

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

BERNARD CHARLES

Sous-groupes de base des groupes abéliens primaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 17, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A6_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-GROUPES DE BASE DES GROUPES ABÉLIENS PRIMAIRES

par Bernard CHARLES

Dans toute la suite, G est un p -groupe abélien, c'est-à-dire un groupe abélien dont tous les éléments ont pour ordre une puissance de l'entier premier p . Nous supposons toujours que G est réduit, c'est-à-dire sans sous-groupe du type p^∞ . Un groupe du type p^∞ est un groupe isomorphe au groupe additif de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de p et où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers.

Pour tout ordinal α nous définissons $p^\alpha G$ en posant $p^{\alpha+1} G = p(p^\alpha G)$ et si α est un ordinal limite $p^\alpha G = \bigcap_{\beta < \alpha} p^\beta G$. Nous désignons par τ le plus petit ordinal tel que $p^\tau G = 0$. Un groupe G est dit borné s'il existe un entier n tel que $p^n G = 0$.

Le socle P de G est le sous-groupe des éléments d'ordre $\leq p$. On peut considérer P comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/(p)$. Nous désignons toujours par P_α le sous-espace $P \cap p^\alpha G$. Les nombres $f(\alpha) = \dim P_\alpha / P_{\alpha+1}$ sont les invariants d'Ulm de G .

Les groupes $p^\alpha G / p^\omega (p^\alpha G)$ ($\alpha = 0$ ou ordinal limite et $\omega =$ premier ordinal limite) sont les facteurs d'Ulm de G .

Le socle de G est dit décomposable s'il existe une suite de sous-espaces Q_α de P telle que :

$$P_\alpha = Q_\alpha \oplus P_{\alpha+1} \quad P = \bigoplus_{\alpha < \tau} Q_\alpha$$

(Il s'agit ici de somme directe finie).

Si $H, K, \dots$ sont des sous-ensembles de G , nous désignons par $\{H, K, \dots\}$ le sous-groupe qu'ils engendrent.

Nous désignons toujours par G_n le sous-groupe de G formé des éléments de G d'ordre $\leq p^n$.

Un sous-groupe H de G est dit pur si $nH = H \cap nG$ pour tout entier n .

Les topologies $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}'_\alpha$.

Étant donné un ordinal α on peut considérer la topologie $\mathcal{C}_\alpha$ définie par le système fondamental de voisinages de 0 constitué par les $p^\beta G$ ($\beta < \alpha$).

Si α est un ordinal limite, le complété de G pour la topologie $\mathcal{C}_\alpha$ contient des éléments d'ordre infini, de sorte qu'il est préférable de considérer la topologie $\mathcal{C}'_\alpha$ qui est la limite inductive des topologies induites sur les sous-groupes G_n par la topologie $\mathcal{C}_\alpha$. Le complété de $\hat{G}$, qui est alors la "réunion" des complétés $\hat{G}_n$ des G_n , ne contient pas d'élément d'ordre infini.

A notre connaissance, on s'est jusqu'à présent limité à la considération de la topologie $\mathcal{C}_\omega$. Nous pensons que l'étude systématique des topologies $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}'_\alpha$ serait utile pour la théorie des groupes abéliens primaires. A titre indicatif, nous signalons les propriétés suivantes :

Supposons la topologie $\mathcal{C}'_\tau$ séparée, c'est-à-dire τ ordinal limite. Les sous-groupes G_n sont fermés et, pour que $H \subset G$ soit fermé, il faut et il suffit que les $H \cap G_n$ soient fermés. Le complété $\hat{G}$ de G pour $\mathcal{C}'_\tau$ a les mêmes facteurs d'Ulm que G , car pour tout $\alpha < \tau$ la topologie induite sur $G/p^\alpha G$ par $\mathcal{C}'_\tau$ est la topologie discrète. Si G est dénombrable, $\hat{G}$ ne l'est pas, ce qui donne un exemple élémentaire de p -groupes non isomorphes ayant les mêmes facteurs d'Ulm.

Sous-groupes de base de G .

A partir de maintenant, nous ne considérons que les topologies $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\omega$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_\omega$.

DEFINITION. - B est un sous-groupe de base de G s'il vérifie les trois conditions :

- (1) B est somme directe de groupes cycliques,
- (2) B est dense dans G pour $\mathcal{C}'$ (ou pour $\mathcal{C}$),
- (3) $B \cap p^\omega G = 0$.

Soit $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$ où B_i est une somme directe de groupes cycliques d'ordre p^{i+1} . Nous posons $B'_n = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ et $B''_n = \bigoplus_{i>n} B_i$ et nous désignons par $\bar{H}$ la fermeture de $H \subset G$ pour la topologie $\mathcal{C}'$. Comme $B'_n \cap p^{n+1} G = 0$, on en conclut que B'_n est discret et on en déduit facilement :

$$(4) \quad G = \bar{B} = B'_n \oplus \bar{B''_n}.$$

En désignant de façon générale par $S(H)$ le socle d'un sous-groupe H de G , on en déduit :

$$(5) \quad S(G) = S(B'_n) \oplus P_{n+1}.$$

Ces propriétés permettent d'indiquer une méthode pour obtenir l'ensemble de tous les sous-groupes de base de G : pour chaque $n < \omega$, on construit un sous-espace Q_n de P_n tel que $P_n = Q_n \oplus P_{n+1}$ puis un sous-groupe B_n de G de socle Q_n et somme directe de groupes cycliques d'ordre p^{n+1} . La somme directe des B_n est un sous-groupe de base de G et tous les sous-groupes de base de G peuvent s'obtenir par cette construction.

La définition que nous avons donnée de la notion de sous-groupe de base diffère de celle donnée initialement par KULIKOV, mais nous la croyons plus maniable. La notion de sous-groupe de base a permis à KULIKOV de mettre en évidence une classe importante de p -groupes, à savoir ceux qui sont complets pour la topologie $\mathcal{C}'$ et qu'il appelle p -fermés. La condition d'être p -fermé implique $p^\omega G = 0$, c'est-à-dire que G ne possède pas d'éléments $\neq 0$ de hauteur infinie.

Structure des groupes abéliens primaires tels que $p^\omega G = 0$.

Sur un tel groupe, la topologie $\mathcal{C}$ est séparée, et si B est un sous-groupe de base de G , on peut identifier G avec un sous-groupe du complété $\hat{B}$ de B : $B \subset G \subset \hat{B}$. Si $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ il est facile de vérifier que $\hat{B}$ est l'ensemble des suites bornées $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ où $u_n \in B_n$ (une suite est dite bornée si l'ordre de ses éléments est borné par un nombre fixe).

THÉOREME 1. - Tout endomorphisme θ de G est continu pour $\mathcal{C}'$. Tout homomorphisme (resp. isomorphisme) de B dans $\hat{B}$ se prolonge de façon unique à un homomorphisme (resp. isomorphisme) de $\hat{B}$ dans $\hat{B}$ continu pour $\mathcal{C}'$.

Un endomorphisme θ de G laissant les sous-groupes G_n invariants, il suffit de montrer que la restriction de θ aux G_n est continue. Cela résulte de ce que, dans G_n , on a un système fondamental de voisinages de 0 formé par les sous-groupes $(p^k G) \cap G_n$ qui sont invariants pour tout endomorphisme.

La deuxième partie du théorème se démontre de façon analogue, et revient à remarquer que, si φ est un homomorphisme de B dans $\hat{B}$ la suite

$$v_n = \sum_{i=1}^n \varphi(u_i)$$

est une suite de Cauchy si la suite des u_i est bornée.

La notion de sous-groupe de base permet d'aborder de façon intéressante le problème de la structure des p -groupes sans élément $\neq 0$ de hauteur infinie. Si B est un sous-groupe de base de G , nous avons vu que $B \subset G \subset \hat{B}$, c'est-à-dire que tout p -groupe G est intermédiaire entre une somme directe de groupes cycliques et un p -groupe fermé. Nous avons démontré dans [1] le théorème suivant :

THÉOREME 2. - Si on se donne un espace vectoriel P sur le corps $\mathbb{Z}/(p)$ avec une suite décroissante de sous-espaces P_i tels que $\bigcap_i P_i = 0$ il existe un groupe G de socle P et tel que $P_i = P \cap p^i G$.

Pour démontrer ce théorème, on peut partir d'une suite de sous-espaces $Q_i \subset P_i$ tels que $P_i = Q_i \oplus P_{i+1}$ et construire B_i de socle Q_i et somme directe de groupes cycliques d'ordre p^{i+1} . On peut alors obtenir G comme sous-groupe du complété de $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$ pour la topologie analogue à $\mathcal{C}'$ qu'on peut définir sur B (P est identifié à un sous-espace du socle $\hat{P}$ de $\hat{B}$).

Le théorème 2 met en évidence deux problèmes importants que nous ne savons pas résoudre :

PROBLÈME 1. - Deux sous-groupes purs d'un p -groupe fermé $\hat{B}$ qui ont le même socle sont-ils isomorphes ?

PROBLÈME 2. - Trouver un système d'invariants pour la structure qui consiste en la donnée d'un espace vectoriel avec une suite décroissante de sous-espaces.

Si le problème 1 admettait une réponse positive, l'étude de la structure des p -groupes sans élément $\neq 0$ de hauteur infinie serait ramenée au problème 2. Dans le cas contraire, le problème 2 serait un problème intermédiaire qu'il faudrait de toute façon résoudre.

Dans [2], L. FUCHS signalait le résultat suivant de H. LEPTIN : soit G_1, G_2 tels que $B \subset G_1 \subset \hat{B}$, $B \subset G_2 \subset \hat{B}$. Les groupes G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement s'il existe un automorphisme de $\hat{B}$ qui transforme G_1 en G_2 . On peut en donner une démonstration facile en utilisant la topologie $\mathcal{C}'$. Si G_1 et G_2 sont isomorphes, et si θ est un isomorphisme de G_1 sur G_2 , θ se prolonge par continuité en un endomorphisme de $\hat{B}$. Comme $\theta(B)$ est un sous-groupe de base (il est dense dans G_1 , donc dans $\hat{B}$) il est facile d'en déduire que θ se prolonge à un automorphisme.

Structure des groupes abéliens primaires (réduits).

Seule, la structure des p -groupes dénombrables est complètement connue (ULM,

ZIPPIN) . Ces groupes sont déterminés à une isomorphie près par les invariants d'Ulm $f(\alpha)$. La notion de sous-groupe de base perd une partie de son efficacité, car la topologie $\mathcal{C}'$ n'est pas séparée si $\tau > \omega$.

Les groupes qui pourraient jouer le rôle des sommes directes de groupes cycliques dans l'étude des groupes sans élément $\neq 0$ de hauteur infinie nous semblent être les groupes à socle décomposable. Le théorème suivant justifie ce point de vue :

THÉORÈME 3. - Pour que le socle de G soit décomposable, il suffit qu'il existe dans son socle P une suite croissante de sous-espaces R^n vérifiant les conditions :

$$1^\circ \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = P ,$$

2° pour chaque n , il n'existe qu'un nombre fini d'ordinaux α tels que

$$P_\alpha \cap R^n \neq P_{\alpha+1} \cap R^n .$$

DÉMONSTRATION. - Comme $R^n \subset R^{n+1}$ on peut, pour chaque α , construire par récurrence sur n une suite de sous-espaces Q_α^n de P vérifiant :

$$(1) \quad R^n \cap P_\alpha = Q_\alpha^n \oplus (R^n \cap P_{\alpha+1})$$

$$(2) \quad Q_\alpha^n \subset Q_\alpha^{n+1} \quad (\alpha < \tau) .$$

Nous allons montrer que $R^n = \bigoplus_{\alpha < \tau} Q_\alpha^n$. Pour cela, étant donné $u \in R^n$, nous allons définir par récurrence sur α une suite $u_\alpha \in Q_\alpha^n$ telle que $u = \sum_{\alpha < \tau} u_\alpha$. Notons qu'une telle somme aura un sens puisque tous les Q_α^n ($\alpha < \tau$) sont nuls, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

1° On définit u_0 par $u - u_0 \in P_1$.

2° Supposons définis les u_α pour $\alpha \leq \beta$ avec la condition

$$u - \sum_{\alpha \leq \beta} u_\alpha \in P_{\beta+1} .$$

Il existe alors $u_{\beta+1} \in Q_{\beta+1}^n$ défini de façon unique par :

$$u - \sum_{\alpha \leq \beta+1} u_\alpha \in P_{\beta+2} .$$

3° Supposons définis les u_α pour $\alpha < \beta$ où β est un ordinal limite, avec les conditions :

$$u - \sum_{\alpha \leq \gamma} u_\alpha \in P_{\gamma+1} \quad \forall \gamma < \beta .$$

On a alors $u = \sum_{\alpha < \beta} u_\alpha \in \bigcap_{\gamma < \beta} P_\gamma = P_\beta$ ce qui permet de définir u_β tel que $u = \sum_{\alpha \leq \beta} u_\alpha \in P_{\beta+1}$.

On aura $u = \sum_{\alpha < \tau} u_\alpha$ puisque $P_\tau = 0$, ce qui démontre que $R^n = \bigoplus_{\alpha < \tau} Q_\alpha^n$.
Posons $Q_\alpha = \bigcup_n Q_\alpha^n$, il vient :

$$P = \bigcup_n R^n = \bigcup_n \left(\bigoplus_{\alpha < \tau} Q_\alpha^n \right) = \bigoplus_{\alpha < \tau} Q_\alpha.$$

Le socle de G est décomposable, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - Si G est dénombrable, son socle est décomposable.

Si $P = \{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ il suffit d'appliquer le théorème en prenant $R^n = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$.

Rappelons maintenant un résultat de KULIKOV : pour que G soit une somme directe de groupes cycliques, il faut et il suffit que G soit l'union d'une suite croissante de sous-groupes H_n discrets pour la topologie $\mathcal{E}_\omega$. Il résulte facilement du théorème 3 que cette condition est équivalente à : $p^\omega G \neq 0$ et le socle est décomposable.

Tout ceci montre bien que la classe des groupes à socle décomposable est celle qui s'impose comme objet d'étude dans la théorie des groupes abéliens primaires, pour dépasser les résultats de ULM, ZIPPIN.

PROBLÈME 3. - Les groupes abéliens primaires à socle décomposable sont-ils caractérisés par leurs invariants d'Ulm $f(\alpha)$?

On ne connaît pas la réponse à ce problème. L. FUCHS pense qu'elle est négative. Nous espérons qu'elle est positive, mais cela nous semble difficile à démontrer. Nous pensons que tout groupe primaire G contient des sous-groupes à socle décomposable et ayant les mêmes invariants d'Ulm. On pourrait espérer faire jouer à ces sous-groupes un rôle analogue aux sous-groupes de base définis par L. KULIKOV.

Sous-groupes purs minimaux contenant un sous-groupe donné.

Soit G tel que $p^\omega G = 0$, les deux problèmes suivants ont un lien avec ce qui précède :

PROBLÈME 4. - H étant un sous-groupe de G , existe-t-il des sous-groupes purs minimaux de G contenant H ?

PROBLÈME 5. - H_1 et H_2 étant deux sous-groupes purs minimaux contenant H

existe-t-il un isomorphisme de H_1 sur H_2 qui prolonge l'identité dans H ?

Si H est contenu dans le socle de G , il existe toujours des sous-groupes purs de G de socle H , de tels sous-groupes sont alors minimaux. Le problème 1 apparaît ainsi comme un cas particulier du problème 5.

Nous ne savons pas résoudre le problème 1 même dans le cas où G est borné. Des résultats partiels sur ces questions paraîtront prochainement dans un article qui sera inséré dans le Bulletin de la Société mathématique de France.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHARLES (Bernard). - Etude des groupes abéliens primaires de type $\leq \omega$, Annales Universitatis saraviensis, t. 4, 1955, p. 184-199.
 - [2] FUCHS (Laszlo). - Strukturfragen in der Theorie der Abelschen Gruppen, Séminaire Dubreil, Dubreil-Jacotin et Pisot, t. 12, 1958/59 : Algèbre et Théorie des nombres, n° 25.
-