}_H$, $(s', y) \in \mathbb{W}_H$ pour $\forall s' \in S$, soit $(s, y) \equiv (s', y) \ (L_H)$. Si $(s, y) \notin \mathbb{W}_H$, $\exists \alpha$ avec $s\alpha y \in H$; mais alors $s.s\alpha y \in H$, $s's\alpha y \in H$; par suite $s\alpha \in (H \cdot s) \cdot y \cap (H \cdot s') \cdot y$, $\forall s'$; comme H est semi-fort à droite, on a $(s, y) \equiv (s', y) \ (L_H)$, d'où $s \equiv s' \ (L_H)$, $\forall s'$; S est bien inclus dans une seule classe U_S .

b. U_S est un sous-demi-groupe. Montrons d'abord que $u \equiv s \ (L_H)$ entraîne $su \equiv s \ (L_H)$. $(s, y) \in \mathbb{W}_H$, on a $(su, y) \in \mathbb{W}_H$. Si $(s, y) \notin \mathbb{W}_H$, $(u, y) \notin \mathbb{W}_H$, d'où $\exists \alpha$ avec $u\alpha y \in H$, $s\alpha y \in H$; mais

$$SH \subset H \Rightarrow su\alpha y \in H \Rightarrow \alpha \in (H \cdot s) \cdot y \cap (H \cdot su) \cdot y;$$

par suite $(s, y) \equiv (su, y) \ (L_H)$ et $s \equiv su \ (L_H)$.

Si $u_1, u_2 \in U_S$, on a $u_1 \equiv s \ (L_H)$, $u_2 \equiv s \ (L_H)$; d'où comme L_H est régulière à droite, $u_1 u_2 \equiv su_2 \ (L_H)$, mais $su_2 \equiv s$, d'où

$$u_1 u_2 \equiv s \Rightarrow u_1 u_2 \in U_S.$$

b'. U_S est unitaire à droite. Soit $xu \equiv s \ (L_H)$ et $u \equiv s \ (L_H)$.

Si $(xu, y) \in \mathbb{W}_H$, $(s, y) \in \mathbb{W}_H \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{W}_H$.

Si $(xu, y) \notin \mathbb{W}_H$, $\exists \alpha$ avec $xu\alpha y \in H$, $s\alpha y \in H$, $u\alpha y \in H$ mais alors $su\alpha y \in H$, d'où $(s, y) \equiv (x, y) \ (L_H)$; par suite $s \equiv x \ (L_H)$, $x \in U_S$.

c. Si $S \subseteq V$, V étant unitaire à droite, alors, pour $\forall u \in U_S$, on a $us^2 \in H$, car $s^3 \in H$, donc $us^2 \in H \cap D^3 = K \subseteq S$; d'où $us^2 \in V$; comme $s^2 \in S \subseteq V$, on a bien $u \in V$.

COROLLAIRE.

1° Un sous-demi-groupe semi-fort à droite S est contenu dans une classe u_S modulo $L_S \neq W_S$. u_S est un sous-demi-groupe fort et unitaire à droite.

2° u_S est le plus petit complexe unitaire à droite contenant S . Donc, pour que $u_S = S$, il faut et il suffit que S soit unitaire à droite, et alors S est fort.

3° On a

$$W_S = \overline{W}_S = \overline{W}_{u_S} = W_{u_S}, \quad L_S = L_{u_S} = R_{u_S}.$$

THÉOREME 2.5. - Soit S un sous-demi-groupe semi-fort, alors

- a. ${}_S u \subseteq u_S + W_S$ et $u_S \subseteq {}_S u + {}_S W$.
- b. Si $W_S \subseteq {}_S W$, alors ${}_S u \subseteq u_S$, donc si S est équirésiduel, ses deux enveloppes unitaires à gauche et à droite coïncident.
- c. Si S est unitaire à gauche, par rapport à u_S (c'est-à-dire si $sx \in S$, $s \in S \Rightarrow x \in u_S$), on a, pour $\forall a \in D$ et $\forall u \in u_S$,

$$ua \equiv a \cdot (L_S).$$

- d. Si S est équirésiduel, alors $W = {}_S W = W_S$ est un idéal premier.

3. Propriétés bilatères.

Nous supposons maintenant que ${}_H L = L_H = L$; nous dirons que H est L -symétrique, si de plus, on a $\overline{W}_H = {}_H \overline{W} = \overline{W}$.

$L_H = {}_H L$ est vérifiée par exemple si

$$(x, y) \equiv (x', y') \quad (L_H) \implies (y, x) \equiv (y', x') \quad (L_H).$$

Dans ce cas L_H est régulière dans $\mathcal{Q}$.

THÉOREME 3.1. - Soit S un sous-demi-groupe semi-fort, L -symétrique.

- a. Si S est net, alors D/L est un groupe.
- b. Si S est non net, D/L est un pseudo-groupe.

C'est une conséquence du corollaire du théorème 2.4 et des théorèmes 26 et 27 de [3].

PROPRIÉTÉ 3.1. - Soit H un complexe semi-fort, L -symétrique. Si $H \subseteq D^3$ et si $H \cap \bar{W} = \emptyset$, alors H est saturé dans D^3 pour L .

Soit $xyz \equiv h \pmod{L}$ avec $h = pqr$ puisque $H \subseteq D^3$; $\exists u, v$ avec $pqr uv \in H$; comme $(xyz, v) \equiv (h, v) \pmod{\mathcal{L}_H}$, on a $xyz uv \in H$.

$pqr \in H$, $pqr uv \in H$, H semi-fort à gauche $\Rightarrow (p, uv) \equiv (p, v) \pmod{\mathcal{L}_H}$ et le théorème 1.1 entraîne $(pqr, pqr uv) \equiv (pqr, pqr)$.

$$xyz \equiv pqr \pmod{L} \Rightarrow xyz uv \equiv pqr uv \pmod{L}$$

d'où

$$(pqr, pqr) \equiv (pqr, pqr uv) \equiv (xyz, xyz) \equiv (xyz, xyz uv) \pmod{\mathcal{L}_H}.$$

$xyz \notin \bar{W}$, car $h \notin \bar{W}$, et H semi-fort à gauche $\Rightarrow (x, z) \equiv (x, uv) \pmod{\mathcal{L}_H}$. Or $xyz uv \in H$; d'où $xyz \in H$; H est bien saturé dans D^3 .

THÉORÈME 3.2. - Soit H un complexe semi-fort, L -symétrique, tel que $\mathcal{W}_H = \emptyset$; alors pour que $F = D/L$ soit un groupe, il faut et il suffit que $K = H \cap D^3$ soit inclus dans une seule classe modulo L . Dans ce cas, K est un complexe fort dans D^2 , saturé dans D^3 pour L .

Supposons K inclus dans une seule classe A modulo L . D'après le théorème 7, comme nous avons $L_H = H^L = L_K = K^L$, $\bar{W}_H = \bar{W} = \bar{W}_K = \bar{K} = \emptyset$, nous en déduisons que A est un complexe fort tel que $\bar{W}_K = \bar{W}_A = \bar{A} = \bar{K} = \emptyset$; $L_K = L_A = R_A$, $K^L = A^L = A^R$, donc A est fort, symétrique, net, d'après le théorème 1 de [1], $F = D/L = D/R$ est un groupe.

D'après la propriété 3.1 $A \cap D^3 = K$; si $a, b \in D^2$ et si $au \in K$, $bu \in K$, $av \in K$, on a $bv \in A \cap D^3 = K$. Donc K est bien un complexe fort dans D^2 .

Supposons que F soit un groupe. Nous pouvons considérer que $F = D^3/L'$, où L' est la restriction de L à D^3 . Donc F est une image homomorphe de D^3 , K étant semi-fort dans D^3 et saturé pour L dans D^3 d'après la propriété 3.1. Son image $\bar{K}$ dans F est un complexe semi-fort dans F . Mais un complexe semi-fort à droite dans un groupe est un complexe fort. En effet, si $\bar{K} \cdot x \cap \bar{K} \cdot y \neq \emptyset$, ceci s'écrit $(\bar{K} \cdot e) \cdot x \cap (\bar{K} \cdot e) \cdot y \neq \emptyset$, et si $\bar{K}$ est semi-fort à droite, on a bien

$$\bar{K} \cdot x = \bar{K} \cdot y.$$

On en déduit que K est fort dans D^2 ; en effet, si $a, b \in D^2$ et

au, bu, av $\in K \Rightarrow Au, Bu, Av \in \bar{K} \Rightarrow BV \in \bar{K}$, d'où $bv \in K$. (A désigne image de a dans $\varphi: D \rightarrow F$.)

En considérant que $F = D^2/L''$, L'' restriction de L à D^2 , on a $L_H = L_K$; mais K étant fort et net dans D^2 , on a $L'' = R$, équivalence principale associée à K . Mais alors le théorème 1 de [1] nous permet d'affirmer que $K \cap D^4$ est parfait.

Soient k_1 et $k_2 \in K$, il existe x_1, x_2 avec $k_1 x_1 \in H \cap D^4 = K \cap D^4$, et de même $k_2 x_2 \in K \cap D^4$. On a donc $K_1 X_1 = K_2 X_2$. Mais $k_1 \in K$, $k_1 = a_1 b_1 c_1$, on a donc

$$a_1 b_1 c_1 \in K, \quad a_1 b_1 c_1 x_1 \in K, \quad K \text{ étant fort dans } D^2,$$

ceci entraîne que $b_1 c_1 \equiv b_1 c_1 x_1 R_K$; d'où $B_1 C_1 = B_1 C_1 X_1$, d'où $X_1 = E$; et on a de même $X_2 = E$; par suite $K_1 = K_2$. K est bien inclus dans une classe modulo L .

Supposons toujours H semi-fort et L -symétrique, mais $\mathbb{W}_H \neq \emptyset$.

Soit $N'_d = \{X \in F \text{ tels que } XY = \bar{W} \Rightarrow Y = \bar{W}\}$ où F désigne toujours D/L .

Soit $N' = N'_d \cup N'_g$.

THÉOREME 3.3. - Soit H un complexe semi-fort, L -symétrique tel que $K = D^3 \cap H$ soit inclus dans une classe modulo L et que $(K, K) \cap \mathbb{W}_H = \emptyset$; alors si N' est différent de la partie vide, c'est un groupe.

4. Idéaux D^2 fermés à droite.

DÉFINITION 4.1. - Un idéal à droite m est dit D^2 -fermé à droite s'il existe un complexe H tel que $m = H \cdot D^2$.

On sait [5] que ces idéaux sont caractérisés par $m = m D^2 \cdot D^2$.

THÉOREME 4.1. - Pour que l'idéal à droite $|A|$ engendré par un complexe A soit D^2 fermé à droite, il faut et il suffit que l'on ait

$$AD^2 \cdot D^2 \subseteq A \cup AD.$$

Condition nécessaire. - On a $A \subset |A| = A \cup AD$.

$$AD^2 \cdot D^2 \subseteq |A| D^2 \cdot D^2 = |A|.$$

Condition suffisante. - On a, pour toute partie X , $X \subseteq XD^2 \cdot D^2$.

$$\begin{aligned} |A) D^2 \cdot D^2 &= \{[A \cup AD] D^2 \cdot D^2\} \\ AD^3 \subseteq AD^2 &\Rightarrow (AD^2 \cup AD^3) \cdot D^2 = AD^2 \cdot D^2, \end{aligned}$$

d'où

$$|A) D^2 \cdot D^2 \subseteq |A)$$

et par suite

$$|A) D^2 \cdot D^2 = |A) .$$

Dans la suite $\overline{W}_H$ sera appelé le L -résidu à droite de H . Un complexe H sera dit L -équirésiduel si $\overline{W}_H = \overline{H}$.

THÉOREME 4.2. - Pour qu'un idéal à droite soit L -résidu à droite d'un complexe, il faut et il suffit qu'il soit D^2 -fermé à droite.

Pour que deux complexes H et H' aient même L -résidu à droite, il faut et il suffit que nous ayons $(D - H) \cdot D^2 = (D - H') \cdot D^2$, ou encore que $D - H \equiv D - H' \pmod{D^2}$ [5].

Or toute classe modulo D^2 admet un élément minimum, donc l'ensemble des complexes H admettant même L -résidu a un élément maximum qui est $H = D - XD^2$.

Les idéaux D^2 -fermés à droite sont les éléments maximum des classes modulo $\mathfrak{M}_{D^2}$ définie dans [5]. Pour que tous les idéaux à droite d'un demi-groupe D soient D^2 -fermés, il faut et il suffit que toute classe modulo $\mathfrak{M}_{D^2}$ contienne un seul élément, donc que $m D^2 = m' D^2 \Rightarrow m = m'$ où $m, m' \in \mathcal{P}^*$ demi-groupe multiplicatif des idéaux à droite de D . Cette condition est équivalente au fait que D est simplifiable dans $\mathcal{P}^*$ d'où le théorème suivant.

THÉOREME 4.3. - Pour que dans un demi-groupe D , tous les idéaux à droite soient D^2 -fermés à droite, il faut et il suffit qu'ils soient fermés à droite.

THÉOREME 4.4. - Pour qu'un idéal bilatère X soit L -résidu d'un complexe L -équirésiduel, il faut et il suffit que l'on ait

$$XD^2 \cdot D^2 \subseteq X ; XD^2 \cdot D^2 \subseteq X ; D^2 X \cdot D^2 \subseteq X ; D^2 X \cdot D^2 \subseteq X .$$

La première et la dernière conditions sont équivalentes à $XD^2 \cdot D^2 = X$ et

$D^2 X \cdot D^2 = X$, car on a toujours les inclusions inverses. Donc X est L -résidu à droite et L -résidu à gauche. Le complexe maximum admettant X comme L -résidu est

$$H = (D - XD^2) \cap (D - D^2 X) = D - (XD^2 \cup D^2 X) \quad ;$$

d'où les conditions nécessaires et suffisantes suivantes

$$(D - H) \cdot D^2 = X \quad (D - H) \cdot D^2 = X$$

qui s'écrivent

$$\begin{aligned} (XD^2 \cup D^2 X) \cdot D^2 = X &\Leftrightarrow \begin{cases} XD^2 \cdot D^2 \subseteq X \\ D^2 X \cdot D^2 \subseteq X \end{cases} ; \\ (XD^2 \cup D^2 X) \cdot D^2 = X &\Leftrightarrow \begin{cases} XD^2 \cdot D^2 \subseteq X \\ D^2 X \cdot D^2 \subseteq X \end{cases} . \end{aligned}$$

DÉFINITION 4.2. - D^3 est dit simple à droite s'il ne contient pas d'idéal à droite propre.

THÉOREME 4.5. - D étant un demi-groupe, pour que D^3 soit simple à droite, il faut et il suffit que tout idéal à droite $M \neq \emptyset$ de D contienne D^3 .

Condition nécessaire. - Si M est un idéal à droite, $M \neq \emptyset$, $M \cap D^3 \neq \emptyset$ et $M \cap D^3$ est un idéal à droite de D^3 donc $M \cap D^3 = D^3$.

Condition suffisante. - Soit M un idéal à droite de D^3 , MD^3 est un idéal à droite de D ; mais,

$$M \subseteq D^3 \subseteq MD^3 \subseteq M \Rightarrow M = D^3 .$$

THÉOREME 4.6. - Pour que D^3 soit simple à droite, il faut et il suffit que D ne contienne pas d'idéaux D^2 -fermés à droite.

Condition nécessaire. - Si N est un idéal à droite D^2 -fermé, il est de la forme $ND^2 \cdot D^2 = N$.

Mais ND^2 est un idéal à droite de D , donc $D^3 \subseteq ND^2$. Comme $ND^2 \subseteq D^3$, on a

$$ND^2 = D^3 \quad \text{et} \quad N = D^3 \cdot D^2 = D .$$

Condition suffisante. - Supposons qu'il existe un idéal à droite N avec $D^3 \not\subseteq N$. Posons $N_3 = N \cap D^3$.

$\overline{W}_{D-N_3} \neq \emptyset$, car il contient N ; en effet $ND^2 \subseteq N \cap D^3 = N_3$;

$\overline{W}_{D-N_3} \neq 0$, car il existe au moins un élément $\in D^3 - N_3$.

Soit abc , $abc \in D \cdot N_3 \Rightarrow a \notin \overline{W}_{D-N_3}$.

Or $\overline{W}_{D-N_3}$ est un idéal D^2 -fermé à droite d'après le théorème 4.2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROISOT (Robert). - Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 80, 1952, p. 217-223.
- [2] GROISOT (Robert). - Equivalences bilatères définies dans un demi-groupe, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 373-417.
- [3] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 2e série, t. 63, 52 p.).
- [4] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, III., Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953, p. 289-306.
- [5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).