Julian Petresco

Problème des mots appartenant au sous-groupe d'un groupe libre

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1960-1961), exp. n° 13, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A12_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 13

PROBLÈME DES MOTS APPARTENANT AU SOUS-GROUPE D'UN GROUPE LIBRE

par Julian PETRESCO

Soient $G = [[A]]$ un groupe libre et H un sous-groupe de G.

On démontre [1] que H admet une <u>base libre progressive</u> X, c'est-à-dire que :

(1) $\quad H = [[X]]$; X est progressif $\iff [X](\lambda) \subseteq [X(\lambda)]$

ce qui équivaut à :

(2) $\quad \lambda(\prod x_i) \geq \lambda(x_i)$, pour tout mot irréductible $\prod x_i$ avec $x_i \in X \cup X^{-1}$.

Soit d'autre part $b \in G$ et

$$b = \bar{B} = \prod_t^{\nu} \alpha_t \ , \quad \alpha_t \in A \cup A^{-1}$$

sa représentation irréductible dans la base A.

On se propose de décrire un algorithme permettant de décider de la valabilité de

(3) $\qquad b \in H = [[X]]$ où X est progressif

(en connaissant par conséquent une base libre progressive de H).

Si l'on a (3), il existe un mot irréductible unique

$$\bar{R} = \prod_i^n r_i \ , \quad r_i \in X \cup X^{-1}$$

tel que $b = \bar{R}^{-1}$, ou encore

$$b\bar{R} = 1 \quad .$$

Soit

$$r_i = \bar{R}_i = \prod_j^{n_i} a_{ij} \ , \quad a_{ij} \in A \cup A^{-1}$$

la représentation irréductible de r_i dans la base A ; puisque $G = [[A]]$:

---

[1] PETRESCO (Julian). - Sur les groupes libres, Bull. Sc. math., t. 80, 1956, 1re partie, p. 6-32.
On trouvera dans ce même article les définitions qui ne sont pas données ici.

(4) $$\prod \alpha_t \cdot \prod_i \prod_j a_{ij} = 1 \quad \text{ou encore} \quad \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 \quad .$$

Si maintenant $\bar{B}$ et $\bar{R}_1$ sont deux mots de G irréductibles dans la base A, un segment S_0 de $\{B , R_1\}$, avec $\bar{S}_0 = 1$, est caractérisé par :

(5) $$S_0 = S_0(\alpha_t\ a_{1j}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \nu - t + 1 = j \\ \alpha_{t+r}\ a_{1,j-r} = 1 \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant r \leqslant \nu - t = j - 1 \end{cases} .$$

Un couple (α_t , a_{1j}) de $\{B , R_1\}$, satisfaisant à (5), est dit couple de réduction, et on note ρ_1 l'ensemble des couples de réduction de $\{B , R_1\}$. On appelle réduite B_1 de $\{B , R_1\}$, la suite obtenue de celle-ci en éliminant les couples de ρ_1. Il existe un segment $S_0(\alpha_t\ a_{1j})$ de $\{B , R_1\}$ maximum, satisfaisant à (5), et on dira dans ce cas que $(\alpha_t\ a_{1j})$ est le couple de réduction maximum ; on peut obtenir B_1 en éliminant de $\{B , R_1\}$ les éléments du segment maximum $S_0(\alpha_t\ a_{1j})$; B_1 est donc un mot de G irréductible dans la base A et $\bar{B}_1 = \bar{B}\bar{R}_1$.

Considérons alors une suite finie ou infinie de mots de G

(6) $$\bar{B} , \bar{R}_1 , \dots , \bar{R}_i , \dots \quad \text{avec} \quad \bar{R}_{i-1}\ \bar{R}_i \neq 1$$

irréductibles dans la base A.

On appelle réduction de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$, les deux suites :

$\{\rho_i\}$, d'ensembles de couples

$\{B_i\}$, de sous-suites

construites, par récurrence, comme suit :

(a') ρ_1 est l'ensemble des couples de réduction de $\{B , R_1\}$

(b') B_1 est la réduite de $\{B , R_1\}$

(a) ρ_i est l'ensemble des couples de réduction de $\{B_{i-1} , R_i\}$

(b) B_i est la réduite de $\{B_{i-1} , R_i\}$.

Un couple de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_i \cup \dots$ est dit couple de réduction de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$. D'après la construction, deux couples de réduction sont disjoints ; il s'ensuit que les ρ_i sont deux à deux disjoints. B_i sera dit par ailleurs i-réduite de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$.

Si (α , a) est un couple de réduction, on a nécessairement $(\alpha , a) \in \rho_i$ pour un certain i, de sorte que

$$\alpha , a \in \{B_{i-1} , R_i\} \subseteq \{B , R_1 , \dots , R_i\}$$

et par conséquent :

$$(7) \qquad (\alpha , a) \in \rho_1 \cup \dots \cup \rho_i \iff \alpha , a \in \{B , R_1 , \dots , R_i\} .$$

On note $S(\alpha , a)$ le segment de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ d'extrémités α et a : deux couples (α , a) et (α' , a') sont <u>concordants</u> si $S(\alpha , a)$ et $S(\alpha' , a')$ sont concordants.

THÉORÈME 1. - <u>Les réduites</u> B_i <u>sont irréductibles et</u> :

$$\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_i .$$

D'après (5), l'hypothèse que B_{i-1} est irréductible entraîne que B_i, la réduite de $\{B_{i-1} , R_i\}$, est irréductible, et de plus $\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i$. Si maintenant l'on suppose que $\bar{B}_{i-1} = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_i$, il s'ensuit que

$$\bar{B}_i = \bar{B}_{i-1} \bar{R}_i = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_{i-1} \bar{R}_i .$$

THÉORÈME 2. - B_i <u>s'obtient de</u> $\{B , R_1 , \dots , R_i\}$ <u>en éliminant les couples de</u> $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_i$ <u>(autrement dit, d'après</u> (7), <u>les couples de réduction</u> (α , a) <u>avec</u> $\alpha , a \in \{B , R_1 , \dots , R_i\}$).

En supposant que B_{i-1} s'obtient de $\{B , R_1 , \dots , R_{i-1}\}$ en éliminant les couples de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1}$; B_i s'obtient de $\{B_{i-1} , R_i\}$ en éliminant les couples de ρ_i, donc de $\{B , R_1 , \dots , R_{i-1} , R_i\}$ en éliminant les couples de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1} \cup \rho_i$.

THÉORÈME 3. - <u>Deux couples de réduction sont concordants.</u>

Considérons

$$(\alpha , a) \in \rho_i , \quad (\alpha' , a') \in \rho_k .$$

Si $i = k$, (α , a) et (α' , a') sont concordants d'après (5).

Si $i < k$ et si (α , a) et (α' , a') ne sont pas concordants, on a par exemple

$$\alpha' \in S(\alpha\ ,\ a) \subseteq \{B\ ,\ R_1\ ,\ \dots\ ,\ R_{i-1}\ ,\ R_i\}$$

mais alors d'après le théorème 2 :

$$\alpha' \in S_0(\alpha\ ,\ a) \subseteq \{B_{i-1}\ ,\ R_i\}$$

puisque $(\alpha'\ ,\ a')$ est disjoint des couples de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1}$. Il existerait donc, d'après (5), un couple $(\alpha'\ ,\ a'_0) \in \rho_i$, ce qui est contradictoire.

THÉORÈME 4. - Si $(\alpha\ ,\ a) \in \rho_i$, tout élément de $S(\alpha\ ,\ a)$ est dans un couple de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_i$.

Soit

$$\alpha' \in S(\alpha\ ,\ a) \subseteq \{B\ ,\ R_1\ ,\ \dots\ ,\ R_{i-1}\ ,\ R_i\} \quad .$$

Si $\alpha' \in \{B_{i-1}\ ,\ R_i\}$, α' est dans un couple de ρ_i, d'après (5).

Si $\alpha' \in \{B\ ,\ R_1\ ,\ \dots\ ,\ R_{i-1}\}$, mais $\alpha' \notin B_{i-1}$, α' est dans un couple de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_{i-1}$, d'après le théorème 2.

THÉORÈME 5. - Si $(\alpha\ ,\ a)$ est un couple de réduction, on a l'identité $\bar{S}(\alpha\ ,\ a) = 1$.

Considérons en particulier une suite (7) finie de mots irréductibles de G

$$(7') \qquad \bar{B}\ ,\ \bar{R}_1\ ,\ \dots\ ,\ \bar{R}_n$$

avec

$$(4) \qquad \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 \quad .$$

On notera ρ, l'ensemble des segments $S(\alpha\ ,\ a)$ avec $(\alpha\ ,\ a)$ couple de réduction de $\{B\ ,\ R_1\ ,\ \dots\ ,\ R_n\}$.

THÉORÈME 6. - ρ est une segmentation concordante et unitaire de $\{B\ ,\ R_1\ ,\ \dots\ ,\ R_n\}$. D'après (5) et le théorème 3, les segments de ρ sont unitaires, et deux à deux concordants.

On a d'autre part, d'après le théorème 1

$$1 = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_{n-1}\ \bar{R}_n = \bar{B}_{n-1}\ \bar{R}_n$$

avec B_{n-1} irréductible, et puisque B_n est la réduite de $\{B_{n-1}\ ,\ R_n\}$

$$B_n = \emptyset \quad .$$

Mais alors, d'après le théorème 2, tout élément de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$ appartient à un couple de $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_n$, c'est-à-dire à un couple de réduction de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$, et à un seul.

ρ est bien une segmentation concordante et unitaire, qu'on appellera *segmentation de réduction* de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$.

Considérons maintenant une suite de mots irréductibles (7) avec $\bar{R}_i = r_i \in X \cup X^{-1}$ où X est une base progressive de G . Soit a le centre à gauche de R_i , et supposons que a est dans un couple de réduction (α , a) .

THÉORÈME 7.

1. *Si* $n_i = 2m + 1$, $\alpha \in B$

2. *Si* $n_i = 2m$, *on a, soit* $\alpha \in B$, *soit* $\alpha \in R_k$ *où* R_k *est le dernier élément de* (7) *avec* $k < i$, $n_k \geqslant n_i$; *dans ce dernier cas, et si* $n_k = n_i$, α *est le centre à droite de* R_k .

1° On a $a = a_{i,m+1}$. Supposons que, contrairement à l'énoncé, $\alpha \in R_k$ donc $\alpha = a_{kh}$ avec, par exemple $i < k$. Deux cas également contradictoires à (2) peuvent se présenter :

a. $h \leqslant m$, $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_{k-1})] = \lambda(a_{i1} \dots a_{im}\, a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1}) \leqslant m + h \leqslant 2m < n_i = \lambda(r_i)$

b. $h \geqslant m + 1$, $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_k)] = \lambda(a_{i1} \dots a_{im}\, a_{k,h+1} \dots a_{k,n_k})$

$$\leqslant m + n_k - h \leqslant n_k - 1 < n_k = \lambda(r_k)$$

car d'après le théorème 5 :

$$\bar{S}(a_{i,m+1}\, a_{kh}) = \bar{S}(a , \alpha) = 1 \quad .$$

2° On a $a = a_{im}$. Supposons que $\alpha \in R_k$, donc $\alpha = a_{kh}$, et tout d'abord que $i < k$. Deux cas contradictoires à (2) peuvent se présenter :

a. $h \leqslant m$; $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_{k-1})] = \lambda(a_{i1} \dots a_{i,m-1}\, a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1})$

$$\leqslant m - 1 + h \leqslant 2m - 1 < n_i = \lambda(r_i)$$

b. $h \geqslant m + i$; $\lambda[\bar{S}(r_i\, r_k)] = \lambda(a_{i1} \dots a_{i,m-1}\, a_{k,h+1} \dots a_{k,n_k})$

$$\leqslant m - 1 + n_k - h \leqslant n_k - 2 < n_k = \lambda(r_k) \ .$$

Si maintenant $k < i$ on a nécessairement :

$$n_k - h + 1 = m \quad .$$

Les deux cas suivants sont en effet contradictoires à (2) :

a. $n_k - h + 1 < m$; $\lambda[\bar{S}(r_{k+1}\ r_i)] = \lambda(a_{k,n_k}^{-1} \cdots a_{kh}^{-1}\ a_{i,m+1} \cdots a_{i,2m})$

$$\leqslant n_k - h + 1 + m < 2m = n_i = \lambda(r_i)$$

b. $n_k - h + 1 > m$; $\lambda[\bar{S}(r_k\ r_i)] = \lambda(a_{k1} \cdots a_{k,h-1}\ a_{i,m+1} \cdots a_{i,2m})$

$$\leqslant h - 1 + m < n_k = \lambda(r_k) \ .$$

Il s'ensuit que si $n_k = n_i = 2m$, on a $h = m + 1$ de sorte que $\alpha = a_{k,m+1}$ est le centre à droite de R_k .

D'autre part, l'existence d'un R_j avec $k < j < i$ et $n_j \geqslant n_i$ est contradictoire à (2), car :

$$\lambda[\bar{S}(r_{k+1}\ r_{i-1})] = \lambda(a_{k,n_k}^{-1} \cdots a_{k,h+1}^{-1}\ a_{kh}^{-1}\ a_{im}^{-1}\ a_{i,m-1}^{-1} \cdots a_{i1}^{-1})$$

$$= n_{k-h} + m - 1 = 2m - 2 < \nu_i \leqslant \nu_j = \lambda(r_j)$$

puisque d'après (5) $a_{kh}^{-1}\ a_{im}^{-1} = \alpha^{-1}\ a^{-1} = 1$.

On voit d'autre part facilement en considérant B_i comme réduite de $\{B_{i-1} , R_i\}$, et en utilisant (5) que :

THÉORÈME 8.

1° <u>Si</u> $n_i = 2m + 1$, <u>on a</u> :

$\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>se trouve dans un couple de réduction de</u> $\{B_{i-1} , R_i\}$

$\lambda(B_{i-1}) < \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>ne se trouve pas dans un tel couple.</u>

2° <u>Si</u> $n_i = 2m$, <u>on a</u> :

$\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>se trouve dans un couple de réduction de</u> $\{B_{i-1} , R_i\}$ <u>qui n'est pas le maximum</u>

$\lambda(B_{i-1}) = \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>se trouve dans le couple maximum</u>

$\lambda(B_{i-1}) < \lambda(B_i)$ <u>si</u> a <u>ne se trouve pas dans un tel couple.</u>

Soit maintenant X_0 un sous-ensemble <u>fini</u> de X .

THÉORÈME 9. - <u>Il n'existe pas de suite infinie</u> $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ <u>avec</u> :

(a) $$\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$$

(b) <u>à partir d'un certain</u> i : $\lambda(B_{i-1}) = \lambda(B_i) \neq 0$.

Soit en effet

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$$

la suite finie des nombres $\lambda(x)$ avec $x \in X_0 \cup X_0^{-1}$, et supposons que $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ satisfait aux conditions (a), (b).

On a par conséquent, pour $i \geqslant k$:

$$\lambda(B_{k-1}) = \lambda(B_k) = \dots = \lambda(B_{i-1}) = \lambda(B_i) = \dots .$$

D'après le théorème 8, on a pour tout $i \geqslant k$, $\lambda(R_i)$ paire.

Puisque $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$ est <u>infinie</u>, il existe pour un certain λ_r $(1 \leqslant r \leqslant p)$ une infinité de R_i avec

$$i \geqslant k , \quad \lambda(\bar{R}_i) = \lambda_r = 2m .$$

Puisque $\{\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_p\}$ est <u>fini</u>, on peut supposer que λ_r est maximum à satisfaire cette condition, et par conséquent que les R_i avec $\lambda(R_i) > \lambda_r$ sont en nombre fini.

Soit

(7") $$\{R_{i_1} , R_{i_2} , \dots , R_{i_s} , \dots\}$$

la sous-suite de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$, infinie, des R_i avec $i \geqslant k$ et $\lambda(\bar{R}_i) = \lambda_r$.

D'après le théorème 8, a , le centre à gauche de R_{is} se trouve dans un couple de réduction (α , a) de $\{B , R_1 , \dots , R_i , \dots\}$, et, puisque B est <u>finie</u>, on peut supposer que $\alpha \notin B$.

Puisqu'enfin les R_i avec $\lambda(\bar{R}_i) > \lambda_r$ sont en nombre <u>fini</u>, on peut supposer que $\lambda(\bar{R}_i) \leqslant \lambda_r$ pour tout $i \geqslant i_1$.

Mais alors, d'après le théorème 7, (α , a) est tel que :

a est le centre à gauche de R_{i_s}

α est le centre à droite de $R_{i_{s-1}}$

et puisque d'après le théorème 5, $\bar{S}(\alpha , a) = 1$, on a pour tout $s \geqslant 2$:

$$\bar{S}(a_{i_{s-1},m+1}\, a_{i_s,m}) = 1 \quad .$$

Puisque $X_0 \cup X_0^{-1}$ est fini, il existe $x \in X_0 \cup X_0^{-1}$ figurant une infinité de fois dans (7''), donc au moins deux fois, soit par exemple $\bar{R}_{i_1} = \bar{R}_{i_s} = r_{i_1} = r_{i_s} = x$, de sorte que :

$$S(r_{i_1}\, r_{i_{s-1}}) = a_{i_1,1} \cdots a_{i_1,m}\, a^{-1}_{i_j,m} \cdots a^{-1}_{i_s,1} = 1$$

car : $r_{i_1} = r_{i_s}$ entraîne $a_{i_1,j} = a_{i_s,j}$.

Dans les deux cas, on peut donc trouver R_i avec $\bar{R}_{i-1}\, \bar{R}_i = 1$, car X_0 est libre, ce qui contredit (7).

THÉORÈME 10. - Si $\bar{B}\bar{R}_1 \ldots \bar{R}_n = 1$, on a :

$$\lambda(B) \geqslant \lambda(B_1) \geqslant \cdots \geqslant \lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i) \geqslant \cdots \geqslant \lambda(B_{n-1}) \geqslant \lambda(B_n) = 0 \quad .$$

Si de plus $\lambda(R_i)$ est impaire : $\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$.

D'après le théorème 6, tout élément de $\{B , R_1 , \ldots , R_n\}$ se trouve dans un couple de réduction, donc en particulier a , le centre à gauche de R_i . Mais alors, d'après le théorème 7, a se trouve dans un couple de réduction de $\{B_{i-1} , R_i\}$ donc d'après le théorème 8, $\lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i)$ et, si $\lambda(R_i)$ est impaire, $\lambda(B_{i-1}) > \lambda(B_i)$.

Soient maintenant $G = [[A]]$ avec A fini, $H = [[X]]$ avec X progressif et $\bar{B} = b \in G$ avec B irréductible ; soit d'autre part X_0 , le sous-ensemble des $x \in X$ avec $\lambda(x) \leqslant \lambda(B)$.

A étant fini, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de G de longueur $\leqslant \lambda(B)$, et par conséquent X_0 est fini.

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites finies $\{B , R_1 , \ldots , R_n\}$ où les $\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec R_i irréductibles et $\bar{R}_{i-1}\, \bar{R}_i \neq 1$ satisfont aux relations

$$(8)\quad\begin{cases}\bar{B}\bar{R}_1 = \bar{B}_1 \text{ avec } \bar{B}_1 \neq 1 \text{ irréductible et } \lambda(B) \geq \lambda(B_1)\\ \bar{B}_1\,\bar{R}_2 = \bar{B}_2 \text{ avec } \bar{B}_2 \neq 1 \text{ irréductible et } \lambda(B_1) \geq \lambda(B_2)\\ \dots\\ \bar{B}_{i-1}\,\bar{R}_i = \bar{B}_i \text{ avec } \bar{B}_i \neq 1 \text{ irréductible et } \lambda(B_{i-1}) \geq \lambda(B_i)\\ \dots\\ \bar{B}_{n-1}\,\bar{R}_n = \bar{B}_n \text{ avec } \bar{B}_n \text{ irréductible et } \lambda(B_{n-1}) \geq \lambda(B_n)\end{cases}$$

Il est évident que :

$$(9)\qquad \{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S} \implies \{B , R_1 , \dots , R_i\} \in \mathbb{S} , \quad 1 \leq i \leq n .$$

THÉORÈME 11. - $b \in H \iff \exists$ <u>suite</u> $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$ <u>avec</u> $\bar{B}_n = 1$.

D'après (2), si $b \in H$ alors $b \in [X_0]$, et par conséquent il existe $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$ avec $\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$ irréductible satisfaisant à

$$\bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 .$$

On a alors pour les réduites B_i de $\{B , R_1 , \dots , R_n\}$, d'après le théorème 1 :

$$\bar{B}_{i-1}\,\bar{B}_i = \bar{B}_i \quad \text{avec } B_i \text{ irréductibles}$$

et d'après le théorème 10

$$\lambda(B_{i-1}) \geq \lambda(B_i)$$

c'est-à-dire que $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$, et d'autre part d'après le théorème 2 :

$$\bar{B}_n = \bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = 1 .$$

Réciproquement si $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$, les B_i définies par (8) sont ses réduites, de sorte que, si $B_n = 1$, d'après le théorème 1

$$\bar{B}\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n = \bar{B}_n = 1$$

donc

$$b = \bar{B} = (\bar{R}_1 \dots \bar{R}_n)^{-1} \in [X_0] \subseteq H .$$

THÉORÈME 12. - $\mathbb{S}$ <u>est fini.</u>

Puisque $\bar{R}_i = r_i \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec X_0 fini, il n'y a qu'un nombre fini de solutions en R_i de

$$\bar{B}_{i-1}\ \bar{R}_i = \bar{B}_i \quad \text{avec} \quad \lambda(B_{i-1}) \geqslant \lambda(B_i)$$

et par conséquent, pour chaque n, qu'un nombre fini de suites $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$.

Si donc $\mathbb{S}$ est <u>infini</u>, pour une infinité d'entiers n, il existe une suite $s_n = \{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$. En tenant compte de (9) on peut affirmer en définitive que :

Pour chaque entier n, il existe une suite $s_n = \{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$.

Puisque $\bar{R}_1$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs de $X_0 \cup X_0^{-1}$, il existe R_1^0 tel qu'une infinité de s_n soient de la forme

$$s_n = \{B , R_1^0 , R_2 , \dots , R_n\} .$$

Plus généralement, s'il existe une infinité de s_n de la forme

$$s_n = \{B , R_1^0 , \dots , R_{i-1}^0 , R_i , \dots , R_n\}$$

il existe alors, puisque $\bar{R}_i$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, R_i^0 tel qu'une infinité de s_n soit de la forme

$$s_n = \{B , R_1^0 , \dots , R_{i-1}^0 , R_i^0 , R_{i+1} , \dots , R_n\}$$

Considérons donc la suite infinie $\{B , R_1^0 , \dots , R_i^0 , \dots\}$ définie par : R_i^0 est tel qu'une infinité de s_n sont de la forme :

$$s_n = \{B , R_1^0 , \dots , R_i^0 , R_{i+1} , \dots , R_n\} .$$

Quel que soit i, on a dans ce cas, pour un certain $n > i$

$$\{B , R_1^0 , \dots , R_i^0 , R_{i+1} , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$$

donc en définitive :

$$\bar{B}\bar{R}_1^0 = \bar{B}_1^0 \quad \text{avec} \quad B_1^0 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B) \geqslant \lambda(B_1^0)$$

$$\bar{B}_1^0 \, \bar{R}_2^0 = \bar{B}_2^0 \quad \text{avec} \quad B_2^0 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_1^0) \geqslant \lambda(B_2^0)$$

...

$$\bar{B}_{i-1}^0 \, \bar{R}_i^0 = \bar{B}_i^0 \quad \text{avec} \quad B_i^0 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_{i-1}^0) \geqslant \lambda(B_i^0)$$

...

Puisque $\lambda(B)$ est fini, on a cependant, à partir d'un certain i , $\lambda(B_{i-1}^0) = \lambda(B_i^0) \neq 0$, ce qui est exclu d'après le théorème 9.

$\mathbb{S}$ est donc bien fini, et par conséquent, il existe un entier p tel que pour toute suite $\{B , R_1 , \ldots , R_n\} \in \mathbb{S}$, on ait $n \leqslant p$.

Considérons enfin l'algorithme <u>fini</u> suivant :

On détermine, par un nombre fini d'essais, les valeurs, en nombre fini, du couple (R_1 , B_1) avec $\bar{R}_1 \in X_0 \cup X_0^{-1}$, satisfaisant à :

$$\bar{B}\bar{R}_1 = \bar{B}_1 \quad \text{avec} \quad B_1 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B) \geqslant \lambda(B_1) \quad .$$

Pour chaque couple (R_1 , B_1) , on détermine les valeurs, en nombre fini, du couple (R_2 , B_2) avec $\bar{R}_2 \in X_0 \cup X_0^{-1}$ et $\bar{R}_2 \neq \bar{R}_1$ satisfaisant à :

$$\bar{B}_1 \, \bar{R}_2 = \bar{B}_2 \quad \text{avec} \quad B_2 \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_1) \geqslant \lambda(B_2)$$

et ainsi de suite.

D'après le théorème 12, quel que soit le choix des couples (R_i , B_i) , cet algorithme se termine, pour un certain $n \leqslant p$, soit parce que $B_n = 1$, soit parce qu'il n'existe pas de couple (R_n , B_n) avec $\bar{R}_n \in X_0 \cup X_0^{-1}$, $\bar{R}_n \neq \bar{R}_{n-1}^{-1}$ satisfaisant à :

$$\bar{B}_{n-1} \, \bar{R}_n = \bar{B}_n \; ; \; \bar{B}_n \neq 1 \quad \text{irréductible et} \quad \lambda(B_{n-1}) \geqslant \lambda(B_n) \quad .$$

Deux cas sont alors possibles :

1° Pour un certain choix des couples (R_i , B_i) et un certain $n \leqslant p$, il existe $\bar{R}_n \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec $\bar{R}_n \neq \bar{R}_{n-1}^{-1}$ tel que :

$$\bar{B}_{n-1} \, \bar{R}_n = \bar{B}_n = 1$$

auquel cas, il existe une suite $\{B ; R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$ avec $\bar{\bar{B}}_n = 1$, donc, d'après le théorème 8 : $\bar{\bar{B}} \in H$.

2° Quel que soit le choix des couples (R_i , B_i) , il existe $n \leqslant p$ tel que, pour tout $\bar{\bar{R}}_n \in X_0 \cup X_0^{-1}$ avec $\bar{\bar{R}}_n \neq \bar{\bar{R}}_{n-1}^{-1}$ on ait :

$$\bar{\bar{B}}_{n-1}\, \bar{\bar{R}}_n = \bar{\bar{B}}_n \; ; \quad \lambda(B_{n-1}) < \lambda(B_n)$$

auquel cas, il n'existe pas de suite $\{B , R_1 , \dots , R_n\} \in \mathbb{S}$ avec $\bar{\bar{B}}_n = 1$, donc d'après le théorème 8 : $\bar{\bar{B}} \notin H$.