Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Antonio Almeida Costa

Sur la théorie générale des demi-anneaux, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1960-1961), exp. n° 25, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_2_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 25

15 mai 1961

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES DEMI-ANNEAUX, II.

par Antonio ALMEIDA COSTA

DEMI-ANNEAUX RÉTICULÉS. DEMI-ANNEAUX $\mathfrak{S}$.
μ-SYSTÈMES ET π-SYSTÈMES D'IDÉAUX. μ-DEMI-ANNEAUX.

1. Demi-anneaux réticulés.

Un demi-anneau $\mathfrak{S}$ est dit réticulé, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\mathfrak{S}$ est un treillis ;

(ii) en désignant par $\vee$ et $\wedge$ les opérations du treillis, et par $\leqq$ la relation d'ordre (partiel) correspondante, on a

$$x + y = x \vee y \ ; \qquad xy \leqq x \wedge y \quad .$$

EXEMPLE. - Le demi-anneau des idéaux d'un demi-anneau quelconque.

On sait qu'un idéal du treillis peut être caractérisé des deux façons suivantes :

1° Comme l'ensemble des éléments qui, avec a et b , contient $a \vee b$, ainsi que $x \wedge a$, quel que soit x appartenant au treillis ;

2° comme l'ensemble des éléments qui, avec a et b , contient $a \vee b$, ainsi que chaque $x \leqq a$. On voit que [3] :

(i') Si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau réticulé, tout idéal du treillis correspondant est un idéal de $\mathfrak{S}$. On dit qu'il s'agit d'un idéal réticulé de $\mathfrak{S}$.

(ii') Si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau réticulé, et si l'on a $x \leqq y$, on a aussi $ax \leqq ay$, $xa \leqq xy$ [par exemple : $x \vee y = y$, $a(x + y) = ay = ax + ay$, $ax \vee ay = ay$, $ax \leqq ay$].

(iii') $ax \leqq a$, $xa \leqq a$.

2. Idéaux réticulés premiers et semi-premiers.

Dans les raisonnements qui vont suivre il sera question, en général, d'idéaux réticulés. C'est pour eux qu'on peut établir des résultats semblables à ceux de la théorie des anneaux associatifs, [4], [5] et [6].

THÉORÈME 1. - Un idéal réticulé est premier, si et seulement s'il est complètement premier. Nous savons qu'un idéal complètement premier est premier. Réciproquement, si g est premier, supposons $ab \in g$. Alors, on va montrer qu'on a aussi $(a)(b) \subseteq g$. En fait, un élément de $(a)(b)$ est une somme de produits de la forme

$$\sum (na + ar + sa + paq) . \sum (n'b + br' + s'b + p'bq') \quad .$$

Etudions, par exemple, le terme $paq.p'bq'$ de ce produit. On a

$$paq.p'bq' \leqq paq.p'b \leqq aqp'b \leqq ap'b \leqq ab \quad .$$

Comme g est réticulé, on en conclut $paq.p'bq' \in g$. Tous les termes appartiennent à g, donc $(a)(b) \subseteq g$. Ce dernier est premier, par conséquent $(a) \subseteq g$ ou $(b) \subseteq g$. Alors, ou $a \in g$ ou bien $b \in g$.

THÉORÈME 2. - Un idéal réticulé est semi-premier, si et seulement s'il est complètement semi-premier.

Afin de rattacher aux considérations précédentes la caractérisation du seul idéal semi-premier minimal appartenant à un idéal réticulé, on doit commencer par ce

LEMME. - Si α est un idéal réticulé et si $v^\rho \in \alpha$, alors $(v)^\rho \subseteq \alpha$. En fait, les éléments de $(v)^\rho$ sont des sommes d'éléments dans chacune desquelles figurent des produits qui contiennent ρ fois l'élément v. Par conséquent, le lemme est valable.

THÉORÈME 3. - Si α est réticulé, pour que $v \in B(\alpha)$, il faut et il suffit qu'on ait $v^\rho \in \alpha$.

La condition est nécessaire. - En supposant $v \in B(\alpha)$, le p-système de la forme $\{v, v^2, v^3, \dots\}$ contient un élément de α ; donc $v^\rho \in \alpha$, pour un certain ρ.

La condition est suffisante. - Si $v^\rho \in \alpha$, alors $(v)^\rho \subseteq \alpha$, donc $(v)^\rho \subseteq B(\alpha)$, c'est-à-dire $(v) \subseteq B(\alpha)$, $v \in B(\alpha)$.

COROLLAIRE 1. - Le radical $B(\alpha)$ de l'idéal réticulé α est un idéal réticulé. Prenons $v \in B(\alpha)$, et supposons $x \leqq v$. On a $x^2 \leqq v^2, \dots, x^\rho \leqq v^\rho$. Si $v^\rho \in \alpha$, on a aussi $x^\rho \in \alpha$, c'est-à-dire $x \in B(\alpha)$. On peut ajouter que $B(\alpha)$ est complètement demi-premier.

3. Eléments et idéaux d'un demi-anneau réticulé en relation avec un idéal réticulé.

Dans un demi-anneau réticulé $\mathfrak{S}$, on dit que $(\mathfrak{a} : b)_d$ est le quotient à droite d'un idéal réticulé $\mathfrak{a}$ par un élément $b \in \mathfrak{S}$, s'il se compose de tous les éléments $x \in \mathfrak{S}$ pour lesquels $xb \in \mathfrak{a}$ [on vérifie que $xs \in (\mathfrak{a} : b)_d$, si $s \in \mathfrak{S}$ et $x \in (\mathfrak{a} : b)_d$, compte tenu de la relation $xsb \leqq xb$]. On définit aussi le quotient à droite $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_d$, d'un idéal $\mathfrak{a}$ par un autre idéal $\mathfrak{b}$, comme l'ensemble des éléments $x \in \mathfrak{S}$ pour lesquels $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

Un élément b est en relation avec notre idéal réticulé $\mathfrak{a}$, si on a $(\mathfrak{a} : b)_d \supset \mathfrak{a}$; autrement, si $(\mathfrak{a} : b)_d = \mathfrak{a}$, alors b n'est pas en relation avec $\mathfrak{a}$. Un idéal $\mathfrak{b}$ est en relation avec $\mathfrak{a}$ par éléments, s'il est un ensemble d'éléments en relation avec $\mathfrak{a}$. Nous dirons simplement "idéal en relation avec $\mathfrak{a}$ ", en supprimant les mots "par éléments".

$\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}$ désigneront, respectivement, l'ensemble des éléments en relation et l'ensemble des éléments qui ne sont pas en relation avec $\mathfrak{a}$. On peut affirmer ce qui va suivre :

(i) Si $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$, on a $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}'$.

(ii) $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont des systèmes multiplicatifs.

(iii) Si $ab \in \mathfrak{M}$, alors $a \in \mathfrak{M}$ et $b \in \mathfrak{M}$.

(iv) Si $ab \in \mathfrak{M}'$, alors $a \in \mathfrak{M}'$ ou $b \in \mathfrak{M}'$.

(v) En supposant $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}'$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est complètement premier.

(vi) En supposant $\mathfrak{a} \neq \Phi$, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}$ si et seulement si $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$.

(vii) La relation $(\mathfrak{a} : b)_d = (\mathfrak{a} : (b))_d$ est valable. Le quotient est aussi un idéal réticulé.

(viii) Si b est en relation avec $\mathfrak{a}$, (b) est aussi en relation avec $\mathfrak{a}$. De cette façon, $\mathfrak{M}'$ contient les idéaux engendrés par ses éléments.

(ix) Si $a \in \mathfrak{M}'$, pour chaque $x \leqq a$, on a aussi $x \in \mathfrak{M}'$.

Nous nous bornerons à analyser l'affirmation (v). Si on suppose $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$, nous commençons par admettre qu'on a aussi $\mathfrak{a} \neq \Phi$. Alors, si $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}'$, nous allons reconnaître que $\mathfrak{a}$ est complètement premier. De $yx \in \mathfrak{a}$, si $y \notin \mathfrak{a}$ on tire $(\mathfrak{a} : x)_d \supset \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $x \in \mathfrak{M}'$, par conséquent $x \in \mathfrak{a}$. Dans le cas $\mathfrak{a} = \Phi$

et $\mathfrak{M}' = \Phi$, $\alpha = \mathfrak{M}'$, et on considère Φ complètement premier. Réciproquement, si $\alpha \neq \sigma$ est complètement premier, supposons $\alpha \neq \Phi$. On a toujours $\alpha \subseteq \mathfrak{M}'$. Maintenant, si on prend $x \in \mathfrak{M}'$, alors $(\alpha : x)_d \supset \alpha$; donc il existe $y \notin \alpha$ tel que $yx \in \alpha$. On en conclut $x \in \alpha$ et $\alpha = \mathfrak{M}'$.

Prenons un idéal réticulé α . Si un idéal g a les deux propriétés suivantes : 1° il est en relation avec α ; 2° un idéal $g \supset g$ n'est pas en relation avec α ; alors g est dit <u>idéal maximal appartenant à</u> α . Il s'agit d'un idéal qui est maximal dans l'ensemble des idéaux en relation avec α .

L'existence de tels idéaux peut être assurée par une des deux méthodes suivantes. On considère l'idéal α et l'ensemble $\mathfrak{M}$ des éléments qui ne sont pas en relation avec α . Un idéal maximal g qui contient α et n'a aucun élément dans $\mathfrak{M}$ est idéal maximal appartenant à α . Comme deuxième façon, on prend l'ensemble des idéaux en relation avec α . Cet ensemble est inductif, donc contient des idéaux maximaux g .

Chaque idéal g est premier, car si $bc \subseteq g$, avec $b \nsubseteq g$, $c \nsubseteq g$, les deux idéaux (g , b) et (g , c) contiendraient des éléments non en relation avec α , par exemple x et y , respectivement. On aurait $xy \in g$ et en même temps $(\alpha : xy)_d = \alpha$. Il y a une contradiction.

On peut affirmer que tout idéal maximal appartenant à α contient nécessairement ce dernier idéal ; il suffit de remarquer que du fait que la somme est commutative on conclut que la somme (g , α) est un idéal en relation avec α . On donnera l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $\alpha \neq \sigma$ <u>est un idéal réticulé d'un demi-anneau réticulé, il existe des idéaux maximaux</u> g <u>appartenant à</u> α . <u>Chacun d'eux est premier, contient</u> α <u>et est un idéal réticulé</u>. En ce qui concerne la dernière partie de l'énoncé, nous considérons un idéal $b \in \mathcal{B}$ = ensemble des idéaux en relation avec α . On obtient un idéal $b' \in \mathcal{B}$, en prenant l'ensemble des éléments $x \leqq b$, où b est un élément quelconque de b . Si g est maximal dans $\mathcal{B}$, g est déjà un idéal réticulé.

REMARQUES.

1° Dans le cas $\alpha = \Phi$, on a $g = \Phi$.

2° Tout idéal b en relation avec α est contenu dans un idéal maximal appartenant à α .

5. Composantes isolées.

La notion de composante isolée a surtout un intérêt dans deux cas particuliers dont nous nous occuperons plus loin. Dans ce paragraphe, il s'agit de la définition générale. Soit α un idéal réticulé, et prenons un m-système M. La composante isolée de α, définie par M, est l'idéal α_M, ensemble réunion de α et des éléments b pour lesquels il existe effectivement $m \in M$ tel que $bm \in \alpha$.

α_M est un idéal réticulé. Il y a trois hypothèses particulières pour lesquelles on le reconnaît immédiatement :

1° si $M = \Phi$, on a $\alpha_M = \alpha$;

2° si $\alpha = \Phi$, on a aussi $\alpha_M = \alpha$;

3° si $M = 6$ et $\alpha \neq \Phi$, on a $\alpha_M = 6$.

En supposant maintenant $\alpha \neq \Phi$, $\Phi \neq M \neq 6$, l'existence d'éléments b est assurée. Si b_1, $b_2 \in \alpha_M$, soient m_1, $m_2 \in M$ tels que $b_1 m_1 \in \alpha$, $b_2 m_2 \in \alpha$. Posons $m_3 = m_1 \vee m_2 \in M$. Alors, $(b_1 + b_2)\, m_3 = b_1 m_3 + b_2 m_3 \leqq b_1 m_1 + b_2 m_2 \in \alpha$. D'autre part, si $x \leqq b_1$, $xm_2 \leqq b_1 m_1 \in \alpha$ et $x \in \alpha_M$. D'où

THÉORÈME 1. – La composante isolée définie par le m-système M et relative à l'idéal réticulé α est un idéal réticulé α_M.

REMARQUES.

1° Le fait que α est réticulé a eu un rôle pour établir que α_M est un idéal.

2° En supposant $M \neq \Phi$, la définition de α_M peut être donnée comme ensemble des éléments b.

6. Composantes principales.

Prenons pour m-système le complémentaire $C(g)$ d'un idéal maximal g appartenant à α. La composante isolée correspondante est représentée par $\alpha(g)$, et reçoit le nom de composante principale. Nous nous bornons au théorème que voici :

THÉORÈME 1. – L'idéal réticulé α est intersection de toutes ses composantes principales. La relation $\alpha = \bigcap \alpha(g)$, dont on représente le deuxième membre par Δ, sera démontrée si, pour chaque $a \in \Delta$, on a aussi $a \in \alpha$. S'il y a un $g = 6$ ou si $\alpha = \Phi$, le théorème est trivial. S'il n'en n'est pas ainsi, soit $a \in \Delta$. On aura $a \in \alpha(g)$, quel que soit g. En choisissant g, il existe

$c \in \mathfrak{C}\ (\mathfrak{g})$ tel que $ac \in \alpha$, ce qui entraîne $c \in (\alpha : a)_e$, en définissant ce dernier comme l'ensemble des $x \in \mathfrak{G}$ tels que $ax \in \alpha$. L'idéal $(\alpha : a)_e$ n'est contenu dans aucun $\mathfrak{g}$ et de cette sorte il ne peut pas être en relation avec α. En prenant $x \in (\alpha : a)_e$, avec $(\alpha : x)_d = \alpha$, on a $ax \in \alpha$, $a \in (\alpha : x)_d = \alpha$. On arrive à $\Delta \subseteq \alpha$, donc au théorème.

7. Idéaux primaux.

Prenons un idéal réticulé $\alpha \neq \mathfrak{G}$, et soit $c_1 \in \mathfrak{G}$ un élément tel que $c_1 + b \in \mathfrak{M}'$, pour tout $b \in \mathfrak{M}'$. L'ensemble des éléments tels que c_1 constitue un idéal $\mathfrak{d}$, car $(c_1 + c_2) + b = c_1 + (c_2 + b) \in \mathfrak{M}'$, si c_2 est un élément c_1 ; et d'autre côté, par exemple, on a $c_1\,t + b = c_1\,t \vee b \leqq c_1 + b \in \mathfrak{M}'$. Alors la propriété (ix), n° 3, montre que $c_1\,t + b \in \mathfrak{M}'$. L'idéal $\mathfrak{d}$ reçoit la désignation <u>d'idéal adjoint</u> de α. Il s'agit d'un idéal réticulé, puisque, si $x \preceq c$ et $c + b \in \mathfrak{M}'$, on a aussi $x + b \in \mathfrak{M}'$ et $x \in \mathfrak{d}$.

Si $\mathfrak{g}$ est un idéal maximal appartenant à α, l'idéal $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ est en relation avec α, donc $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{g}$. Réciproquement, si $v \in \mathfrak{G}$ est un élément qui appartient à tous les idéaux maximaux appartenant à α, en prenant $b \in \mathfrak{M}'$, comme $(b) \subseteq \mathfrak{M}'$, on aura $(b) \subseteq \mathfrak{g}'$, où $\mathfrak{g}'$ est aussi un idéal maximal appartenant à α ; donc $v + b \in \mathfrak{M}'$, c'est-à-dire $v \in \mathfrak{d}$. Ainsi :

THÉORÈME 1. - <u>L'idéal adjoint de l'idéal réticulé</u> α <u>est un idéal réticulé égal à l'intersection de tous les idéaux maximaux appartenant à</u> α.

L'idéal réticulé α est dit <u>primal</u>, si $\mathfrak{d} = \mathfrak{M}'$. Alors on a

THÉORÈME 2. - <u>Pour que l'idéal réticulé</u> α <u>soit primal, il faut et il suffit que</u> $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$ <u>entraîne</u> $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$. Ou encore : <u>que</u> $\mathfrak{M}'$ <u>soit un idéal</u>. Si α est primal $\mathfrak{M}'$ est un idéal et $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$ entraîne $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$. Réciproquement, si $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$ entraîne $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$, les éléments de $\mathfrak{M}'$ ont la propriété des éléments de $\mathfrak{d}$. On aura $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{d}$. Comme d'autre part $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{M}'$, il en résulte l'égalité.

REMARQUES.

1. On a toujours $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{M}'$ parce que l'hypothèse $x \in \mathfrak{M}'$ entraîne $y \in \mathfrak{M}'$, si $y \preceq x$.

2. L'idéal vide et l'idéal impropre $\mathfrak{G}$, pour lesquels $\mathfrak{M}' = \Phi$, sont des idéaux primaux avec l'adjoint Φ.

8. Composantes isolées primales.

Il s'agit dans ce numéro de certaines composantes isolées, en étroite relation avec les idéaux premiers minimaux appartenant à un idéal réticulé α .

α étant donné, prenons un idéal premier minimal p_0 appartenant à α . Nous savons que $\alpha_{C(p_0)} = \Delta_0$ se compose de tous les éléments $x \in G$ pour lesquels il existe $c \in C(p_0)$ tel que $xc \in \alpha$.

THÉORÈME 1. - Γ'idéal réticulé Δ_0 est primal et a l'adjoint p_0 . Tout à l'heure on montrera que les éléments d'un m-système M ne sont pas en relation avec la composante isolée α_M . Alors, les éléments de $C(p_0)$ ne sont pas en relation avec Δ_0 . Si g est un idéal maximal appartenant à Δ_0 , on aura $g \subseteq p_0$. Il en résulte $\alpha \subseteq \alpha_{C(p_0)} \subseteq g \subseteq p_0$, donc $g = p_0$. On voit de cette façon, que p_0 est un idéal réticulé et le seul idéal premier maximal appartenant à Δ_0 . On retrouve un cas pour lequel l'ensemble $\mathfrak{M}'$ correspondant se réduit à un idéal.

L'idéal $\alpha_{C(p_0)}$ prend le nom de composante isolée primale de l'idéal α .

REMARQUE. - Il s'agit de montrer que les éléments de M ne sont pas en relation avec α_M . On doit arriver à la relation $(\alpha_M : m)_d = \alpha_M$, pour tout $m \in M$. Si $x \in (\alpha_M : m)_d$, on a $xm \in \alpha_M$, donc il existe $m' \in M$ tel que $xmm' \in \alpha$. En supposant $y \in G$ tel que $mym' \in M$, alors $xmym' \preceq xmm'$, donc $xmym' \in \alpha$ et $x \in \alpha_M$.

9. Idéaux primaires.

La définition suivante est très commode. Un idéal réticulé $\mathfrak{s}$ est dit primaire, si et seulement si, en supposant α et $\mathfrak{b}$ deux idéaux, les relations $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{s}$, $\alpha \nsubseteq \mathfrak{s}$ entraînent $\mathfrak{b} \subseteq B(\mathfrak{s})$. On a :

THÉORÈME 1. - Pour que l'idéal réticulé $\mathfrak{s}$ soit primaire, il faut et il suffit que les relations $ab \in \mathfrak{s}$, $a \notin \mathfrak{s}$ entraînent $b \in B(\mathfrak{s})$.

La condition est nécessaire : Prenons un idéal primaire $\mathfrak{s}$, de radical $B(\mathfrak{s})$. Si $ab \in \mathfrak{s}$, nous savons que $(a)(b) \subseteq \mathfrak{s}$. Alors, l'hypothèse $a \notin \mathfrak{s}$ entraîne $(b) \subseteq B(\mathfrak{s})$, donc $b \in B(\mathfrak{s})$.

La condition est suffisante : En supposant que $\mathfrak{s}$ jouit de la propriété de l'énoncé, prenons $\alpha\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{s}$, avec $\alpha \nsubseteq \mathfrak{s}$. Si $a \in \alpha$, $a \notin \mathfrak{s}$, on a, quel que soit b , $ab \in \mathfrak{s}$, donc $b \in B(\mathfrak{s})$ et $\mathfrak{b} \subseteq B(\mathfrak{s})$.

COROLLAIRE 1. - Pour que l'idéal réticulé $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{S}$ soit primaire, il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit primal et que son adjoint soit le radical $B(\mathfrak{s})$.

La condition est nécessaire : Le théorème montre que $\mathfrak{M}' \subseteq B(\mathfrak{s})$, si $\mathfrak{M}'$ est l'ensemble des éléments en relation avec $\mathfrak{s}$. D'autre part, on a $B(\mathfrak{s}) \subseteq \mathfrak{M}'$, donc $B(\mathfrak{s}) = \mathfrak{M}'$. L'idéal $\mathfrak{s}$ est primal et son adjoint est $B(\mathfrak{s})$.

La condition est suffisante : Si $\mathfrak{s}$ est primal et a l'adjoint $B(\mathfrak{s})$, on a, par définition, $B(\mathfrak{s}) = \mathfrak{M}'$. Alors, de $ab \in \mathfrak{s}$, avec $a \notin \mathfrak{s}$, on tire $a \in (\mathfrak{s} : b)_d \supset \mathfrak{s}$, donc $b \in \mathfrak{M}'$, c'est-à-dire $b \in B(\mathfrak{s})$.

REMARQUES.

1. A l'égard de la définition, $\mathfrak{S}$ et Φ doivent être considérés comme des idéaux primaires.

2. Pour que $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{S}$ soit primaire, il faut et il suffit qu'il y ait un seul idéal complètement premier maximal appartenant à $\mathfrak{s}$ lequel doit être le seul idéal complètement premier minimal appartenant à $\mathfrak{s}$.

10. Le demi-anneau $\overline{\mathfrak{S}}$.

L'ensemble des idéaux d'un demi-anneau quelconque $\mathfrak{S}$, avec exclusion de l'idéal vide, constitue un semi-anneau $\overline{\mathfrak{S}} = \{\mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \dots , \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \dots\}$. $\overline{\mathfrak{S}}$ est trivialement un demi-anneau réticulé.

Si $\overline{\mathfrak{a}}$ est un idéal de $\overline{\mathfrak{S}}$, on obtient un idéal $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, qu'on appelle idéal support de $\overline{\mathfrak{a}}$, en considérant l'union de tous les éléments de $\mathfrak{S}$ qui sont contenus dans les idéaux qui composent $\overline{\mathfrak{a}}$. Ainsi, tout idéal de $\overline{\mathfrak{S}}$ est un ensemble de sous-idéaux d'un idéal de $\mathfrak{S}$. Des exemples importants d'idéaux de $\overline{\mathfrak{S}}$ sont donnés par les idéaux $\overline{\mathfrak{a}}_0$, exactement formés par tous les sous-idéaux de son support $\mathfrak{a}$. L'idéal $\overline{\mathfrak{a}}_0$ est réticulé et reçoit le nom d'idéal principal (ou complet).

On voit tout de suite qu'il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux de $\mathfrak{S}$ et les idéaux principaux de $\overline{\mathfrak{S}}$. A ce sujet, nous fixerons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - On a $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$, si et seulement si $\overline{\mathfrak{a}}_0 \overline{\mathfrak{b}}_0 \subseteq \overline{\mathfrak{c}}_0$.

La condition est nécessaire : En supposant $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$, prenons $z \in \overline{\mathfrak{a}}_0 \overline{\mathfrak{b}}_0$. On aura $z = \sum \mathfrak{x}' \mathfrak{y}'$, avec $\mathfrak{x}' \in \overline{\mathfrak{a}}_0$, $\mathfrak{y}' \in \overline{\mathfrak{b}}_0$. Alors $\mathfrak{x}' \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{y}' \subseteq \mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{x}' \mathfrak{y}' \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, ce qui entraîne $z \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$; par conséquent $z \subseteq \mathfrak{c}$, $z \in \overline{\mathfrak{c}}_0$.

La condition est suffisante : Si $\bar{\alpha}_0 \bar{b}_0 \subseteq \bar{c}_0$, alors, comme $\alpha \in \bar{\alpha}_0$, $b \in \bar{b}_0$, on aura $\alpha b \in \bar{\alpha}_0 \bar{b}_0$, donc $\alpha b \in \bar{c}_0$, $\alpha b \subseteq c$.

THÉORÈME 2. – Pour que p soit premier dans $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que $\bar{p}_0$ soit premier dans $\bar{\mathfrak{S}}$.

La condition est nécessaire : Si on suppose p premier, prenons $\overline{\alpha b} \subseteq \bar{p}_0$. Un élément $z \in \alpha b$ peut s'écrire $z = \sum x'y'$, avec $x' \in \mathfrak{x}' \in \bar{\alpha}$, $y' \in \mathfrak{y}' \in \bar{b}$. On voit que $z \in \sum \mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \in \overline{\alpha b}$, c'est-à-dire $z \in \sum \mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \in \bar{p}_0$. On arrive à $z \in p$, donc à $\alpha b \subseteq p$. Comme p est premier, on en tire $\alpha \subseteq p$ ou $b \subseteq p$, par conséquent ou $\bar{\alpha} \subseteq \bar{p}_0$ ou $\bar{b} \subseteq \bar{p}_0$.

La condition est suffisante : En supposant $\bar{p}_0$ premier, il s'agit de montrer que p est premier. Soit $\alpha b \subseteq p$ et considérons deux idéaux $\bar{\alpha}$ et $\bar{b}$, de supports α et b, respectivement. Nous commençons par montrer que $\overline{\alpha b} \subseteq \bar{p}_0$. Prenons $z \in \overline{\alpha b}$, c'est-à-dire $z = \sum \mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$, avec $\mathfrak{x}' \in \bar{\alpha}$, $\mathfrak{y}' \in \bar{b}$, ce qui entraîne $\mathfrak{x}' \subseteq \alpha$, $\mathfrak{y}' \subseteq b$, $\sum \mathfrak{x}'\mathfrak{y}' = z \subseteq \alpha b$. On voit que $z \subseteq p$, donc $z \in \bar{p}_0$, d'où $\overline{\alpha b} \subseteq \bar{p}_0$. De cette sorte on a $\bar{\alpha} \subseteq \bar{p}_0$ et $\alpha \subseteq p$; ou $\bar{b} \subseteq \bar{p}_0$ et $b \subseteq p$.

11. Les m-systèmes et les p-systèmes dans le demi-anneau $\bar{\mathfrak{S}}$.

On dit qu'un système $\mathfrak{M}$ d'idéaux dans $\mathfrak{S}$ forme un μ-système [1], si, en prenant α, $b \in \mathfrak{M}$, il existe $\mathfrak{x}$ (idéal dans $\mathfrak{S}$) tel que $\alpha\mathfrak{x}b \in \mathfrak{M}$. Un μ-système est, par rapport à $\bar{\mathfrak{S}}$, un m-système d'éléments. Réciproquement, un m-système d'éléments de $\bar{\mathfrak{S}}$ constitue un μ-système d'idéaux de $\mathfrak{S}$.

On définit aussi les π-systèmes d'idéaux de $\mathfrak{S}$. Un π-système est un ensemble $\mathfrak{P}$ d'idéaux tel que, en supposant $\alpha \in \mathfrak{P}$, il existe idéal g, dans $\mathfrak{S}$, tel que $\alpha g \alpha \in \mathfrak{P}$. Un π-système est, par rapport à $\bar{\mathfrak{S}}$, un p-système d'éléments. On peut dire :

THÉORÈME 1. – Pour que $\mathfrak{x}$ soit un idéal premier, il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire des idéaux contenus dans p soit un μ-système.

En fait, cette affirmation est exactement la même que celle-ci : Pour que $\bar{p}_0$ soit un idéal premier, il faut et il suffit que $C(\bar{p}_0)$ soit un m-système. De façon analogue :

THÉORÈME 2. - Pour que $\mathfrak{x}$ soit un idéal semi-premier, il faut et il suffit que l'ensemble complémentaire des idéaux contenus dans $\mathfrak{x}$ soit un π-système.

12. μ-Demi-anneaux.

On dit qu'un demi-anneau vérifie la μ-condition, s'il a la propriété suivante ([2] et [6]) : En prenant un μ-système d'idéaux, et en considérant une famille $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in L}$ d'idéaux, l'hypothèse que la famille est totalement ordonnée par la relation d'inclusion et que chaque α_λ n'a aucun sous-idéal dans le μ-système entraîne pour l'idéal $\alpha = \bigcup \alpha_\lambda$ la propriété de n'avoir aucun sous-idéal appartenant au μ-système.

Un demi-anneau vérifiant la μ-condition est appelé μ-demi-anneau. On exprime par rapport à $\mathfrak{S}$ la μ-condition, en disant : Si $\{(\overline{\alpha}_\lambda)_0\}_{\lambda\in L}$ est une famille totalement ordonnée d'idéaux principaux et si aucun des $(\overline{\alpha}_\lambda)_0$ n'a d'éléments dans un m-système de $\mathfrak{S}$, il en est de même pour l'idéal $(\overline{\bigcup \alpha_\lambda})_0$.

On introduit de façon analogue une π-condition et un π-demi-anneau. Les deux théroèmes qui vont suivre sont valables [6] :

THÉORÈME 1. - Tout π-demi-anneau est un μ-demi-anneau et réciproquement. En fait, la π-condition entraîne la μ-condition, car tout μ-système est un π-système. Réciproquement, si la μ-condition a lieu, prenons un p-système d'éléments de $\mathfrak{S}$ et une famille $\{(\overline{\alpha}_\lambda)_0\}$, totalement ordonnée par inclusion, de telle façon qu'aucun $(\overline{\alpha}_\lambda)_0$ n'ait d'élément dans le p-système ; alors $(\overline{\bigcup \alpha_\lambda})_0$ n'a aucun élément dans le même p-système, car cela a lieu pour chaque m-système dont il est la réunion.

THÉORÈME 2 (Mlle Galvão). - Pour qu'un demi-anneau $\mathfrak{S}$ soit un μ-demi-anneau, il faut et il suffit que tout idéal réticulé semi-premier de $\mathfrak{S}$ soit principal.

La condition est nécessaire : Soit $\mathfrak{S}$ un μ-demi-anneau, et supposons que $\overline{\mathfrak{x}}$ soit un idéal réticulé et demi-premier de $\mathfrak{S}$. Son complémentaire $C(\overline{\mathfrak{x}})$ est un p-système (ou un π-système d'idéaux de $\mathfrak{S}$). Nous allons montrer que, parmi les idéaux de $\mathfrak{S}$ appartenant à $\overline{\mathfrak{x}}$, il y a un idéal maximal. Si on prend un ensemble ordonné $\{\mathfrak{x}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'idéaux appartenant à $\overline{\mathfrak{x}}$, aucun des $\mathfrak{x}_\alpha$ n'a de sous-idéal appartenant à $C(\overline{\mathfrak{x}})$, car $\overline{\mathfrak{x}}$ est un idéal réticulé. Si $\mathfrak{S}$ est un μ-semi-anneau, l'idéal $\bigcup \mathfrak{x}_\alpha$ n'a aucun sous-idéal appartenant à $C(\overline{\mathfrak{x}})$. Le principe de Zorn entraîne l'existence d'un idéal maximal $\mathfrak{h} \in \overline{\mathfrak{x}}$. On a d'ailleurs $\mathfrak{h} = \mathfrak{x}$, car

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{x}$ entraînerait l'existence de $x \in \mathfrak{x}$, $x \notin \mathfrak{h}$, avec $(x) \in \overline{\mathfrak{x}}$. L'idéal $(\mathfrak{h}, (x))$, qui serait contenu dans $\mathfrak{x}$, appartiendrait également à $\overline{\mathfrak{x}}$ et $\mathfrak{h}$ ne serait pas maximal. Les relations $\mathfrak{h} = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{h} \in \overline{\mathfrak{x}}$ donnent $\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}}_0$ et la première partie du théorème reste démontrée.

La condition est <u>suffisante</u> : Nous devons démontrer que, si $\{(\mathfrak{g}_\lambda)_0\}_{\lambda \in L}$ est une famille ordonnée d'idéaux complets chacun d'eux ayant une intersection vide avec un ensemble $\mathfrak{M}$ d'idéaux de $\mathfrak{G}$ qui constitue un m-système de $\overline{\mathfrak{G}}$, on a aussi $\mathfrak{M} \cap \overline{(\cup \mathfrak{g}_\lambda)}_0 = \Phi$. Soit $\overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ le radical de $\overline{(\mathfrak{g}_\lambda)}_0$. On peut faire les remarques suivantes :

1° Comme le **passage** $\alpha \to B(\alpha)$ d'un idéal à son radical est isotone, $\{\overline{\mathfrak{r}}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ est une famille totalement ordonnée d'idéaux et $\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ est un idéal ;

2° Comme l'union d'une famille d'idéaux réticulés est un idéal réticulé, l'idéal $\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ est un idéal réticulé ;

3° Comme l'idéal $\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ est union d'une famille d'idéaux complètement semi-premiers, il est aussi un idéal complètement semi-premier. Alors l'idéal réticulé et semi-premier $\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ est, par hypothèse, un idéal principal. D'après la définition de radical, aucun des $\overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ n'a d'élément dans $\mathfrak{M}$, donc il en est de même pour $\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda$, c'est-à-dire : $\mathfrak{M} \cap (\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda) = \Phi$. Mais l'idéal support de l'idéal $\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda$ est évidemment $\cup \mathfrak{r}_\lambda$. On en tire

$$\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda = \overline{(\cup \mathfrak{r}_\lambda)}_0 = \cup \overline{(\mathfrak{r}_\lambda)}_0 \quad .$$

De cette façon, compte tenu de l'inclusion $\overline{(\cup \mathfrak{g}_\lambda)}_0 \subseteq \overline{(\cup \mathfrak{r}_\lambda)}_0$ et de la relation

$$\mathfrak{M} \cap \overline{(\cup \mathfrak{r}_\lambda)}_0 = \mathfrak{M} \cap (\cup \overline{\mathfrak{r}}_\lambda) = \Phi \quad ,$$

la seconde partie du théorème en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALMEIDA COSTA (Antonio). - μ-systèmes et π-systèmes d'idéaux, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 7, 1959, p. 235-243.

[2] ALMEIDA COSTA (Antonio). - Sur les μ-anneaux et les μ_0-anneaux, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 8, 1960, p. 131-144.

[3] DUBREIL-JACOTIN (M. L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[4] KRULL (Wolfgang). - Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen, t. 101, 1929, p. 729-744.

[5] NOETHER (Emmy). - Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen, t. 83, 1921, p. 24-66.

[6] NORONHA GALVÃO (M. L.). - Sur la théorie de Noether-Krull dans les semi-anneaux, Rev. Fac. C., Lisboa, Série 2, A : Mat., t. 8, 1960, fascicule 2.