Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Mario Curzio

Les transporteurs d'un groupe fini dans les sous-groupes de Fitting et Frattini

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1961-1962), exp. nº 1, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A1_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 1

6 novembre 1961

LES TRANSPORTEURS D'UN GROUPE FINI DANS LES SOUS-GROUPES DE FITTING ET FRATTINI

par Mario CURZIO

1. - Soit N un sous-groupe du groupe G. Nous appellerons transporteur de G, dans N, l'ensemble $\overline{N}$ des éléments $g \in G$ tels que, pour tout $x \in G$, le commutateur $(x, g) = g^{-1} x^{-1} gx$ appartienne à N. Évidemment, les transporteurs de G, dans ses sous-groupes, forment une famille de Moore dont le centre de G est élément minimum. De plus, $\overline{N}$ est un sous-groupe de G ; en effet, on a :

$$(x, gh^{-1}) = (g, h^{-1})(xh^{-1}, g)(h, xh^{-1})$$

et, si g et h sont en $\overline{N}$, on obtient : $gh^{-1} \in \overline{N}$. Dans cet exposé on étudiera les transporteurs d'un groupe fini dans son sous-groupe de Frattini $\Phi(G)$ et dans son sous-groupe de Fitting $F(G)$. On rappelle que $\Phi(G)$ et $F(G)$ sont nilpotents et que $\Phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G, tandis que $F(G)$ est engendré par les sous-groupes distingués nilpotents de G.

2. - Donnons d'abord certaines propriétés élémentaires de $\overline{N}$:

PROPOSITION 1.2. - $\overline{N}$ appartient au normalisateur de N.

Démonstration. - Si $g \in \overline{N}$ et $x \in N$; on a

$$x^{-1} x^{g} = (g, x) \in N \quad .$$

PROPOSITION 2.2. - N est un sous-groupe distingué si (et seulement si) $N \leq \overline{N}$.

Démonstration. - Soit $N \leq \overline{N}$.

Pour tout $g \in N$ et pour tout $x \in G$, on aura :

$$g^{-1} g^{x} = (x, g) \in N$$

$$g^{x} \in N$$

c'est-à-dire que N est distingué.

L'inverse est également évident.

PROPOSITION 3.2. - Si N est un sous-groupe distingué (caractéristique), $\overline{N}$ est distingué (caractéristique).

Démonstration. - Si N est stable pour l'automorphisme ω, et si $g \in \overline{N}$, on aura

$$(g^{\omega}, x) = (g, x^{\omega^{-1}})^{\omega} \in N \quad .$$
$$g^{\omega} \in \overline{N}$$

PROPOSITION 4.2. - Si N est soluble, $\overline{N}$ est soluble.

Démonstration. - Soit N soluble, Le sous-groupe dérivé $K(\overline{N})$ de $\overline{N}$ est soluble, parce que $K(\overline{N}) \leq N$. Puisque $\overline{N}/K(\overline{N})$ est abélien, le groupe $\overline{N}$ est soluble.

PROPOSITION 5.2. - Si N est un sous-groupe distingué de G, $\overline{N}/N$ est le centre de G/N.

Démonstration. - Soient Nx et Ng deux classes d'équivalence par rapport à N. Si $g \in \overline{N}$, on a

$$(Nx, Ng) = N(x, g) = N \quad .$$

Cela signifie que $\overline{N}/N$ est dans le centre de G/N. Inversement si Ng est dans le centre de G/N, on a $(x, g) \in N$ et $g \in \overline{N}$.

COROLLAIRE 1.2. - Un groupe G vérifiant la condition maximale est nilpotent si (et seulement si), pour tout sous-groupe distingué $N \neq G$, on a $N \neq \overline{N}$.

Démonstration. - Il suffit de rappeler que pour les groupes vérifiant la condition maximale, la suite centrale croissante est de longueur finie.

PROPOSITION 6.2. - Soit $Z(N < G)$ le centralisateur de N. Le groupe $Z(N < G) \cap \overline{N}$ est nilpotent de classe ≤ 2.

Démonstration. - Si $g, h \in Z(N < G) \cap \overline{N}$, on a, pour tout $x \in G$,

$$(x^{-1}, g) \in N \qquad x^{g} x^{-1} \in N$$
$$(h, x) \in N \qquad x^{-1} x^{h} \in N$$

et par suite :

$$x^{-1}\, x^{h} = (x^{-1}\, x^{h})^{g} = (x^{-1})^{g}\, x^{hg}$$

$$x^{g}\, x^{-1} = (x^{g}\, x^{-1})^{h} = x^{gh}(x^{-1})^{h} \quad .$$

Par conséquent :

$$x^{hg} = x^{gh}$$

et, puisque x est arbitraire, les automorphismes intérieurs associés aux éléments g et h sont permutables. Étant donné que $Z(N < G) \cap \overline{N}/Z(G < G)$ est isomorphe au groupe des automorphismes intérieurs de G associés aux éléments de $Z(N < G) \cap \overline{N}$, nous avons prouvé que $Z(N < G) \cap \overline{N}/Z(G < G)$ est abélien, en particulier le quotient de $Z(N < G) \cap \overline{N}$ par rapport à son centre sera abélien ; $Z(N < G) \cap \overline{N}$ est donc nilpotent de classe ≤ 2 .

COROLLAIRE 2.2.

1° Si N est distingué, $Z(N < \overline{N})$ est nilpotent de classe ≤ 2 .

2° Si N appartient au centre $Z(G)$ de G , $\overline{N}$ est nilpotent de classe ≤ 2 .

Démonstration.

1° Si N est distingué, on a $N < \overline{N}$ (Proposition 2.2). Alors :

$$Z(N < G) \cap \overline{N} = Z(N < \overline{N}) \quad .$$

2° Dans le cas $N \leq Z(G)$, on a

$$Z(N < \overline{N}) = \overline{N} \quad .$$

et 2° est une conséquence de 1°.

3. - Dans les considérations suivantes, il s'agira toujours de groupes finis.

On a :

THÉORÈME 1.3. - Si $\Phi(N)$ est permutable avec tout sous-groupe maximal de G , $\Phi(N)$ est nilpotent.

Démonstration. – Soit $\Phi(N) \not\leq \Phi(G)$.

Si $\Phi(N)$ est maximal, on voit aisément que $\Phi(N) = \Phi(G) = 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $\Phi(N)$ n'est pas maximal, on peut trouver un sous-groupe maximal M tel que

$$G = [\Phi(N) , M] \quad .$$

Étant donné que $\Phi(N) \leq N$, la relation de Dedekind nous assure que

$$[\Phi(N) , M \cap N] = [\Phi(N) , M] \cap [N , \Phi(N)]$$

$$[\Phi(N) , M \cap N] = N$$

$$N = M \cap N \quad ,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Alors

$$\Phi(N) \leq \Phi(G) \quad .$$

Cela posé, un résultat dû à R. BAER, [1], nous donne

$$F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{F(G)}{\Phi(G)}$$

en outre (Proposition 5.2) :

$$\frac{\overline{\Phi(G)}}{\Phi(G)} = Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \leq F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right)$$

d'où

$$\overline{\Phi(G)} \leq F(G) \quad .$$

Enfin, $\overline{\Phi(N)}$ est nilpotent car $\Phi(N) \leq \Phi(G)$, et par conséquent $\overline{\Phi(N)}$ appartient au groupe $\overline{\Phi(G)}$ qui est nilpotent puisque $\overline{\Phi(G)} \leq F(G)$.

COROLLAIRE 1.3. – Soient G un groupe hypersoluble, p un diviseur premier de l'ordre de $\Phi(G)$. Si N appartient au sous-groupe dérivé d'un sous-groupe de Sylow Sp de G , $\overline{N}$ est nilpotent.

Démonstration. - Comme le dérivé $K(G)$ de G est nilpotent ([4]), $K(Sp)$ est un sous-groupe distingué de G ([5]), c'est-à-dire que $K(Sp)$ est le dérivé de tout p-sous-groupe de Sylow de G. Le seul p-sous-groupe de Sylow de $\Phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes $\Phi(Sp)$ ([5]) ; alors, étant donné que $K(Sp) \leq \Phi(Sp)$, on aura :

$$K(Sp) \leq \Phi(G) \quad .$$

Si $N < K(Sp)$, on a

$$\overline{N} \leq \overline{\Phi(G)} \quad .$$

Donc, $\overline{N}$ est nilpotent parce que $\overline{\Phi(G)}$ est nilpotent (Théorème 1.3).

THÉORÈME 2.3. - Soit G un groupe tel que $F(G) = Z(G)$. Alors :

1° $\overline{F(G)} = Z(G)$.

2° Si $M > \Phi(G)$ est un sous-groupe maximal et soluble, on a $\overline{M} < M$.

Démonstration. - Le transporteur $\overline{F(G)}$ est un sous-groupe distingué (Proposition 3.2), de plus $\overline{F(G)}$ est nilpotent (Corollaire 2.2) et $\overline{F(G)} \geq F(G)$ (Proposition 2.2). Par définition de $F(G)$, on a aussi :

$$\overline{F(G)} \leq F(G) \quad .$$

L'égalité 1° est ainsi démontrée.

Soit $A/Z(G)$ le sous-groupe engendré par les sous-groupes abéliens distingués de $G/Z(G)$. On a :

$$A \geq Z(A) \geq Z(G)$$

et :

$$\frac{A}{Z(A)} \simeq \frac{A/Z(G)}{Z(A)/Z(G)} \quad .$$

Cela signifie que $A/Z(A)$ est abélien et que A est nilpotent, alors

$$A \leq F(G) = Z(G) \quad ,$$

et $A/Z(G)$ est le plus petit sous-groupe de $G/Z(G)$. Ce que nous avons démontré tout à l'heure, prouve que $M/Z(G)$ n'est pas un sous-groupe distingué de $G/Z(G)$ et par conséquent M n'est pas un sous-groupe distingué de G ; on a $M \geq \overline{M}$, car M coïncide avec son normalisateur, (Proposition 1.2), et $M \neq \overline{M}$ parce que M n'est pas distingué (Proposition 2.2).

THÉORÈME 3.3. - Si G est un groupe parfait, on a

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \ , \qquad \overline{Z(G)} \leq \Phi(G) \qquad ?$$

Démonstration. - Il est bien connu ([3]) que

$$K(G) \cap Z(G) \leq \Phi(G) \qquad ,$$

d'où

$$Z(G) \leq \Phi(G) \qquad .$$

Le quotient $G/\Phi(G)$ est parfait parce que

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{[K(G) \ , \ \Phi(G)]}{\Phi(G)} = \frac{G}{\Phi(G)} \qquad .$$

Alors :

$$Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \leq \Phi\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \qquad .$$

Mais

$$\Phi\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \qquad .$$

Et d'après cela (Proposition 5.2) :

$$\overline{\frac{\Phi(G)}{\Phi(G)}} = Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \qquad .$$

Donc :

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$$

et

$$\overline{Z(G)} \leq \overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \quad .$$

THÉORÈME 4.3. – <u>Si</u> G <u>n'est pas d'ordre</u> 1 , <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) $$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$$

(2) $$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) > Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. – (1) $\Longrightarrow$ (2) .

Soit $\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$. D'après la proposition 5.2, le centre de $G/\Phi(G)$ coïncide avec $\overline{\Phi(G)}/\Phi(G)$, Donc :

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \geqslant Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad .$$

On ne peut pas avoir $K(G/\Phi(G)) = \Phi(G)/\Phi(G)$, car dans ce cas

$$\frac{G}{\Phi(G)} = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad ,$$

et G serait d'ordre 1 .

(2) $\Longrightarrow$ (1) .

Soit

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) > Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \quad .$$

Alors, étant donné que ([3])

$$K\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \cap Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad ,$$

on a

$$Z\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)}$$

et

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \quad .$$

LEMME 1.3. - Si $K(G)$ est nilpotent, il existe en $G/\Phi(G)$ un complément [1] $S/\Phi(G)$ de $K(G/\Phi(G))$.

Démonstration. - Puisque $K(G)$ est nilpotent, on a

$$K(\frac{G}{\Phi(G)} = \frac{[K(G)\ ,\ \Phi(G)]}{\Phi(G)} \leqslant F(\frac{G}{\Phi(G)}) \quad .$$

On sait que $F(G/\Phi(G))$ est abélien ([1]), en particulier $K(G/\Phi(G))$ est de même abélien. Pour cette raison, $K(G/\Phi(G))$ possède un complément ([3]), qui est évidemment abélien.

THÉORÈME 5.3. - Si $K(G)$ est nilpotent, les propositions suivantes sont équivalentes :

1° $\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$.

2° Deux éléments $\alpha \neq \beta$ de $S/\Phi(G)$ induisent sur $K(G/\Phi(G))$ des automorphismes différents.

Démonstration. - (1) $\Longrightarrow$ (2) .

Soit $\overline{\Phi(G)} = \Phi(G)$. Deux éléments $\alpha \neq \beta$ de $S/\Phi(G)$ ne peuvent induire sur $K(G/\Phi(G))$ le même automorphisme : dans le cas contraire $\alpha\beta^{-1}$ serait permutable avec les éléments de $K(G/\Phi(G))$ et de $S/\Phi(G)$, et $\alpha\beta^{-1} \neq \Phi/\Phi$ serait dans le centre de $G/\Phi(G)$, ce qui est contraire à l'hypothèse $Z(G/\Phi) = \Phi(G)/\Phi(G)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) .

Inversement supposons 2° vraie. Si σ est un élément de $Z(G/\Phi(G))$. On a

$$\sigma = \alpha\beta$$

avec :

$$\alpha \in K(\frac{G}{\Phi(G)}) \ , \qquad \beta \in \frac{S}{\Phi(G)} \quad .$$

---

[1] c'est-à-dire que :

$$[\frac{S}{\Phi(G)}\ ,\ K(\frac{G}{\Phi(G)})] = \frac{G}{\Phi(G)}\ , \qquad \frac{S}{\Phi(G)} \cap K(\frac{G}{\Phi(G)}) = \frac{\Phi(G)}{\Phi(G)} \quad .$$

Si α' parcourt $K(G/\Phi(G))$, on aura

$$\sigma\alpha' = \alpha\beta\alpha' = \alpha'\sigma = \alpha'\alpha\beta$$

et, puisque $K(G/\Phi(G))$ est abélien,

$$\alpha\beta\alpha' = \alpha'\alpha\beta = \alpha\alpha'\beta$$

$$\beta\alpha' = \alpha'\beta$$

et β est permutable avec les éléments de $K(G/\Phi(G))$ et de $S/\Phi(G)$; donc β appartient à $Z(G/\Phi(G))$, et l'effet de β sur $K(G/\Phi(G))$ est la permutation identique. Alors l'hypothèse 2° nous assure que $\beta = \Phi(G)/\Phi(G)$. Nous avons ainsi prouvé que

$$\sigma = \alpha \in K(\frac{G}{\Phi(G)})$$

d'où, puisque $K(G/\Phi) \cap Z(G/\Phi) = \Phi/\Phi$, résulte que $\alpha = \sigma = \Phi/\Phi$ et, σ étant arbitraire :

$$Z(G/\Phi(G)) = \Phi(G)/\Phi(G) \quad .$$

D'après la proposition 5.2

$$\overline{\Phi(G)} = \Phi(G) \quad .$$

THÉORÈME 6.3. - <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) $\overline{F(G)} = F(G)$

(2) $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ <u>est abélien élémentaire</u>

(3) $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ <u>est abélien</u>

(4) $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ <u>est nilpotent</u> .

<u>Démonstration</u>. - Il est évident que (2) $\Longrightarrow$ (3) et que (3) $\Longrightarrow$ (4) .

Démontrons que (1) $\Longrightarrow$ (2) .

Soit $\overline{F(G)} = F(G)$. On a

$$\frac{\overline{F(G)}}{\Phi(G)} = \frac{F(G)}{\Phi(G)} \leqslant F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right)$$

et $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est abélien élémentaire.

Il suffit maintenant de prouver que (4) $\Longrightarrow$ (1) . D'après la proposition 3.2, $\overline{F(G)}$ est un sous-groupe distingué de G , par conséquent $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est un sous-groupe distingué de $G/\Phi(G)$. En outre, puisque $\overline{F(G)}/\Phi(G)$ est supposé nilpotent, on a

$$\frac{\overline{F(G)}}{\Phi(G)} \leqslant F\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) = \frac{F(G)}{\Phi(G)}$$

$$\overline{F(G)} \leqslant F(G) \quad .$$

D'autre part $\overline{F(G)}$ contient $F(G)$ (Proposition 2.2).

THÉORÈME 7.3. - $G = \overline{\Phi(G)}$, <u>si (et seulement si)</u> G <u>est nilpotent</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de rappeler que G est nilpotent ([4]), si (et seulement si) $\Phi(G) \geqslant K(G)$, et que $\overline{N} = G$ si (et seulement si) $N \geqslant K(G)$.

THÉORÈME 8.3. - $G = \overline{F(G)}$, <u>si (et seulement si)</u> $\Phi(G) \geqslant K(K(G))$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de rappeler que $K(G) \leqslant F(G)$, si (et seulement si) ([5]) $\Phi(G) \geqslant K(K(G))$.

<u>Remarque</u>. - Les résultats de cet exposé sont pour la plupart contenus dans un mémoire qui vient d'être publié en Italie ([2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (Reinhold). - Nilpotent characteristic subgroups of finite groups, Amer. J. of Math., t. 75, 1953, p. 633-664.

[2] CURZIO (Mario). - Sui trasportatori nei gruppi e nelle algebre di Lie, Ricerche di Mat., t. 10, 1961 (à paraître).

[3] GASCHÜTZ (Wolfgang). - Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, Math. Z., t. 58, 1953, p. 160-170.

[4] HALL (Marshall, Jr). - The theory of groups. - New-York, The Mac-Millan Company, 1959.

[5] HUPPERT (Bertram). - Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Z., t. 60, 1954, p. 409-434.