Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Štefan Schwarz

Sur les caractères des demi-groupes compacts

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1960-1961), exp. nº 23, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A7_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 23

8 mai 1961

SUR LES CARACTÈRES DES DEMI-GROUPES COMPACTS

par Štefan SCHWARZ

Un demi-groupe S est un ensemble dans lequel est définie une opération univoque associative. Si S est en même temps un espace topologique et si la multiplication est continue, on parle d'un demi-groupe topologique. Dans ce qui suit nous nous occuperons seulement de demi-groupes compacts hausdorffiens.

I.

Avant d'introduire les caractères, il est nécessaire de rappeler quelques résultats concernant la structure d'un demi-groupe compact.

Soient S compact et $a \in S$. Construisons le demi-groupe cyclique $A = \{a , a^2 , a^3 , \ldots\}$. La fermeture $\bar{A}$ de A est un demi-groupe contenant un et seulement un idempotent e_α. Nous dirons que a appartient à l'idempotent e_α.

Un demi-groupe compact (et chacun de ses sous-demi-groupes fermés) contient donc toujours au moins un idempotent.

Désignons l'ensemble de tous les éléments appartenant à l'idempotent e_α par P_α. Le demi-groupe S peut être écrit comme réunion de sous-ensembles disjoints :

$$S = \bigcup_{e_\alpha \in E} P_\alpha \quad ,$$

E étant l'ensemble de tous les idempotents de S. Si S est commutatif, P_α est un demi-groupe. Dans ce cas nous appellerons P_α demi-groupe maximal appartenant à e_α.

Pour chaque e_α il existe, en outre, un groupe maximal G_α ayant e_α comme élément-unité. Le groupe G_α est fermé, et on a

$$e_\alpha P_\alpha = P_\alpha e_\alpha = G_\alpha \quad .$$

Dans ce qui suit, nous nous bornerons au cas des demi-groupes commutatifs.

L'ensemble E peut être partiellement ordonné par la définition

$$e_\alpha \leq e_\beta \iff e_\alpha e_\beta = e_\alpha \quad .$$

S étant compact, on peut démontrer qu'il existe toujours dans S un idempotent minimum et un seul. (Dans le cas fini, c'est naturellement le produit de tous les idempotents.)

Un idéal $\mathfrak{I}$ de S est un ensemble vérifiant $\mathfrak{I}S \subset \mathfrak{I}$. $\mathfrak{I}$ est dit premier si $S - \mathfrak{I}$ est un demi-groupe. Il est avantageux de considérer aussi S et l'ensemble vide $\emptyset$ comme des idéaux premiers.

Quelle est la structure d'un idéal premier ? Ce sont les idéaux premiers ouverts qui ont une structure relativement simple. Soit e_α un idempotent quelconque. Considérons tous les idempotents $e_\xi \geq e_\alpha$. Formons la réunion

$$\bigcup_{e_\xi \geq e_\alpha} P_\xi \quad ,$$

P_ξ étant le demi-groupe maximal appartenant à l'idempotent e_ξ . Cette réunion est un demi-groupe fermé et le complément

$$\mathfrak{I} = S - \bigcup_{e_\xi \geq e_\alpha} P_\xi$$

est un idéal premier ouvert. Inversement, on obtient de cette façon chaque idéal premier ouvert différent de S .

II.

Un caractère d'un demi-groupe commutatif S est une fonction continue prenant des valeurs complexes, définie sur S et vérifiant $\chi(ab) = \chi(a)\cdot\chi(b)$ pour chaque paire a , $b \in S$. En définissant la multiplication $\chi_1 \chi_2$ de la manière naturelle, l'ensemble de tous les caractères de S forme un demi-groupe S^* .

Le but de cette conférence est de donner quelques informations concernant la structure de S^* .

Il résulte de l'hypothèse que S est compact, qu'on a nécessairement $|\chi(x)| \leq 1$. Ajoutons aussi que chaque demi-groupe contient au moins deux caractères triviaux : le zéro-caractère χ_0 et le caractère-unité χ_1 .

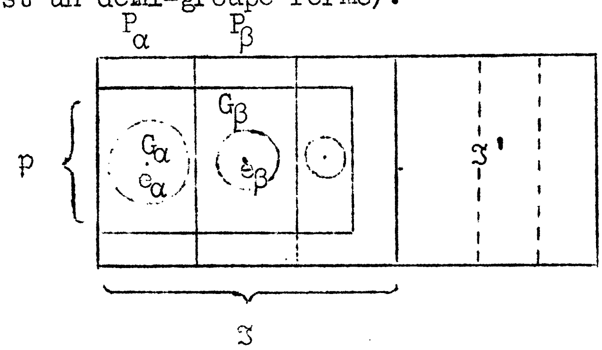
Je remarque tout de suite : il est possible de restreindre la notion de caractère en exigeant pour la valeur absolue $|\chi(x)| = 1$. Dans ce cas, la structure de S^* est simple. Désignons par e_0 l'idempotent minimum de S et par G_0 le groupe maximal appartenant à e_0 . Alors S^* est isomorphe au groupe des caractères du groupe G_0 : $S^* \cong [G_0]^*$.

Pour le reste de la conférence, nous ne supposerons pas $|\chi| = 1$.

Soit χ un caractère fixe et posons :

$$p = \{x | x \in S \ , \ \chi(x) = 0\} \ , \quad \mathfrak{Z} = \{x | x \in S \ , \ |\chi(x)| < 1\} \ ,$$
$$\mathfrak{Z}' = \{x | x \in S \ , \ |\chi(x)| = 1\} \qquad .$$

On peut démontrer : p est un idéal premier fermé, $\mathfrak{Z}$ est un idéal premier ouvert (et $\mathfrak{Z}'$ est un demi-groupe fermé).



Posons, inversement, la question : p étant un idéal premier fermé, existe-t-il un caractère prenant la valeur zéro justement sur p ? Malheureusement, la réponse est, en général, négative. Voilà pourquoi nous introduisons une notion nouvelle : un idéal p premier fermé est dit distingué, s'il existe un caractère χ tel que $p = \{x | x \in S \ , \ \chi(x) = 0\}$.

Si p est un idéal distingué, l'ensemble $\mathfrak{S}_p$ de tous les caractères s'annulant justement sur p est un semi-groupe (c'est-à-dire, dans $\mathfrak{S}_p$, la loi de la simplification a lieu).

La structure globale de S^* peut être décrite maintenant de la façon suivante : S^* est réunion des semi-groupes :

$$S^* = \bigcup_p \mathfrak{S}_p \qquad .$$

Deux de ces semi-groupes sont toujours des groupes : $\mathfrak{S}_S = \{\chi_0\}$ et $\mathfrak{S}_\emptyset$, c'est-à-dire le groupe des caractères avec $|\chi(x)| = 1$ pour tout $x \in S$. Si S est connexe, il n'y a pas d'autres groupes.

Remarquons : Si S est fini, S^* est une réunion de groupes.

Quelle est maintenant la structure détaillée de S^* ? S^* est "un demi-treillis de semi-groupes" au sens de A. H. CLIFFORD, car on prouve facilement

$$\mathfrak{S}_{p_\alpha} \cdot \mathfrak{S}_{p_\beta} \subset \mathfrak{S}_{p_\alpha \cup p_\beta} \qquad .$$

Il est possible de trouver des relations entre ce demi-treillis, le treillis des idéaux premiers ouverts et le demi-treillis des idempotents de S. Mais pour obtenir des résultats plus profonds concernant la structure de S^*, il est nécessaire de faire des hypothèses spéciales.

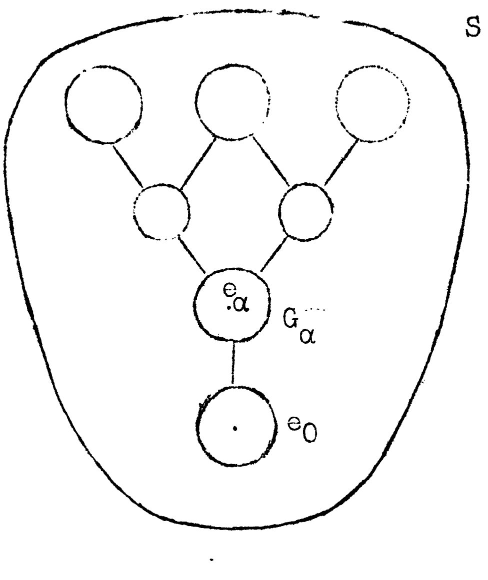
III.

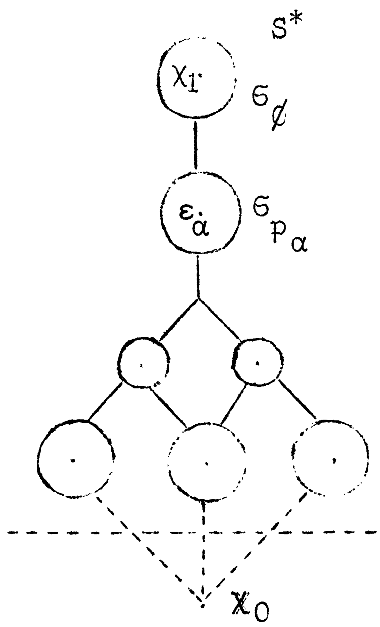
Posons la question de savoir sous quelles conditions $\mathfrak{S}_p$ est un groupe. La réponse est la suivante : $\mathfrak{S}_p$ est un groupe si et seulement si p est un idéal premier à la fois fermé et ouvert (ou ambigu). Si e est l'idempotent minimum de $S - p$ et G_e le groupe maximal appartenant à e, on a $\mathfrak{S}_p \cong [G_e]^*$.

Dans le cas ou tout idéal premier distingué est ambigu, il est possible d'obtenir des résultats tout-à-fait satisfaisants. À cette classe de demi-groupes appartiennent par exemple les demi-groupes finis et les demi-groupes qui sont réunions de groupes.

Nous nous bornerons à ce cas. S^* étant aussi une réunion de groupes, il contient, en général, aussi des idempotents différents de χ_0, χ_1. Désignons l'ensemble de tous les caractères idempotents par $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ peut être partiellement ordonné (de la même manière que E), et on montre que l'ensemble $\mathcal{E} - \{\chi_0\}$ est anti-isomorphe à l'ensemble E_0 des idempotents distingués (c'est-à-dire à l'ensemble des idempotents dont chacun est minimal dans un certain $S - p_\alpha$). Dans les deux cas mentionnés, on a $E \equiv E_0$.

Si dans cet anti-isomorphisme, on a $e_\alpha \in S \leftrightarrow \varepsilon_\alpha \in S^*$, on a aussi $[G_\alpha]^* \cong \mathfrak{S}_{p_\alpha}$, G_α étant le groupe maximal appartenant à e_α.





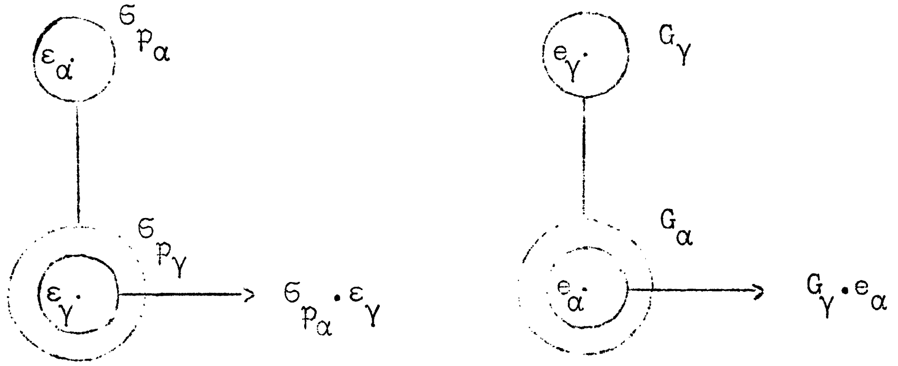
Dans ce cas il est aussi possible d'obtenir des informations plus détaillées sur la structure intérieure de S^*, et de caractériser par exemple le produit $\mathfrak{G}_{p_\alpha} \cdot \mathfrak{G}_{p_\beta}$ au moyen des caractères d'un certain sous-groupe de S.

Soient $\mathfrak{G}_{p_\alpha}$, $\mathfrak{G}_{p_\beta}$ deux groupes contenus dans S^*, ε_α, ε_β leurs éléments-unités. Posons $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. On a

$$\mathfrak{G}_{p_\alpha} \cdot \mathfrak{G}_{p_\beta} = (\mathfrak{G}_{p_\alpha} \varepsilon_\alpha)(\mathfrak{G}_{p_\beta} \varepsilon_\beta) = (\mathfrak{G}_{p_\alpha} \varepsilon_\gamma)(\mathfrak{G}_{p_\beta} \cdot \varepsilon_\gamma) \quad .$$

On démontre facilement que $\mathfrak{G}_{p_\alpha} \varepsilon_\gamma$, $\mathfrak{G}_{p_\beta} \varepsilon_\gamma$ sont des sous-groupes de $\mathfrak{G}_{p_\gamma}$. Alors le produit $\mathfrak{G}_{p_\alpha} \mathfrak{G}_{p_\beta}$ est ramené au produit de deux sous-groupes de $\mathfrak{G}_{p_\gamma}$. En supposant que la structure de $\mathfrak{G}_{p_\gamma}$ soit connue (et c'est possible parce que $\mathfrak{G}_{p_\gamma} \cong [G_\gamma]^*$) nous atteindrons notre but en connaissant la structure de $\mathfrak{G}_{p_\alpha} \cdot \varepsilon_\gamma$. C'est-à-dire : la structure de S^* sera connue si pour chaque paire $\varepsilon_\gamma \leqslant \varepsilon_\alpha$ nous pouvons connaître la structure de $\mathfrak{G}_{p_\alpha} \cdot \varepsilon_\gamma$. Ce problème est résolu par la "loi de réciprocité", qui est exprimée par la formule suivante :

$$\mathfrak{G}_{p_\alpha} \cdot \varepsilon_\gamma \cong [G_\gamma \cdot e_\alpha]^* \quad .$$



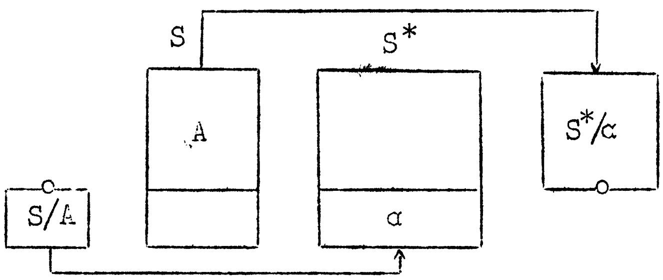
Je ne veux pas entrer dans les détails et je préfère donner quelques autres remarques à ce sujet.

IV.

A. - Intéressante est l'étude des idéaux de S et du demi-groupe des caractères de ceux-ci.

Soit A un idéal fermé quelconque de S. L'ensemble α des caractères de S s'annulant sur A est un idéal de S^*. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le demi-groupe A^* ? On peut montrer que A^* est isomorphe au demi-groupe-différence S^*/α. S^*/α étant le demi-groupe quotient au sens de M. REES.

D'autre part, α est isomorphe au demi-groupe $[S/A]^* - \chi_1^{S/A}$. (Notons que S/A est un demi-groupe compact hausdorffien dans une topologie étroitement liée à celle de S.)



On peut introduire une topologie dans S^* en définissant l'ensemble fondamental des entourages de $\chi_\alpha \in S^*$ comme les ensembles $\{\chi \in S^* , |\chi(x) - \chi_\alpha(x)| < \delta ,$ pour tout $x \in F\}$, F parcourant tous les sous-ensembles compacts de S et δ étant un nombre positif. Dans cette topologie, α est fermé et $\alpha \cong [S/A]^* - \chi_1^{S/A}$ est un isomorphisme topologique.

B. - J'ai déjà remarqué qu'il existe des correspondances de Galois entre quelques sous-ensembles de S et de S^* (les ensembles étant partiellement ordonnés par l'inclusion).

Pour fixer les idées, considérons le cas fini. Un idéal A est dit <u>semi-premier</u>, si $x^\rho \in A$ entraîne $x \in A$. Tous les idéaux de S^* sont semi-premiers, mais ce n'est pas vrai pour les idéaux de S.

Si A est un idéal de S, soit $\varphi(A) = \{\chi | \chi \in S^* , \chi(A) = 0\}$. Si $\alpha \neq S^*$ est un idéal de S^*, soit $\psi(\alpha) = \{x | x \in S , \chi(x) = 0 , \chi \in \alpha\}$. $\psi(\alpha)$ est un idéal de S. On a toujours $\psi[\varphi(A)] \supset A$ strictement et $\varphi[\psi(\alpha)] = \alpha$. La correspondance $A \to \varphi(A)$ est biunivoque si et seulement si A est semi-premier.

On a le théorème suivant :

Le treillis des idéaux semi-premiers (S inclus) et le treillis de tous les idéaux de S^* sont anti-isomorphes.

Un autre théorème de ce genre est :

Le treillis de tous les idéaux premiers de S ($\emptyset$ et S inclus) et le treillis des idéaux principaux de S^* (χ_0 et S^* inclus) sont anti-isomorphes.

C. - Une autre question : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que S ait un nombre suffisant de caractères (c'est-à-dire, pour chaque paire $a \neq b$, il existe un χ tel que $\chi(a) \neq \chi(b)$; brièvement : on peut séparer les éléments au moyen des caractères).

Dans le cas fini, c'est le cas si et seulement si S est une réunion de groupes.

MM. HEWITT et ZUCKERMAN ont considéré les caractères χ sur un demi-groupe commutatif arbitraire définis comme des fonctions multiplicatives, bornées. Ils ont démontré qu'on peut séparer les éléments appartenant à S au moyen des caractères ainsi définis si et seulement si $x^2 = xy = y^2$ entraîne $x = y$ pour chaque paire $x , y \in S$. C'est un théorème très important pour l'analyse harmonique sur les demi-groupes qui a été commencée par MM. HEWITT et ZUCKERMAN.

Ajoutons que, dans le cas des demi-groupes de torsion, l'implication

$$x^2 = xy = y^2 \implies x = y$$

est équivalente à la condition que S soit une réunion de groupes. Mais même dans le cas compact, il ne découle pas de cette condition, en général, que S est une réunion de groupes.

D. - Soient S un demi-groupe et $\hat{S}$ l'ensemble des caractères sauf χ_0 : $\hat{S} = S^* - \{\chi_0\}$. $\hat{S}$ n'est pas nécessairement un demi-groupe, mais si S contient l'élément unité, $\hat{S}$ est un demi-groupe.

Si S est un groupe compact, on a $\hat{\hat{S}} \cong S$.

Si S est fini et contient l'élément-unité, $\hat{\hat{S}} \cong S$ si et seulement si S est une réunion de groupes.

Si S est un groupe fini, $\hat{S} \cong S$.

Mais si S est fini, contient l'élément-unité, et si, en outre, S est réunion de groupes, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $\hat{S} \simeq S$ sont inconnues. (Le nombre des éléments de S , $\hat{S}$, $\hat{\hat{S}}$ est le même. Mais il n'est pas suffisant que le treillis des idempotents soit isomorphe avec le treillis inversé.)

E. - Un problème, qui n'est pas sans intérêt, est d'étudier le demi-groupe S^* pour des demi-groupes particuliers. Par exemple, j'ai étudié avec B. PARIZEK, il y a quelques mois le demi-groupe des classes résiduelles modulo un nombre composé $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ce problème a été résolu aussi par MM. HEWITT et ZUCKERMAN. Ces travaux viennent de paraître.

La formulation du problème est simple, mais la résolution elle-même n'est en aucun cas triviale. On peut démontrer par exemple que le nombre des caractères distincts est

$$\prod_{i=1}^{r} (1 + p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$$

et il est possible de donner une construction explicite de tous les caractères. Les caractères du groupe de classes résiduelles premières à m sont naturellement inclus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - Finite dimensional convolution algebras, Acta Math., t. 93, 1955, p. 67-119.

[2] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - The ℓ-algebra of a commutative semigroup, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 70-97.

[3] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - The multiplicative semigroup of integers modulo m , Pacific J. of Math., t. 10, 1960, p. 1291-1308.

[4] SCHWARZ (Štefan). - Théorie des caractères des demi-groupes commutatifs [en russe], Czechoslovak math. J., t. 4, 1954, p. 219-247.

[5] SCHWARZ (Štefan). - Les caractères des demi-groupes comme fonctions des classes [en russe], Czechoslovak math. J., t. 4, 1954, p. 291-294.

[6] SCHWARZ (Štefan). - Sur une correspondance de Galois dans la théorie des caractères des demi-groupes [en russe], Czechoslovak math. J., t. 4, 1954, p. 296-313.

[7] SCHWARZ (Štefan). - Les caractères des demi-groupes compacts [en russe], Czechoslovak math. J., t. 5, 1955, p. 24-28.

[8] SCHWARZ (Štefan). - The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups, Czechoslovak math. J., t. 6, 1956, p. 330-364.

[9] SCHWARZ (Š.) et PARIZEK (B.). - Le demi-groupe des classes résiduelles modulo m [en tchèque], Mat.-fyz. Časopis, t. 8, 1958, p. 136-150.

[10] SCHWARZ (Š.) and PARIZEK (B.). - Semicharacters of the multiplicative semigroup of integers mod m , Mat.-fyz. Časopis, t. 11, 1961, p. 63-74.