Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Guy Maury

Gerbiers non commutatifs résidués

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 13, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A3_0>

GERBIERS NON COMMUTATIFS RÉSIDUÉS

par Guy MAURY

I. Préliminaires

1. Je crois utile de rappeler certaines définitions.

Un demi-groupe G dont la loi est appelée multiplication (le produit de a par b, $a, b \in G$, étant noté ab) est appelé un gerbier lorsque c'est un demi-groupe vis-à-vis d'une deuxième loi appelée union, notée $\cup$, idempotente $(a \cup a = a, \forall a \in G)$, et commutative $(a \cup b = b \cup a, \forall a, b \in G)$, la multiplication étant de plus distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire :

$$\forall a, b, x \in G, \quad (a \cup b)x = ax \cup bx ,$$

$$\forall a, b, y \in G, \quad y(a \cup b) = ya \cup yb .$$

On sait que l'on peut définir dans G la relation d'ordre $\subseteq$:

$$a \subseteq b \longleftrightarrow a \cup b = b .$$

L'on a alors : $a \subseteq b$ entraîne, quel que soit x, $ax \subseteq bx$, $xa \subseteq xb$.

Un gerbier G est dit résidué si, pour tout couple a, b d'éléments de G, les deux conditions suivantes sont réalisées :

a. Il existe un élément x de G tel que $bx \subseteq a$, et l'ensemble des x ayant ces propriétés admet un élément maximum noté $a .\cdot b$ et appelé résiduel à droite de a par b.

b. Il existe un élément y de G tel que $yb \subseteq a$ et l'ensemble des éléments de G ayant cette propriété admet un élément maximum noté $a^{\cdot}.b$ et appelé résiduel à gauche de a par b.

Lorsque la multiplication de G est commutative, le gerbier G est dit commutatif, et l'on écrit $a : b$ au lieu de $a .\cdot b = a^{\cdot}.b$.

2. Rappelons les propriétés des résiduels qui serviront dans la suite :

a. $a \subseteq b$ entraîne $x .\cdot a \supseteq x .\cdot b$ et $x^{\cdot}.a \supseteq x^{\cdot}.b$ et $a .\cdot x \supseteq b .\cdot x$, $a^{\cdot}.x \supseteq b^{\cdot}.x$, quels que soient a, b, x éléments de G, supposé résidué.

b. $(a .\cdot b) .\cdot c = a .\cdot bc$ et $(a^{\cdot}.b)^{\cdot}.c = a^{\cdot}.cb$, $\forall a, b, c$, éléments du gerbier résidué G.

c. $a \subseteq x^{\cdot}.(x .\cdot a)$, $\forall a, x$ éléments de G, l'égalité n'ayant lieu que si

a est un résiduel à gauche de x, soit $a = x^\circ . y$. De même $a \subseteq x.^\circ(x^\circ.a)$, l'égalité n'avant lieu que si a est un résiduel à droite de x ; soit $a = x.^\circ z$, $z \in G$.

Si G a un élément unité e $(ae = ea = a, \quad \forall a \in G)$ on a toujours, $\forall x \in G$, $x = x.^\circ e = x^\circ.e$ et par suite $x = x.^\circ(x^\circ.x) = x^\circ.(x.^\circ x)$.

3. <u>But de l'exposé.</u>

MOLINARO ([4]) a découvert une classe de gerbiers <u>commutatifs</u> à élément unité, résidués, plus généraux que les gerbiers intégralement fermés introduits par Mme DUBREIL-JACOTIN ([2], deuxième partie) qu'il a appelés les gerbiers <u>nomaux</u> :

Soit G un gerbier commutatif, à élément unité, résidué ; MOLINARO note $\mathcal{Q}_x$ l'équivalence suivante définie dans G :

$$a, b \in G, \quad x \in G \text{ donné}, \quad a \mathcal{Q}_x b \longleftrightarrow x : a = x : b \quad .$$

Il appelle <u>élément nomal</u> un élément x, s'il existe, tel que :

$$\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}_{x:\mu}, \quad \forall \mu \in G \quad .$$

Un gerbier nomal est alors un gerbier possédant un élément nomal. MOLINARO montre qu'un gerbier est nomal si et seulement si, il admet un idempotent maximum positif. On retrouve les gerbiers intégralement fermés lorsque cet idempotent maximum est l'élément unité de G.

Le but de cet exposé est de définir des éléments nomaux dans le cas non commutatif :

G étant un gerbier non nécessairement commutatif, à élément unité, résidué, définissons dans G les équivalences suivantes :

$a, b \in G$, $x \in G$ donné, $a \mathcal{Q}_x b \longleftrightarrow x.^\circ a = x.^\circ b$, (notation $a \equiv b(\mathcal{Q}_x)$)

$a, b \in G$, $x \in G$ donné, $a\,{}_x\mathcal{Q}\,b \longleftrightarrow x^\circ.a = x^\circ.b$, (notation $a \equiv b({}_x\mathcal{Q})$).

Nous dirons qu'un élément x de G est <u>nomal à droite</u> si :

1° x est équirésiduel : $x.^\circ a = x^\circ.a$, $\forall a \in G$ (1)

2° $\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}_{x:\mu}$, $\forall \mu \in G$.

et qu'un élément x de G est <u>nomal à gauche</u> si :

1° x est équirésiduel.

2° ${}_x\mathcal{Q} = {}_{x:\mu}\mathcal{Q}$, $\forall \mu \in G$.

Notons de suite qu'il ne faut pas confondre " x symétrique", (c'est-à-dire

---

(1) x étant équirésiduel, nous conviendrons de noter $x : a$ la quantité $x^\circ.a = x.^\circ a$.

$\mathcal{Q}_x = {}_x\mathcal{Q}$), avec " x équirésiduel", tout élément équirésiduel étant évidemment symétrique, mais la réciproque n'étant pas vraie en général.

Nous montrons alors qu'un gerbier qui a un élément nomal d'un côté, a un élément nomal à la fois à droite et à gauche. Il n'y aura donc pas lieu de parler de gerbier nomal d'un côté, mais de gerbier nomal, un gerbier nomal étant un gerbier ayant un élément nomal d'un côté. Alors, un gerbier est nomal, si et seulement si il admet un idempotent maximum équirésiduel.

Si l'on prend pour G, le gerbier des $\mathcal{O}$-idéaux d'un ordre maximal $\mathcal{O}$ introduits par ASANO ([1]), on s'aperçoit qu'il admet l'élément unité $\mathcal{O}$ comme idempotent maximum commutatif, donc équirésiduel (théorème II, 2) et que par suite, il est nomal. Notre théorie recouvre donc la théorie d'ASANO et lui donne, pour ainsi dire, un cadre agréable.

II

1. Démontrons d'abord quelques lemmes.

LEMME 1. - $\bar{a} = x^{\cdot}.(x.^{\cdot}a)$ est élément maximum de la classe de a modulo $\mathcal{Q}_x$, $\forall a \in G$:

En effet, on a $x.^{\cdot}a = x.^{\cdot}[x^{\cdot}.(x.^{\cdot}a)]$ d'après la propriété (c) rappelée en I, 2, et de plus $a \leq x^{\cdot}.(x.^{\cdot}a)$. En particulier $x^{\cdot}.x$ est l'élément maximum de la classe de e et $x = x^{\cdot}.(x.^{\cdot}x)$ est élément maximum de la classe de x.

$\mathcal{Q}_x$ est une équivalence régulière pour l'union et régulière à droite pour la multiplication, telle que x est maximum dans sa classe, modulo $\mathcal{Q}_x$. Soit $\mathcal{R}$ une équivalence définie dans G, régulière pour l'union, régulière à droite pour la multiplication et telle que x soit maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}$, alors, on a le lemme suivant :

LEMME 2. - $\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{Q}_x$, (c'est-à-dire $a\mathcal{R}b$ entraîne $a\,\mathcal{Q}_x\,b$) : soit $a \equiv b(\mathcal{R})$, $x = a(x.^{\cdot}a) \cup x \equiv b(x.^{\cdot}a) \cup x(\mathcal{R})$, d'après la régularité de $\mathcal{R}$ à droite pour la multiplication, et sa régularité pour l'union.
On déduit $b(x.^{\cdot}a) \subseteq x$, donc $x.^{\cdot}a \subseteq x.^{\cdot}b$ et de même $x.^{\cdot}a \supseteq x.^{\cdot}b$ donc $x.^{\cdot}a = x.^{\cdot}b$ et $a \equiv b(\mathcal{Q}_x)$.

LEMME 3. - Si une classe A modulo $\mathcal{R}$, contient un résiduel à gauche ω de x, cet élément est maximum dans sa classe et par suite une classe ne peut contenir plus d'un résiduel à gauche de x.

Soit $a \equiv \omega(\mathcal{R})$ avec $\omega = x^{\cdot}.\mu$, on a $a\mu \equiv \omega\mu(\mathcal{R})$, mais $\omega\mu \leq x$ donc $a\mu \leq x$ (régularité de $\mathcal{R}$ par rapport à l'union) et $a \leq x^{\cdot}.\mu = \omega$.

Bien entendu, on a les lemmes "symétriques" en échangeant partout "à droite" et "à gauche" et en remplaçant $\mathcal{A}_x$ par ${}_x\mathcal{A}$.

2. <u>Nous sommes en mesure d'énoncer alors les caractérisations suivantes des éléments nomaux à droite.</u>

THÉORÈME 1. - Un élément x de G est nomal à droite si et seulement si :

1° x est équirésiduel.

2° $(x : \mu x) \equiv e(\mathcal{A}_x)$.

En effet, si $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_{x:\mu}$, $\forall \mu \in G$, on a en calculant l'élément maximum de la classe de x modulo $\mathcal{A}_x$ et l'élément maximum de la classe de x modulo $\mathcal{A}_{x:\mu}$ (lemme 1) :

$$x = (x : \mu)^{\circ}.[(x : \mu).^{\circ}x] = x^{\circ}.[(x : \mu).^{\circ}x]\,\mu = x^{\circ}.[x.^{\circ}\mu x]\,\mu \quad .$$

Donc $x = x^{\circ}.e = x^{\circ}.[x.^{\circ}\mu x]\mu$ et par suite $(x : \mu x)\mu \equiv e$ $({}_x\mathcal{A} = \mathcal{A}_x)$. Réciproquement, si l'on a les conditions 1° et 2° du théorème, on a $x = (x : \mu)^{\circ}.[(x : \mu).^{\circ}x]$ et par suite x est élément maximum dans sa classe modulo $\mathcal{A}_{x:\mu}$ (lemme 3 où l'on fait $\mathcal{R} = \mathcal{A}_{x:\mu}$). D'après le lemme 2 , $\mathcal{A}_{x:\mu}$ est plus fine que $\mathcal{A}_x$. Mais $a\mathcal{A}_x b$ entraîne $a\mathcal{A}_{x:\mu} b$ car $x : a = x : b$ entraîne $x : \mu a = (x^{\circ}.a)^{\circ}.\mu = (x^{\circ}.b)^{\circ}.\mu = x : \mu b$. Donc $\mathcal{A}_x$ est égal à $\mathcal{A}_{x:\mu}$, $\forall \mu \in G$.

LEMME. - Pour qu'un élément x de G soit nomal à droite, il suffit que les conditions suivantes soient simultanément réalisées :

1° x est équirésiduel.

2° Il existe k de G tel que $x : xk = x$.

3° Le résiduel à gauche par lui-même de tout résiduel de x est égal à $x : x$.

On a, $\forall k' \in G$, $(x : k'x)^{\circ}.(x : k'x) = x : x$, d'où

$$x^{\circ}.(x : k'x)\,k'x = (x^{\circ}.x)^{\circ}.(x : k'x)\,k' = (x : x)^{\circ}.e$$

et

$$(x : k'x)\,k' \equiv e({}_{x:x}\mathcal{A}) \quad .$$

D'autre part, on a l'égalité : $(x : x).^{\circ}[(x : x)^{\circ}.[(x : x).^{\circ}k]] = (x : x).^{\circ}k$, (propriété (c) de I, 2). Or, pour le k particulier du théorème, $(x : x).^{\circ}k = x.^{\circ}xk = x$. Donc x est résiduel à droite de $x : x$, donc est maximum dans sa classe modulo ${}_{x:x}\mathcal{A}$ (lemme "symétrique" du lemme 3) et par suite (lemme "symétrique" du lemme 2) ${}_{x:x}\mathcal{A}$ est plus fine que ${}_x\mathcal{A} = \mathcal{A}_x$. Mais $a\mathcal{A}_x b$ entraîne $a\,{}_{x:x}\mathcal{A}\,b$ car :

$$(x : x)^{\circ}.a = x : ax = (x.^{\circ}a).^{\circ}x = (x.^{\circ}b).^{\circ}x = x : bx = (x : x)^{\circ}.b \quad .$$

Donc $\mathcal{Q}_x = {}_x\mathcal{Q} = {}_{x:x}\mathcal{Q}$ et l'on a, $\forall k' \in G$, $(x : k' x) k' \equiv e(\mathcal{Q}_x)$, ce qui montre que x est nomal à droite (théorème 1).

Bien entendu, on a le "lemme symétrique" du lemme précédent, que nous n'énoncerons pas.

THÉORÈME 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un gerbier admette un élément nomal à droite est qu'il admette un idempotent maximum équirésiduel.

Remarquons d'abord que, quel que soit $y \in G$, $(y^\bullet.y)^2 = y^\circ.y$, et $(y.^\bullet y)^2 = y.^\circ y$. Posons $z = y^\bullet.y$ et montrons par exemple $z^2 = z$. On a $zy \subseteq y$ et $z^2 y \subseteq zy \subseteq y$ donc $z^2 \subseteq y^\circ.y = z$. Mais $z \supseteq e$ car $ey \subseteq y$ donc $z^2 \supseteq z$ et $z^2 = z$.

Ceci étant, si x est nomal à droite, on a :

$y^2 = y$ entraîne $(x : y).^\circ y = x.^\circ y^2 = x.^\circ y$ et $y(x : y) \subseteq x : y$, d'où $y \subseteq (x : y)^\circ.(x : y)$. Mais ce dernier élément est maximum dans la classe de e modulo $\mathcal{Q}_{x:y} = \mathcal{Q}_x$ donc $(x : y)^\circ.(x : y) = x : x$ et $y \subseteq x : x$, ce qui montre que $x : x$ est l'idempotent maximum.

Montrons que cet idempotent maximum est symétrique : d'abord $a \mathcal{Q}_{x:x}$ b entraîne $a \, {}_{x:x}\mathcal{Q} b$ car $a \mathcal{Q}_{x:x} b$ entraîne $a \mathcal{Q}_x b$, x étant nomal à droite, donc $(x : x)^\circ.a = x : ax = x : bx = (x : x)^\circ.b$. Ensuite $a \, {}_{x:x}\mathcal{Q} b$ entraîne $a \mathcal{Q}_{x:x} b$, car $(x : x)^\circ.a = (x : x)^\circ.b$ entraîne $x : ax = x : bx = u$, mais la condition de nomalité à droite fournit

$$(x : ax)\ a \equiv (x : bx)\ b \equiv e(\mathcal{Q}_x) \quad ,$$

donc

$$x : ua = x : ub = x$$

et

$$(x.^\circ u).^\circ a = (x : u).^\circ b$$

et $a \mathcal{Q}_{x:u} b$ et $a \mathcal{Q}_{x:x} b$ puisque x est nomal à droite.

Montrons enfin qu'un idempotent maximum symétrique est équirésiduel. Soit θ l'idempotent maximum symétrique. La classe de e dans $\mathcal{Q}_\theta = {}_\theta\mathcal{Q}$ a pour élément maximum $\theta.^\circ\theta = \theta^\circ.\theta = \theta$. On a, à cause de la régularité vis-à-vis de la multiplication de $\mathcal{Q}_\theta = {}_\theta\mathcal{Q}$, $a\theta \equiv a \equiv \theta a (\mathcal{Q}_\theta = {}_\theta\mathcal{Q})$, et $\theta.^\circ a = \theta.^\circ a\theta$, $\theta^\circ.a = \theta^\circ.\theta a$. Posons $\theta.^\circ a\theta = x$ et $\theta^\circ.\theta a = y$. Prouvons $x = y$. On a successivement $a\theta x \subseteq \theta$, $\theta a \theta x \subseteq \theta$, $\theta a \theta x \theta a \theta \subseteq \theta a \theta$, $x\theta a\theta \subseteq \theta a \theta.^\circ \theta a \theta \subseteq \theta$, $x\theta a \subseteq \theta^\circ.\theta = \theta$ et $x \subseteq y$: de même, on montrerait que $x \supseteq y$ donc $x = y$ et $\theta.^\circ a = \theta^\circ.a$, $\forall a \in G$.

Réciproquement, si G a un idempotent maximum équirésiduel θ , cet élément vérifie les trois conditions du lemme : pour la deuxième, il suffit de prendre

$k = e$, pour le troisième, il suffit de se rappeler que $(\theta : p)^{\cdot}.(\theta : p)$ est un idempotent, $\forall p \in G$, et que $(\theta : p)\, p \leq \theta$, donc
$\theta : [(\theta : p)\, p] \supseteq \theta : \theta = \theta$, (propriété (a) de I, 2) et
$(\theta : p)^{\cdot}.(\theta : p) = \theta$. De même, on vérifierait que θ vérifie les conditions du "lemme symétrique" du lemme précédent. Donc θ est nomal à droite et nomal à gauche.

COROLLAIRE 1. - Si un gerbier admet un élément nomal d'un côté x , il admet un élément nomal à droite et à gauche $x : x$.

COROLLAIRE 2. - Si x est un élément nomal à droite ou à gauche, nous appelons équivalence nomale l'équivalence $\mathcal{A}_x = {}_x\mathcal{A}$. Si dans un gerbier G il y a une équivalence nomale, celle-ci est unique.

THÉORÈME 3. - Si un gerbier G admet un idempotent maximum commutant avec tout élément de G , cet idempotent maximum est équirésiduel et G est nomal.

Premier point : Soit $c \in G$, tel que $c^2 \leq c\theta = \theta c$, $c \geq \theta$. On a alors $c = \theta$: en effet on a $(c\theta)^2 = c^2 \theta^2 = c^2\theta \leq c\theta$.

De $c \geq \theta$ on déduit $c\theta \geq \theta \geq e$ et $(c\theta)^2 \geq c\theta$ donc $(c\theta)^2 = c\theta$ et $c\theta \leq \theta$. On déduit de là $c \leq \theta^{\cdot}.\theta = \theta$ et $c = \theta$.

Deuxième point : Les conditions :

1° $az \leq \theta$;

2° $aza \leq \theta a$;

3° $za \leq \theta$

sont équivalentes. En particulier $\theta.^{\cdot}a = \theta^{\cdot}.a$, $\forall a \in G$.

De $az \leq \theta$ on déduit $aza \leq \theta a$. De $aza \leq \theta a$, on déduit $(az)^2 \leq \theta az$.
Posons $c = az \cup \theta$, $c^2 = (az)^2 \cup \theta az \cup \theta \leq \theta az \cup \theta = \theta(az \cup \theta)$ et $c^2 \leq c\theta$ donc $c = \theta$, d'après le premier point.

3. Voici enfin une propriété de l'équivalence nomale.

THÉORÈME 4. - Soit un gerbier G nomal, α son idempotent maximum équirésiduel $G/\mathcal{A}_\alpha$ est un groupe.

Posons $a_1 = \alpha.^{\cdot}a\alpha$. On a $\alpha.^{\cdot}a_1\, a = \alpha.^{\cdot}(\alpha.^{\cdot}a\alpha)\, a = \alpha.^{\cdot}e$ d'après la condition de nomalité à droite. Donc $a_1\, a \equiv e(\mathcal{A}_\alpha)$. De même, on a $aa_1 \equiv e(\mathcal{A}_\alpha)$. La classe de a_1 est l'inverse de la classe de a , et $G/\mathcal{A}_\alpha$ est un groupe.

THÉORÈME 5. - Si, dans un gerbier G , une congruence $\mathcal{R}$ est telle que $G/\mathcal{R}$ soit un groupe, et qu'il existe un élément α maximum dans sa classe, alors $\mathcal{R} = \mathcal{A}_\alpha = {}_\alpha\mathcal{A}$ et le gerbier G est nomal, $\mathcal{R}$ étant l'équivalence nomale de G .

Nous entendons par congruence une équivalence régulière pour la multiplication et l'union de G.

<u>Premier point</u> : Montrons d'abord que $\alpha^{\circ}.\alpha = \alpha.^{\circ}\alpha$ est élément maximum de la classe de e mod $\mathcal{R}$. En effet, soit $e_1 \equiv e(\mathcal{R})$, on a $e_1\alpha \equiv \alpha(\mathcal{R})$. Donc $e_1\alpha \subseteq \alpha$ et $e_1 \subseteq \alpha^{\circ}.\alpha$. D'autre part $\alpha = (\alpha^{\circ}.\alpha)\alpha$, car en posant $\alpha^{\circ}.\alpha = v$, on a $v\alpha \subseteq \alpha$ et comme on vient de voir $e \subseteq \alpha^{\circ}.\alpha$, $\alpha \subseteq (\alpha^{\circ}.\alpha)\alpha$ et par suite $\alpha = (\alpha^{\circ}.\alpha)\alpha$. On a donc $e_1\alpha \equiv (\alpha^{\circ}.\alpha)\alpha\ (\mathcal{R})$, d'où, puisque $G/\mathcal{R}$ est un groupe, $e_1 \equiv \alpha^{\circ}.\alpha\ (\mathcal{R})$ et $\alpha.^{\circ}\alpha = \alpha^{\circ}.\alpha$.

<u>Deuxième point</u> : Etant donnée une congruence $\mathcal{R}$ telle que la classe de y ne contienne que des éléments inférieurs ou égaux à y, si toute classe modulo $\mathcal{R}$ contient un résiduel à gauche (à droite) de y, on a $\mathcal{R} = \mathcal{A}_y$ ($\mathcal{R} = {}_y\mathcal{A}$) :

Si le résultat n'était pas vrai, une classe modulo $\mathcal{A}_y$ se décomposerait en plusieurs classes modulo $\mathcal{R}$, car on a, d'après le lemme 2, $a\mathcal{R}b$ entraîne $a\mathcal{A}_y b$. Alors cette classe contiendrait plusieurs résiduels à gauche distincts de y, ce qui est impossible (lemme 3).

<u>Troisième point</u> : Soit une classe A modulo $\mathcal{R}$ et $a \in A$, il existe $a^* \in A'$ tel que $aa^* \equiv a^* a \equiv e(\mathcal{R})$. On a donc :

$$aa^* \subseteq \alpha^{\circ}.\alpha = \alpha.^{\circ}\alpha$$

$$a^* a \subseteq \alpha^{\circ}.\alpha = \alpha.^{\circ}\alpha$$

donc $a^* \subseteq (\alpha.^{\circ}\alpha).^{\circ}a$ et $aa^* \subseteq a[(\alpha.^{\circ}\alpha).^{\circ}a] \subseteq \alpha.^{\circ}\alpha$ et puisque chaque classe modulo $\mathcal{R}$ est convexe, ceci prouve que $a[(\alpha^{\circ}.\alpha).^{\circ}a] \equiv e(\mathcal{R})$. Ceci montre que $[(\alpha^{\circ}.\alpha).^{\circ}a]$ appartient à A^{-1}, inverse de A dans le groupe $G/\mathcal{R}$. On déduit que $(\alpha^{\circ}.\alpha).^{\circ}[(\alpha^{\circ}.\alpha).^{\circ}a] \in A$: toute classe contient un résiduel à droite de α et de même de $\alpha.^{\circ}\alpha = \alpha^{\circ}.\alpha$. On démontrerait de même que toute classe de $\mathcal{R}$ contient un résiduel à gauche de α et même de $\alpha.^{\circ}\alpha$. On a donc d'après le deuxième point : $\mathcal{R} = \mathcal{A}_\alpha = {}_\alpha\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\alpha:\alpha} = {}_{\alpha:\alpha}\mathcal{A}$.

<u>Quatrième point</u> : $\beta = \alpha.^{\circ}\alpha = \alpha^{\circ}.\alpha$ est un idempotent maximum équirésiduel, car nous avons vu qu'il est symétrique : $\mathcal{R} = \mathcal{A}_\beta = {}_\beta\mathcal{A}$, donc équirésiduel (voir démonstration du théorème 2) si nous montrons que β est idempotent maximum. Or, dans $G/\mathcal{R}$, la classe de β est la classe de e et c'est aussi la classe de tous les éléments idempotents, qui sont donc inférieurs à β (premier point). D'après le théorème 2, G est nomal.

4. <u>Conclusion</u>.

MOLINARO a développé dans sa thèse l'étude des gerbiers nomaux commutatifs en mettant en évidence des types de gerbiers nomaux se rapprochant de plus en plus des gerbiers intégralement fermés. Une étude parallèle doit être possible dans le cas non commutatif.

De plus, P. DUBREIL ([3]) a donné une interprétation de la théorie de MOLINARO. Cette théorie apporte une généralisation du passage d'un domaine d'intégrité à élément unité, noethérien, intégralement fermé, à sa fermeture intégrale dans une extension algébrique finie séparable de son corps des quotients. On peut alors se demander s'il n'existe pas une interprétation analogue dans le cas non commutatif.

Enfin, je veux signaler que, m'étant mis en rapport avec I. MOLINARO, j'ai su qu'il continuait à s'intéresser à ces questions. Il semble, bien que je ne puis encore être plus précis, qu'il ait obtenu des résultats recoupant certains des miens, qu'il n'a pas encore publiés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASANO (Keizo) and MURATA (Kentaro). - Arithmetical ideal theory in semigroups, J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Series A : Math., t. 4, 1953, p. 9-23.

[2] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise), LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[3] DUBREIL (Paul). - Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes, Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles]; p. 29-43. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[4] MOLINARO (Italico). - Généralisation de l'équivalence d'Artin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 1284-1286 et p. 1767-1769.