Paul Jaffard

Valuations d'un anneau noethérien et théorie de la dimension

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, nº 2 (1959-1960), exp. nº 12, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 12

22 février 1960

VALUATIONS D'UN ANNEAU NOETHÉRIEN ET THÉORIE DE LA DIMENSION

par Paul JAFFARD

Tous les anneaux considérés dans cet exposé seront commutatifs et munis d'un élément-unité.

k étant un sous-corps d'un corps K, on désignera par d. t.$[K : k]$ le degré de transcendance de K sur k.

1. Dimension valuative d'un anneau noethérien.

Rappelons d'abord la définition et les principales propriétés de la dimension valuative d'un anneau telles que nous les avons exposées il y a deux ans dans ce séminaire.

A étant un anneau intègre ayant pour corps des fractions K ; on appellera valuation de A toute valuation de K dont l'anneau de valuation contient A. On appellera dimension valuative de A, et on désignera par $\dim_v A$ la borne supérieure des rangs (1) des diverses valuations de A. C'est un entier positif ou nul qui peut être infini. On notera $\operatorname{rg} v$ le rang de la valuation v.

Cette définition se généralise de la façon suivante aux anneaux pouvant avoir des diviseurs de 0 : on appelle dimension valuative de A, et on désigne par $\dim_v A$ la borne supérieure des nombres $\dim_v A/p$ lorsque p parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A.

Désignons par $\dim A$ la dimension ordinaire (au moyen des chaînes d'idéaux premiers) de l'anneau A et par $A^{(n)}$ un anneau de polynômes à n variables sur A. On montre sans peine les relations suivantes :

(1) $\quad \dim A \leqslant \dim_v A$

(2) $\quad \dim_v A^{(n)} = n + \dim_v A$ (2).

Il en résulte que si on a :

(3) $\quad \dim_v A < \infty$

---

(1) Rappelons que le rang d'une valuation est la dimension de son anneau de valuation.

(2) L'inégalité (1) ne peut pas être améliorée. Nous avons démontré en effet [7] que si l'on se donne deux entiers finis ou non d et d', il existe un anneau A tel que $\dim A = d$ et $\dim_v A = d'$ (à condition que $d \leqslant d'$).

il existe des entiers N et δ (avec $\delta \leqslant \dim A$) tels que pour $n \geqslant N$, on ait :

(4) $\dim A^{(n)} = n + \delta$.

En particulier, si

(1') $\dim_v A = \dim A$,

on aura pour tout n :

(4') $\dim A^{(n)} = n + \dim A$.

L'égalité (1') se vérifie immédiatement dans le cas où A est un anneau de Prüfer. Il en résulte donc une démonstration très simple du théorème suivant :

THÉORÈME 1 (SEIDENBERG). - A _étant un anneau de Prüfer, on a pour tout entier_ $n \geqslant 0$:

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A \quad .$$

On a d'autre part, le théorème suivant de démonstration plus délicate ([6], th. 14)

THÉORÈME 2. - _S'il existe deux entiers (finis)_ N _et_ δ _tels que, pour tout_ $n \geqslant N$, _on ait l'égalité (4), la dimension valuative de_ A _est finie et égale à_ δ .

Or, il existe une famille importante d'anneaux satisfaisant aux hypothèses du théorème 2, ce sont les anneaux noethériens. On a, en effet le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (KRULL). - A _étant uh anneau noethérien, on a pour tout entier_ n

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A \quad .$$

On peut donc en conclure:

COROLLAIRE. - _La dimension valuative d'un anneau noethérien est égale à sa dimension ordinaire._

On remarquera que, d'après ce qui précède, si on pouvait démontrer directement ce dernier corollaire, on en déduirait immédiatement le théorème de Krull. Or, nous allons voir sans peine que ce dernier corollaire est équivalent à un théorème dû à ABHYANKAR [1]. Avant d'énoncer ce dernier, donnons quelques définitions supplémentaires :

A étant un anneau intègre et v une valuation de A , on appelle _centre_ de v sur A l'ensemble $\mathfrak{p}$ des éléments x de A tels que $v(x) > 0$ (le groupe des valeurs de v étant noté additivement). On voit immédiatement que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A et que, φ désignant la spécialisation du corps des fractions K de A définie par la valuation v , la spécialisation φ induit sur A l'homomorphisme $A \to A/\mathfrak{p}$. On appellera A-dimension de v et on notera $\dim_A v$ le degré de transcendance de $\varphi(K)$ sur le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$. Ceci posé, le théorème d'Abhyankar s'énonce ainsi :

THÉORÈME 4 (ABHYANKAR). - *Soient A un anneau d'intégrité noethérien local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et v une valuation de A de centre $\mathfrak{m}$ sur A. On a l'inégalité :*

(5) $$\dim_A v + \mathrm{rg}\, v \leqslant \dim A \quad .$$

Montrons d'abord que le théorème 4 est entraîné par le corollaire du théorème 3, K étant le corps des fractions de A, la valuation v correspond à une spécialisation φ de K sur un corps K' contenant le corps $k = A/\mathfrak{m}$. Soit n un entier fini $\leqslant$d. t.$[K' : k]$. On peut trouver une spécialisation φ' de rang n ([3]) du corps K' laissant invariants les éléments de k. (K' contient un sous-corps de la forme $k(x_1, \ldots, x_n)$, les x_i étant algébriquement indépendants sur k. On étend à K' la spécialisation $k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ et on recommence $n - 1$ fois...).

La spécialisation $\psi = \varphi' \varphi$ de K étant de rang $n + \mathrm{rg}\, v$ définit une valuation de A ayant pour rang $n + \mathrm{rg}\, v$. Donc $n + \mathrm{rg}\, v \leqslant \dim_v A$. Le corollaire du théorème 3 entraîne alors :

$$n + \mathrm{rg}\, v \leqslant \dim A \quad .$$

Mais, comme ceci est vrai pour tout entier fini n tel que $n \leqslant$ d. t.$[K' : k]$, on en déduit :

$$\text{d. t.}[K' : k] + \mathrm{rg}\, v \leqslant \dim A \quad .$$

Le théorème 4 en résulte en vertu de l'égalité $\dim_A v =$ d. t.$[K' : k]$ (qui est la définition de $\dim_A v$).

Supposons maintenant vrai le théorème d'Abhyankar et montrons qu'il entraîne le corollaire du théorème 3 :

Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et v une valuation de $A/\mathfrak{p} = B$. Il faut montrer que $\mathrm{rg}\, v \leqslant \dim A$. Désignons par $\mathfrak{q}$ le centre de v sur B. Comme v est une valuation de l'anneau de fractions $B_\mathfrak{q}$ qui est noethérien, local et intègre, le théorème d'Abhyankar montre que $\mathrm{rg}\, v \leqslant \dim B_\mathfrak{q}$, d'où le corollaire, compte tenu de l'inégalité :

$$\dim B_\mathfrak{q} \leqslant \dim B \leqslant \dim A \quad .$$

([3]) C'est-à-dire définissant une valuation de rang n de K' ou encore qui peut se décomposer en un produit de n spécialisations non triviales, et non en un produit de $n + 1$ spécialisations non triviales.

Le théorème d'Abhyankar a un important corollaire dû à ZARISKI :

COROLLAIRE (ZARISKI). - Soit A un anneau d'intégrité noethérien local d'idéal maximal m et de dimension d . Si v est une valuation de A de centre m sur A et de rang 1 , la A-dimension de v est inférieure ou égale à d - 1 .

ZARISKI se sert de ce théorème pour donner une démonstration simple de son "Main Theorem" (cf. paragraphe 6).

La démonstration du théorème d'Abhyankar est plus longue que celle du théorème de Krull et fait appel à des résultats plus profonds puisqu'elle est basée sur les théorèmes de Cohen concernant la structure des anneaux locaux complets [4].

Nous ne donnerons pas ici de démonstration directe du théorème de Krull. Outre la démonstration originale de KRULL, ([10] et [11]), il en existe une très différente, du même ordre de difficulté mais susceptible de s'appliquer à des cas autres que celui des anneaux noethériens et que nous exposons ailleurs [7].

Nous allons par contre donner la démonstration directe du théorème d'Abhyankar.

2. Le théorème d'Abhyankar.

Nous nous proposons donc dans ce paragraphe de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4 (ABHYANKAR). - Soient A un anneau d'intégrité noethérien local d'idéal maximal m et v une valuation de A de centre m sur A . On a l'inégalité :

$$\dim_A v + \operatorname{rg} v \leqslant \dim A \quad .$$

Nous allons procéder en démontrant successivement toute une suite de lemmes. Notre premier but est de démontrer le théorème d'Abhyankar dans le cas où v est une valuation de rang un, c'est-à-dire dans le cas où le groupe des valeurs est un sous-groupe (non nul) du groupe additif des nombres réels. Nous dirons dans ce cas que la valuation v est réelle.

LEMME 1. - Soit A un anneau d'intégrité noethérien local dont le complété A' est intègre (A sera dit alors analytiquement irréductible). Toute valuation v' de A' induit sur A une valuation v ayant même groupe de valeurs et même corps résiduel que v' .

---

(4) Cette longueur plus grande est en partie compensée par la longueur de la démonstration du théorème 2.

Désignons par m et m' les idéaux maximaux de A et A', par p et p' les centres de v sur A et de v' sur A' ($m = m' \cap A$ et $p = p' \cap A$). Comme A' est noethérien, p' a une base finie, soit :

$$p' = (a'_1 , \dots , a'_n) \quad .$$

Posons $s = \inf(v'(a'_1) , \dots , v'(a'_n))$ ($s > 0$ puisque p' est centre de v'). Soient x' un élément quelconque de A', $v'(x') = t$ et q un entier $> t/s$. Soit $x \in A$ tel que $x' - x \in m'^q$. On a :

$$v'(x' - x) > v'(x') \quad ,$$

donc

$$v'(x') = v'(x + (x' - x)) = v'(x) = v(x) \quad ;$$

donc $v(A) = v'(A')$ et v et v' ont même groupe de valeurs.

Un élément quelconque de l'anneau de la valuation v' peut toujours se mettre sous la forme x'/y' (x' , $y' \in A'$) . Comme nous l'avons vu, $\exists x$, $y \in A$ tels que $v'(x - x') > v'(x')$ et $v'(y - y') > v'(y')$. Par suite x/y appartient à l'anneau de la valuation v' et les inégalités :

$$v'\left(\frac{x' - x}{y'}\right) > v'(x'/y') \geqslant 0$$

et

$$v'\left(\frac{x(y' - y)}{yy'}\right) = v'(x/y) + v'\left(\frac{y' - y}{y'}\right) > v'(x/y) \geqslant 0 \quad ,$$

comparées à l'égalité :

$$\frac{x'}{y'} - \frac{x}{y} = \frac{y(x' - x) - x(y' - y)}{yy'}$$

montrent que :

$$v'\left(\frac{x'}{y'} - \frac{x}{y}\right) > 0 \quad .$$

Il en résulte que l'image de $\frac{x'}{y'}$ dans le résiduel de v' est la même que l'image de $\frac{x}{y}$ dans le résiduel de v . D'où le lemme.

LEMME 2. - <u>Le théorème 4 est vérifié lorsque</u> v <u>est une valuation réelle et</u> A <u>un anneau de séries formelles à</u> n <u>variables sur un corps</u> k .

Soit $A = k[[x_1 , \dots , x_n]]$. Posons $B = k[x_1 , \dots , x_n]$ (sous-anneau formé par les polynômes). Soit p l'idéal maximal $(x_1 , \dots , x_n) B$ de B . L'anneau $C = B_p$ est noethérien local d'idéal maximal $m = pB_p$. Son complété est A . Le lemme 1 montre alors que si v est une valuation réelle non nulle de A , ayant pour centre $(x_1 , \dots , x_n)$ sur A , et si w est sa restriction à C , w est non nulle et le résiduel de v est le même que celui de w . Comme les corps résiduels de A et C sont tous deux identiques à k , $\dim_A v = \dim_C w$. Mais on a immédiatement $\dim_C w = \dim_B w$. Comme B est un anneau de polynômes à n variables sur le corps k , et comme w est triviale sur k et de rang 1 , on a $\dim_B w \leqslant n - 1$. L'égalité $\dim A = n$ entraîne alors :

$$\dim_A v + \mathrm{rg}\, v \leqslant \dim A \quad .$$

D'où le lemme.

LEMME 3. - <u>Le théorème 4 est vérifié lorsque</u> v <u>est une valuation réelle et</u> A <u>un anneau de séries formelles à</u> n <u>variables sur un anneau</u> U <u>ayant les propriétés suivantes</u> : U <u>est l'anneau d'une valuation</u> u <u>réelle discrète et il est complet.</u>

Soient donc $A = U[[x_1 , \dots , x_n]]$ et $B = U[x_1 , \dots , x_n]$. Désignons par p une uniformisante locale de U et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal $(p , x_1 , \dots , x_n)$ de B . L'anneau $C = B_{\mathfrak{p}}$ est noethérien local d'idéal maximal $\mathfrak{m} = pB_{\mathfrak{p}}$. Son complété est A . Le lemme 1 montre donc que si v est une valuation réelle non nulle de A ayant pour centre $(p , x_1 , \dots , x_n)$ sur A , et si w est sa restriction à C , w est non nulle et le résiduel L de v est le même que celui de w . Les corps résiduels des anneaux locaux A et C s'identifiant tous deux au corps résiduel k de l'anneau U , on a :

$$\dim_A v = \dim_C w \quad (= \dim_B w) \quad .$$

Désignons par k' et K' les corps des fractions des anneaux U et B , par φ la spécialisation de K' définie par w . On a l'inégalité :

$$\mathrm{d.\,t.}[\varphi(K') : \varphi(k')] \leqslant \mathrm{d.\,t.}[K' : k'] \quad ,$$

mais $\varphi(K')$ étant le résiduel de w et $\varphi(k')$ étant k ,

$$\mathrm{d.\,t.}[\varphi(K') : \varphi(k')] = \dim_B v \quad .$$

D'autre part, $\mathrm{d.\,t.}[\varphi(K') : k] \leqslant n$.

On a donc $\dim_A v \leqslant n$. Comme $\mathrm{rg}\, v = 1$ et $\dim A = n + 1$, on a bien :

$$\dim_A v + \mathrm{rg}\, v \leqslant \dim A \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 4. - <u>Le théorème 4 est vérifié lorsque</u> v <u>est une valuation réelle et que</u> A <u>est complet.</u>

Comme A, d'idéal maximal m, est supposé intègre, dans le cas d'inégale caractéristique, si p désigne la caractéristique du résiduel, l'idéal (p) de A est de rang 1. Le théorème 16 de COHEN [4] montre alors qu'il existe un sous-anneau A_0 de A qui est p-adique (c'est-à-dire un anneau régulier complet et non ramifié) d'idéal maximal m_0 tel que $m \cap A_0 = m_0$, qui a même corps résiduel k que A, même dimension, et tel que A soit un A_0-module fini. Le corps des fractions K de A est donc une extension algébrique (finie) du corps des fractions K_0 de A_0. Soit alors v, une valuation réelle non nulle de A de centre m sur A. Elle induit sur A_0 une valuation réelle non nulle de centre m_0 sur A_0. Le résiduel de v étant algébrique sur le résiduel de v_0, on a donc :

$$\dim_A v = \dim_{A_0} v_0 \quad .$$

Comme $\dim A = \dim A_0$, il suffit de montrer le théorème 4 pour l'anneau A_0 et la valuation v_0. Mais alors deux cas sont possibles ([4], théorème 15) ;

1° Cas d'égales caractéristiques. - A_0 est alors un anneau de séries formelles à n variables sur un corps et le lemme 2 montre le résultat.

2° Cas d'inégales caractéristiques. - Comme A_0 est non ramifié, A_0 est un anneau de séries formelles à n variables sur un p-anneau, c'est-à-dire en particulier, l'anneau d'une valuation réelle et discrète qui est complet. Le lemme 3 montre alors le résultat.

LEMME 5. - Tout quotient d'un anneau noethérien local complet est encore complet.

Soit A un anneau noethérien local complet, m son idéal maximal, α un idéal quelconque de A et $\overline{A} = A/\alpha$. $\overline{A}$ est évidemment local noethérien. Montrons qu'il est complet. Il suffit pour cela de montrer que dans $\overline{A}$ toute série dont le terme général tend vers 0 est convergente. x étant un élément de A, nous désignerons par $\overline{x}$ son image dans $\overline{A}$. Soit $\sum \overline{x_n}$ une telle série. A tout entier n on peut donc associer un entier $m(n)$ tel que $m(n) \to \infty$ si $n \to \infty$ et tel que $\overline{x}_n \in \overline{m}^{m(n)}$ (si $\overline{m} = m/\alpha$). L'inclusion $x_n \in m^{m(n)} + \alpha$ montre que l'on peut écrire $x_n = y_n + a_n$ avec $y_n \in m^{m(n)}$ et $a_n \in \alpha$. Donc $\overline{y_n} = \overline{x_n}$. Comme la série $\sum y_n$ a son terme général qui tend vers 0 dans A, elle converge vers un élément y de A. Il est facile de voir que $\sum \overline{x_n}$ converge vers $\overline{y}$, ce qui achève de montrer ce lemme.

LEMME 6 (Théorème de Zariski). - Le théorème d'Abhyankar est vrai toutes les fois que v est une valuation réelle.

Soit donc A un anneau noethérien local intègre d'idéal maximal m, K son corps des fractions et v une valuation réelle de A ayant pour centre m sur A. Désignons par V l'anneau de la valuation v. A et V sont deux anneaux métriques.

Soient

$$m = (x_1 , \dots , x_n) \qquad \text{et} \qquad \alpha = \inf(v(x_1) , \dots , v(x_n)) > 0 \quad .$$

L'inclusion $x \in m^n$ entraînant $v(x) \geqslant n\alpha$, on voit que l'application identique de A dans V est uniformément continue. On en déduit que cette application se prolonge en un homomorphisme d'anneau φ du complété $\hat{A}$ de A dans le complété $\hat{V}$ de V (tout anneau de valuation de rang 1, quoique non nécessairement noethérien admet un complété). $\hat{V}$ est l'anneau d'une valuation $\hat{v}$ qui prolonge v, qui a même groupe de valeurs, (donc qui est réelle) et qui a même résiduel. Désignons par $\hat{m}$ l'idéal maximal de $\hat{A}$, par m' l'idéal maximal $\varphi(\hat{m})$ de $A' = \varphi(\hat{A})$. En identifiant A à son image par φ, on voit que $A \subset A' \subset \hat{V}$. Comme A a même résiduel que $\hat{A}$, on voit qu'il a encore même résiduel que A' $(m' \cap A = m)$. L'égalité $\hat{m} = m\hat{A}$ entraîne $\varphi(\hat{m}) = \varphi(m)\ \varphi(\hat{A})$ ou $m' = mA'$. Par suite $\hat{v}$ induit sur A' une valuation v' de centre m'.

v et v' ayant même résiduel, A et A' ayant même résiduel, on a :

$$\dim_A v = \dim_{A'} v' \quad .$$

D'autre part, le lemme 4 appliqué à l'anneau A' montre que :

$$1 + \dim_{A'} v' \leqslant \dim A' \quad ,$$

et comme $\dim A' \leqslant \dim \hat{A}$ et $\dim \hat{A} = \dim A$, on a :

$$1 + \dim_{A'} v' \leqslant \dim A \quad ,$$

ce qui achève de montrer le lemme.

Démontrons maintenant dans toute sa généralité le théorème d'Abhyankar par récurrence sur la dimension de l'anneau A.

Si A est de dimension 1, sa fermeture intégrale est un anneau de Dedekind, d'après un théorème de Krull [8], donc une valuation de A ne peut avoir un rang > 1 (c'est-à-dire que $\dim_v A = 1$). Si v est une telle valuation, si L est le résiduel de cette valuation, et m le centre de v sur A, on voit que d. t.$[L : A/m] = 0$, sans cela, on pourrait trouver une spécialisation non triviale de L qui serait triviale sur A/m et par suite une valuation de A strictement plus fine que v, ce qui est impossible, car son rang serait alors $\geqslant 2$.

Le théorème d'Abhyankar est donc vrai pour $\dim A = 1$.

Supposons qu'il ait été démontré toutes les fois que $\dim A < n$, et montrons qu'il est encore vrai si $\dim A = n$.

Soit donc $\dim A = n$, et soit v une valuation de A ayant pour centre sur A son idéal maximal $\mathfrak{m}$. Si v est réelle, le théorème d'Abhyankar résulte du lemme 6. Supposons donc v non réelle. Soit V l'anneau de la valuation v . Montrons que V admet un idéal premier minimal q' . Soit $\mathcal{P}'$ l'ensemble des idéaux premiers non nuls de V et $\mathcal{P}$ les intersections avec A des éléments de $\mathcal{P}'$. $\mathcal{P}'$ étant totalement ordonné par **inclusion,** il en est de même de $\mathcal{P}$. Comme A est de dimension finie, $\mathcal{P}$ admet un plus petit élément. Comme tout élément de $\mathcal{P}'$ a une intersection non nulle avec A (soit $p' \in \mathcal{P}'$ et $x \in p'$, on écrit $x = a/b$ $(a , b \in A)$ et $a \in p' \cap A)$, on en déduit que l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{P}'$ n'est pas réduite à $\{0\}$. C'est l'élément q' cherché. L'anneau $V_{q'}$ est alors l'anneau d'une valuation réelle w moins fine que v . Désignons par K le corps des fractions de A , par K' le corps des fractions de A/q (où $q = A \cap q'$) . La spécialisation φ de K définie par v peut s'écrire $\varphi = \chi\psi$ où ψ est la spécialisation définie par w . Elle est de rang 1 et spécialise K sur un surcorps L de K' . χ spécialise L sur $\varphi(K) = \chi(L) = \Omega$ et induit sur K' une spécialisation χ' qui spécialise K' sur un corps Ω' contenu dans Ω et contenant $A/\mathfrak{m} = k$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\psi"] & L \arrow[r, "\chi"] & \Omega \\
A_q \arrow[u] \arrow[r] & K' \arrow[u, dash] \arrow[r, "\chi'"] & \Omega' \arrow[u, dash] \\
A \arrow[u, dash] \arrow[r] & A/q \arrow[u, dash] \arrow[r] & A/\mathfrak{m} = k \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

<u>Premier cas</u> : $q = \mathfrak{m}$. - En ce cas, la valuation réelle v a pour centre $\mathfrak{m}$ sur A . Comme $\dim_A v = \text{d. t.}[L : k]$, le lemme 6 montre que :

$$1 + \text{d. t.}[L : k] \leqslant \dim A \quad .$$

Mais, d'autre part, ([5] ou [7]) : $\text{d. t.}[\Omega : k] + \operatorname{rg} \chi \leqslant \text{d. t.}[L : k]$ et comme $\operatorname{rg} v = 1 + \operatorname{rg} \chi$

$$\dim_A v = \text{d. t.}[\Omega : k] \quad .$$

On a bien :

$$\dim_A v + \operatorname{rg} v \leqslant \dim A \quad .$$

Deuxième cas : $q \neq m$. - On introduit alors l'anneau local A_q, d'idéal maximal qA_q dont le résiduel est F'. w étant une valuation réelle de A_q ayant pour centre sur A_q son idéal maximal, le lemme 6 montre que :

$$1 + \text{d. t.}[L : F'] \leqslant \dim A_q \quad .$$

Les hypothèses de récurrence appliquées à l'anneau A/q (dont la dimension est $< n$) et à la valuation définie sur cet anneau par la spécialisation χ' montrent que :

$$\operatorname{rg} \chi' + \text{d. t.}[\Omega' : k] \leqslant \dim A/q \quad .$$

Mais d'autre part ([5] ou [7]) :

$$\operatorname{rg} \chi - \operatorname{rg} \chi' \leqslant \text{d. t.}[L : F'] - \text{d. t.}[\Omega : \Omega'] \quad .$$

D'où, en additionnant les trois inégalités précédentes, on a :

$$1 + \operatorname{rg} \chi + \text{d. t.}[\Omega' : k] \leqslant \dim A_q + \dim A/q - \text{d. t.}[\Omega : \Omega']$$

qui, compte tenu des relations :

$$\operatorname{rg} v = 1 + \operatorname{rg} \chi \quad ,$$

$$\dim_A v = \text{d. t.}[\Omega : k] = \text{d. t.}[\Omega : \Omega'] + \text{d. t.}[\Omega' : k] \quad ,$$

$$\dim A_q + \dim A/q \leqslant \dim A$$

permet d'écrire :

$$\dim_A v + \operatorname{rg} v \leqslant \dim A \quad .$$

Le théorème d'Abhyankar est donc bien démontré par récurrence sur $\dim A$.

REMARQUE. - Étant donnée une valuation v d'un corps K, on appelle <u>rang rationnel</u> de v, et on désigne par $\operatorname{rgr} v$ le rang au sens ordinaire du groupe de valeurs G de la valuation v, c'est-à-dire la dimension sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels du produit tensoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$, G étant considéré comme module sur l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers ordinaires. On a toujours $\operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rgr} v$ et ABHYANKAR montre que l'on peut dans l'énoncé du théorème 4 remplacer l'inégalité (4) par l'inégalité plus forte :

$$\dim_A v + \operatorname{rgr} v \leqslant \dim A \quad .$$

La démonstration est la même que celle indiquée ici. Mais on remarquera que cette forme (plus forte) du théorème d'Abhyankar ne semble pas pouvoir se déduire du théorème 3 (de KRULL).

3. Les nombres $\delta(q , p)$.

Rappelons [6] que, q et p étant deux idéaux premiers d'un anneau A, tels que $q \subset p$, on désigne par $\delta(q , p)$ la borne supérieure des nombres d tels que l'homomorphisme canonique $A/q \to A/p$ puisse se prolonger en une spécialisation du corps des fractions de A/q sur une extension de degré de transcendance d du corps des fractions de A/p. On a donc $0 \leqslant \delta(q , p) \leqslant \infty$.

Ceci posé, considérons dans l'anneau de polynômes $A^{(n)}$ les chaînes d'idéaux premiers :

$$\wp_0 \subset \wp_1 \subset \dots \subset \wp_s$$

telles que :

$$\wp_i \cap A = q \quad (0 \leqslant i \leqslant s - 1) \qquad \text{et} \qquad \wp_s = pA^{(n)} ,$$

et désignons par $\lambda(qA^{(n)} , pA^{(n)})$ la borne supérieure des longueurs de ces chaînes particulières.

Nous avons montré dans [6] le résultat suivant :

THÉORÈME 5. - Si $q \neq p$, on a l'égalité :

$$\lambda(qA^{(n)} , pA^{(n)}) = 1 + \inf(n , \delta(q , p)) . \tag{6}$$

Cette égalité est le point de départ des raisonnements qui permettent de montrer que la dimension de $A^{(n)}$ devient une fonction linéaire de n pour n assez grand. Plus exactement, on a [6] le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Si A est un anneau de dimension finie, il existe un nombre N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = (1 + \pi) n + \delta , \tag{7}$$

π et δ étant des entiers constants tels que $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$ et $\pi \leqslant \dim A$.

Nous avons pu montrer (la démonstration sera publiée dans [7]) que, de fait, l'énoncé de ce théorème ne peut pas être bien amélioré : si on se donne à l'avance deux entiers π et δ tels que $0 \leqslant \pi \leqslant \delta$ il existe un anneau A tel que pour tout entier n suffisamment grand, on ait l'égalité (7).

Les résultats sont particulièrement simples dans le cas où A est un anneau de dimension 1. Trois cas seulement sont alors possibles :

a. $\dim A^{(n)} = 2n + 1$ pour tout n ;

b. $\dim A^{(n)} = n + 1$ pour tout n ;

c. $\exists N$ tel que :

$$\dim A^{(n)} = 2n + 1 \qquad \text{pour } n \leqslant N$$

$$\dim A^{(n)} = n + N + 1 \qquad \text{pour } n \geqslant N \quad .$$

Lorsque A est un anneau intègre, on peut interpréter simplement $\delta((0)\ ,\ p)$ au moyen des valuations de A .

Si v et w sont deux valuations de A , nous dirons que v est <u>plus fine</u> que w , et nous écrirons $w \leqslant v$ si l'anneau de la valuation w contient l'anneau de la valuation v . Nous écrirons $w < v$ si v est strictement plus fine que w . Ceci posé, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - p <u>étant un idéal premier de l'anneau d'intégrité</u> A , $\delta((0)\ ,\ p)$ <u>est la borne supérieure des longueurs des chaînes</u> :

$$v_0 < v_1 < \dots < v_n$$

<u>de valuations de</u> A ; <u>ayant toutes</u> p <u>pour centre sur</u> A .

Ce résultat étant trivial si $p = (0)$, nous supposerons $p \neq (0)$. Soient k le corps des fractions de A/p , K le corps des fractions de A et $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ une chaîne de valuations de A ayant toutes pour centre p sur A . On en déduit une chaîne de $n + 1$ spécialisations (non triviales puisque $p \neq (0)$) :

$$K \overset{\varphi_0}{\to} K_0 \overset{\varphi_1}{\to} K_1 \to \dots \overset{\varphi_n}{\to} K_n \quad ;$$

(la valuation v_i correspond à la spécialisation $\varphi_i\, \varphi_{i-1} \cdots \varphi_0$ de K) v_0 ayant pour centre p sur A , φ_0 induit sur A l'homomorphisme $A \to A/p$ et par suite K_0 peut être considéré comme un surcorps de k . Chacune des valuations v_i ayant pour centre p sur A , l'anneau A/p (et par suite le corps k) reste invariant dans la spécialisation $\varphi = \varphi_n \cdots \varphi_1$ de K_0 . Comme celle-ci a un rang au moins égal à n ,

$$n \leqslant \text{d. t.}[K_0 : k] \qquad \text{et} \qquad n \leqslant \delta((0)\ ,\ p) \quad .$$

Réciproquement, soit n un entier fini inférieur ou égal à $\delta((0)\ ;\ p)$. Il existe une spécialisation φ_0 de K prolongeant l'homomorphisme $A \to A/p$ telle que $\text{d. t.}[\varphi_0(K) : k] \geqslant n$. Il existe alors une spécialisation ψ de $\varphi_0(K)$ de rang n triviale sur k . La spécialisation ψ peut s'écrire comme produit de n spécialisations non triviales $\psi = \varphi_n \cdots \varphi_1$. Soit v_i la valuation de K correspondant à la spécialisation $\varphi_i \dots \varphi_1 \varphi_0$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Toutes ces valuations ont pour centre p sur A et on a :

$$v_0 < v_1 < \dots < v_n \quad .$$

Il existe donc une chaîne de longueur n formée par n valuations de A ayant p pour centre sur A. D'où la proposition 1.

COROLLAIRE. - Si A est un anneau d'intégrité noethérien local d'idéal maximal m, on a l'inégalité :

(8) $$\delta((0)\ ,\ m) \leqslant \sup(0\ ,\ \dim A - 1) \quad .$$

Si $\dim A = 0$, A est un corps, $m = (0)$ et il n'y a qu'une soule valuation de A dont le centre est (0), c'est la valuation triviale. Supposons donc $\dim A \neq 0$. Soit alors $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ une chaîne de valuations de A ayant toutes m pour centre sur A. On a :

$$\operatorname{rg} v_n \geqslant \operatorname{rg} v_0 + n \geqslant 1 + n$$

($m \neq (0)$ entraîne que v_0 n'est pas triviale, donc $\operatorname{rg} v_0 \geqslant 1$). Or, d'après le théorème d'Abhyankar, $\operatorname{rg} v_n \leqslant \dim A$.

D'où l'inégalité $\dim A \geqslant 1 + n$ qui entraîne le corollaire.

Nous nous proposons dans le prochain paragraphe de déterminer exactement les nombres $\delta(q\ ,\ p)$ dans le cas où A est un anneau noethérien. Comme $\delta(q\ ,\ p) = \delta((0)\ ,\ \bar{p})$ dans l'anneau A/q, on peut donc toujours se ramener au cas $q = (0)$ (et A intègre). Comme $\delta((0)\ ,\ p) = \delta((0)\ ,\ pA_p)$ dans l'anneau A_p, on peut toujours se ramener au calcul de $\delta((0)\ ,\ m)$ dans un anneau local intègre d'idéal maximal m. Nous montrerons qu'en fait l'inégalité (8) est une égalité.

4. Le théorème de Sakuma.

Soient A un anneau local intègre (non nécessairement noethérien) et m son idéal maximal. Nous allons d'abord donner une nouvelle interprétation du nombre $\delta((0)\ ,\ m)$.

Soit K le corps des fractions de A. Des éléments $y_1, \dots, y_n$ de K seront dits totalement indépendants (sur A) s'ils vérifient la condition suivante :

(T. I.) Soit $P \in A[Y_1, \dots, Y_n]$ un polynôme en $Y_1, \dots, Y_n$ à coefficients dans A tels que $P(y_1, \dots, y_n) = 0$. On a alors $P \in m[Y_1, \dots, Y_n]$.

Soit N la borne supérieure (finie ou non) des entiers n tels qu'il existe n éléments de K totalement indépendants (sur A). On dira que N est le poids de l'anneau local A .

A titre d'exemple, montrons la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Le poids d'un anneau de valuation est nul.

Soient A un anneau de valuation et $y \in K$. Si $y \in A$, y annule le polynôme $Y - y$ qui n'est pas contenu dans $m[Y]$ et si $y \notin A$, l'appartenance $1/y \in A$ montre que y annule $\frac{1}{y} Y - 1$ qui est élément de $A[Y]$, et n'est pas élément de $m[Y]$. D'où la proposition.

THÉORÈME 7. - Le poids de l'anneau local A est égal à $\delta((0) , m)$.

Soit φ une spécialisation de K sur un corps K' qui prolonge l'homomorphisme $A \to A/m = k$ et telle que $d. t.[K' : k] \geqslant n$ (n fini). Soit $y_1 , \dots , y_n$ un ensemble de n éléments de K tels que $\varphi(y_1) , \dots , \varphi(y_n)$ soient des éléments finis, algébriquement indépendants sur k , et soit P un polynôme $\in A[Y_1 , \dots , Y_n]$ tel que $P(y_1 , \dots , y_n) = 0$. Désignons par $\overline{P}$ le polynôme $\in k[Y_1 , \dots , Y_n]$ obtenu en remplaçant les coefficients de P par leurs images dans φ (c'est-à-dire dans $A/m = k$). La relation $P(y_1 , \dots , y_n) = 0$ entraîne $\overline{P}(\varphi(y_1) , \dots , \varphi(y_n)) = 0$ et comme les $\varphi(y_i)$ sont algébriquement indépendants sur k , ceci entraîne $\overline{P} = 0$, c'est-à-dire $P \in m[Y_1 , \dots , Y_n]$. Donc les y_i sont totalement indépendants et si N désigne le poids de A , on a l'inégalité $N \geqslant \delta((0) , m)$.

Soit maintenant n éléments $y_1 , \dots , y_n$ de K totalement indépendants sur A et considérons le sous-anneau B de K défini par $B = A[y_1 , \dots , y_n]$. Tout élément x de B peut s'écrire sous la forme $x = P(y_1 , \dots , y_n)$, où P est un polynôme $\in A[Y_1 , \dots , Y_n]$. Si $Q \in A[Y_1 , \dots , Y_n]$ tel que $x = P(y_1 , \dots , y_n) = Q(y_1 , \dots , y_n)$, on en déduit puisque les y_i sont totalement indépendants sur A : $\overline{P} = \overline{Q}$. Par suite, l'application $x \to \overline{P}$ est biunivoque et définit un homomorphisme de B sur $k[Y_1 , \dots , Y_n]$. On peut prolonger cet homomorphisme en une spécialisation φ du corps K sur un corps K' . Comme φ induit sur A l'homomorphisme $A \to A/m = k$ et comme $d. t.[K' : k] \geqslant n$, on en déduit $\delta((0) , m) \geqslant n$ et par suite $\delta((0) , m) \geqslant N$, ce qui achève de montrer le théorème.

Soit encore un anneau local intègre A (non nécessairement noethérien) d'idéal maximal m . Des éléments $x_1 , \dots , x_r$ de m seront dits analytiquement indépendants s'ils vérifient la condition suivante :

(I. A.) Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme homogène (forme) en $X_1, \dots, X_n$ à coefficients dans A tel que $P(x_1, \dots, x_n) = 0$. On a alors :

$$P \in m[X_1, \dots, X_n] \quad .$$

Ceci posé, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - Soient A un anneau local intègre (non nécessairement noethérien) de corps des fractions K, $y_1, \dots, y_n$ des éléments de K et $t_0, \dots, t_n$ des éléments de A tels que $y_i = t_i/t_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
Pour que les éléments $y_1, \dots, y_n$ soient totalement indépendants sur A, il faut et il suffit que les éléments $t_0, t_1, \dots, t_n$ soient analytiquement indépendants.

Supposons les y_i totalement indépendants et soit $P \in A[X_0, X_1, \dots, X_n]$ une forme de degré s telle que $P(t_0, \dots, t_n) = 0$.
Cette dernière égalité s'écrit $t_0^s P(1, y_1, \dots, y_n) = 0$. Comme les y_i sont totalement indépendants, il en résulte

$$P(1, X_1, \dots, X_n) \in m[X_1, \dots, X_n]$$

ce qui entraîne

$$P(X_0, X_1, \dots, X_n) \in m[X_0, X_1, \dots, X_n] \quad .$$

Par suite, les t_i sont analytiquement indépendants.

Réciproquement, supposons les t_i analytiquement indépendants et soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme de degré s tel que $P(y_1, \dots, y_n) = 0$. La forme $Q = X_0^s P(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0) \in A[X_0, X_1, \dots, X_n]$ est telle que $Q(t_0, \dots, t_n) = 0$. Les t_i étant analytiquement indépendants, on en déduit $Q \in m[X_0, X_1, \dots, X_n]$, ce qui entraîne $P \in m[X_1, \dots, X_n]$, et les y_i sont bien totalement indépendants.

COROLLAIRE 1. - Soit A un anneau local intègre (non nécessairement noethérien) d'idéal maximal m. Le poids $\delta(0, m)$ de A est égal à $\sup(0, M)$, où M est la borne supérieure des entiers $n - 1$ tels qu'il existe n éléments de m analytiquement indépendants.

COROLLAIRE 2 (ABHYANKAR, ZARISKI, SATÔ) [5]. - Soient A un anneau d'intégrité noethérien local de dimension $d > 1$, K son corps des fractions, m son idéal

(5) Démontré par ABHYANKAR et ZARISKI [3] dans le cas où A est anneau local régulier, puis par SATÔ [15] dans le cas général.

maximal et $k = A/\mathfrak{m}$ son résiduel. Soient $\{x_1 , \dots , x_d\}$ un système de paramètres de A, et posons $y_i = x_i/x_1$ $(2 \leqslant i \leqslant d)$.

Soit B le sous-anneau $A[y_2 , \dots , y_d]$ de K. L'anneau $B/\mathfrak{m}B$ s'identifie canoniquement à l'anneau de polynômes $k[Y_2 , \dots , Y_d]$.

Il résulte du fait que, dans un anneau noethérien local, des éléments faisant partie d'un système de paramètres sont analytiquement indépendants [12].

THÉORÈME 8. - *Si* A *est un anneau d'intégrité local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *on a l'égalité* :

$$\delta(0 , \mathfrak{m}) = \sup(0 , \dim A - 1) \quad .$$

L'égalité est évidente si $\dim A = 0$. Supposons donc $\dim A \geqslant 1$. Le corollaire de la proposition 1 a montré que $\delta(0 , \mathfrak{m}) \leqslant \sup(0 , \dim A - 1)$. Montrons l'inégalité en sens inverse. Il existe dans $\mathfrak{m}$ un système de paramètres formé de $\dim A$ éléments. Comme ces éléments sont analytiquement indépendants, le corollaire 1 de la proposition 3 montre que $\delta(0 , \mathfrak{m}) \geqslant \dim A - 1$. D'où le théorème.

COROLLAIRE 1 (SAKUMA). - *Si* A *est un anneau d'intégrité local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *il existe une valuation de* A *ayant* $\mathfrak{m}$ *pour centre sur* A *et de rang* $\dim A$.

C'est trivial si $\dim A = 0$. Supposons $d = \dim A > 0$.

D'après le théorème 8 et la proposition 1, il existe une suite

$$v_0 < v_1 < \dots < v_{d-1}$$

de valuations de A ayant toutes $\mathfrak{m}$ pour centre sur A.

Comme v_0 a un centre sur A distinct de (0), v_0 n'est pas triviale, donc $\mathrm{rg}\, v_0 \geqslant 1$ et $\mathrm{rg}\, v_{d-1} \geqslant d - 1 + \mathrm{rg}\, v_0 \geqslant d$.

Le théorème d'Abhyankar (théorème 4) montre, d'autre part, que $\mathrm{rg}\, v_{d-1} \leqslant d$. Donc $\mathrm{rg}\, v_{d-1} = d$ et on a bien le corollaire.

On remarquera que $\mathrm{rg}\, v_0 = 1$ et que si L et L_{d-1} sont les corps résiduels respectifs de v_0 et v_{d-1} on a :

$$\mathrm{d.\,t.}[L : A/\mathfrak{m}] \geqslant \mathrm{d.\,t.}[L_{d-1} : A/\mathfrak{m}] + d - 1 \geqslant d - 1 \quad .$$

On a donc $\dim_A v_0 \geqslant d - 1$. Le lemme 6 entraîne alors $\dim_A v_0 = d - 1$ et on peut énoncer le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. - *Si* A *est un anneau d'intégrité local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *il existe une valuation réelle* v *de* A *de centre* $\mathfrak{m}$ *sur* A *et telle que* $\dim_A v = \dim A - 1$.

A désignant un anneau quelconque, q et p deux idéaux premiers de A tels que $q \subset p$; désignons par $\ell(q, p)$ la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers dont le premier terme est q et le dernier p $(0 \leqslant \ell(q, p) \leqslant \infty)$. Ceci posé, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. - Si q et p sont deux idéaux premiers d'un anneau noethérien A tels que $q \subset p$, on a l'égalité :

$$\delta(q, p) = \sup(0, \ell(q, p) - 1) \quad .$$

En effet $\delta(q, p)$ est le poids de l'anneau noethérien local $B = (A/q)_{p/q}$ lequel a pour dimension $\ell(q, p)$.

COROLLAIRE 4. - Si q et p sont deux idéaux premiers d'un anneau noethérien A , tel que $q \subset p$, on a l'égalité :

$$\lambda(qA^{(n)}, pA^{(n)}) = 1 + \inf(n, \ell(q, p) - 1) \quad .$$

C'est une conséquence du corollaire 3 et du théorème 5.

En particulier, si $\ell(q, p) = 1$, c'est-à-dire si p est un suridéal premier immédiat de q , on a $\delta(q, p) = 0$. Ceci peut se démontrer directement sans difficulté en utilisant le fait que la fermeture intégrale d'un anneau d'intégrité noethérien local de dimension 1 est un anneau de Dedekind. Appelons anneau léger tout anneau commutatif tel que $\ell(q, p) = 1$ entraîne $\delta(q, p) = 0$. On voit alors sans peine que tout anneau noethérien est léger.

Or, nous avons montré le théorème suivant [7] :

THÉORÈME 9. - Soit A un anneau tel que $A^{(n)}$ soit léger pour tout entier n positif ou nul. On a pour toute valeur de n :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A \quad .$$

C'est de ce théorème que nous déduisons une nouvelle démonstration du théorème de Krull, compte tenu du fait que, si A est noethérien, $A^{(n)}$ est toujours noethérien, donc léger.

5. Une application géométrique.

Soient A un anneau de polynômes à n variables sur un corps k :

$$A = k[X_1, \dots, X_n]$$

et $A^{(m)}$ l'anneau de polynômes $A[Y_1, \dots, Y_m]$.

On considère les deux espaces affines S^n et S^m et le produit S^{n+m}. Un idéal premier $\mathcal{P}$ de $A^{(m)}$ représente une variété W (k-variété) de S^{n+m}. Soit (x, y) un point générique de W sur k. $\mathcal{P} \cap A = p$ est un idéal premier de $k[X]$ qui représente la variété U de point générique (x) sur k. Par suite U est la projection de W sur S^n.

L'idéal $pA^{(m)}$ a pour zéro générique sur k le point (x, y) avec d. t.$[k(y) : k] = m$, c'est-à-dire que la variété associée à $pA^{(m)}$ est $U \times S^m$. C'est le cylindre de base U.

Soient donc deux variétés U_1 et U_2 de S^n telles que $U_1 \subset U_2$ définies par les idéaux premiers p_1 et p_2 de A tels que $p_2 \subset p_1$. On s'intéresse aux idéaux premiers $\mathcal{P}$ de $A^{(m)}$ tels que $\mathcal{P} \cap A = p_2$ et $\mathcal{P} \subset p_1 A^{(m)}$, c'est-à-dire aux variétés de S^{n+m} qui se projettent suivant U_2 et qui contiennent le cylindre $U_1 \times S^m$. Si $\mathcal{V}(U_1, U_2, m)$ désigne l'ensemble de ces variétés, $\lambda(p_2 A^{(m)}, p_1 A^{(m)}) - 1$ est la longueur maximale des chaînes d'éléments de $\mathcal{V}(U_1, U_2, m)$, longueur qui, d'après le corollaire 3 du théorème 8, est égale à $\inf(m, \ell(p_2, p_1) - 1)$.

Mais $\ell(p_2, p_1) = \dim p_2 - \dim p_1$ (A étant équidimensionnel) $= \dim U_2 - \dim U_1$. La longueur maximale des chaînes d'éléments de $\mathcal{V}(U_1, U_2, m)$ est donc $\inf(m, \dim U_2 - \dim U_1 - 1)$. D'ou le théorème suivant :

THÉORÈME 10. - Soient U_1 et U_2 deux k-variétés de S^n telles que $U_1 \subset U_2$ et $U_1 \neq U_2$.

Si $m \leqslant \dim U_2 - \dim U_1 - 1$, la longueur maximale des chaînes de variétés de S^{n+m} qui se projettent sur U_2 et contiennent le cylindre $U_1 \times S^m$ est égale à m.

Si $m \geqslant \dim U_2 - \dim U_1 - 1$ cette longueur maximale est égale à $\dim U_2 - \dim U_1 - 1$.

COROLLAIRE. - Soient U_1 et U_2 deux k-variétés de S^n telles que $U_1 \subset U_2$ et $U_1 \neq U_2$. La plus petite dimension des k-variétés de S^{n+m} qui se projettent suivant U_2 et contient le cylindre $U_1 \times S^m$ est :

$$\sup(\dim U_2 , 1 + m + \dim U_1) .$$

En effet, cette dimension est $\dim U_2 \times S^m$ - longueur maximale des chaînes. C'est donc $\dim U_2 + m - \inf(m, \dim U_2 - \dim U_1 - 1)$ qui est bien le nombre annoncé.

REMARQUE. - Cette application ne fait intervenir le théorème d'Abhyankar que de façon élémentaire, car on voit sans difficulté que si A est anneau de polynômes à n variables sur un corps k, $\dim_V \hat{A} = n$ et par suite :

$$\delta(q , p) = 1 + \inf(n , \ell(q , p) - 1) .$$

6. Application à la démonstration du "Main Theorem" de Zariski.

Reprenons les définitions et les notations du lemme 6.

Supposons que l'on ait l'égalité $\dim_A v = \dim A - 1$. On a alors : $\dim_{A'} v' = \dim A - 1 = \dim \hat{A} - 1$ et comme $\dim_{A'} v' \leqslant \dim A' - 1$ (lemme 6), on en déduit $\dim A' \geqslant \dim \hat{A}$. Mais, A' étant anneau quotient de $\hat{A}$, on a $\dim A' = \dim \hat{A}$. Si de plus, on suppose l'anneau $\hat{A}$ intègre, c'est-à-dire l'anneau local A analytiquement irréductible, il en résulte que $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$ et que A' s'identifie à $\hat{A}$.

La démonstration du lemme 6 montre que sur $\hat{A}$ la topologie induite par $\hat{V}$ est moins fine que la topologie naturelle.

Pour tout entier $n > 0$, désignons par $\hat{V}_n$ l'ensemble des éléments x de $\hat{V}$ tels que $\hat{v}(x) \geqslant n$ et posons $\mathfrak{L}_n = \hat{V}_n \cap \hat{A}$. L'égalité $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} \mathfrak{L}_n = \{0\}$ et le fait que $\hat{V}$ est un anneau local noethérien complet entraînent l'existence d'un entier $s(n)$ tendant vers l'infini avec n tel que $\mathfrak{L}_n \subset m^{s(n)}$ (voir par exemple [14], page 9, proposition 2). Par suite, sur $\hat{A}$ la topologie naturelle est moins fine que celle induite par $\hat{V}$. Donc $\hat{A}$ est un sous-espace de $\hat{V}$, et, comme A et V sont des sous-espaces respectifs de $\hat{A}$ et de $\hat{V}$, on en déduit que A est un sous-espace de V. On peut donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - A étant un anneau local noethérien analytiquement irréductible d'idéal maximal m et v étant une valuation réelle de A ayant m pour centre sur A, et telle que $\dim_A v = \dim A - 1$, l'anneau A est un sous-espace de l'anneau de valuation V de v.

THÉORÈME 11 ("Main Theorem" de Zariski). - Soient A et A' deux anneaux noethériens locaux d'idéaux maximaux m et m' ayant même corps de fractions K sur lesquels on fait les hypothèses suivantes :

1° A est un sous-anneau de A' ;

2° A est intégralement clos et analytiquement irréductible ;

3° La dimension de A' est supérieure ou égale à la dimension de A et le corps résiduel de A' est une extension algébrique finie du résiduel de A.

4° m' est le seul idéal premier de A' dont l'intersection avec A s'identifie à m.

Alors on a l'égalité $A = A'$.

La marche générale de la démonstration est la suivante :

Nous montrerons d'abord que A est un sous-espace de A'. Par suite, le complété $\hat{A}$ de A s'identifiera à un sous-anneau du complété $\hat{A}'$ de A'. Nous montrerons ensuite que A' est entier sur $\hat{A}$ et nous en déduirons que A' est entier sur A, c'est-à-dire s'identifie à A.

Le corollaire 2 du théorème 8 montre l'existence d'une valuation réelle v de A' ayant m' pour centre sur A et telle que $\dim_{A'} v = \dim A' - 1$. Ceci posé v est une valuation de A ayant pour centre m sur A (à cause de $m' \cap A = m$) et l'inégalité

$$\dim_A v = \mathrm{d.\ t.}[L : A/m] \geqslant \mathrm{d.\ t.}[L : A'/m'] = \dim_{A'} v = \dim A' - 1$$

montre que $\dim_A v = \dim A - 1$ (compte tenu de l'hypothèse 3).

α désignant un nombre réel, désignons par V_α l'ensemble des éléments t de K tels que $v(t) \geqslant \alpha$. Soit n un entier positif quelconque. Comme A est, par hypothèse, analytiquement irréductible, la proposition 4 entraîne l'existence d'un nombre réel α tel que $V_\alpha \cap A \subset m^n$. Comme d'autre part $V_\alpha \cap A'$ est un voisinage de 0 dans A' (démonstration du lemme 6), il existe un entier m tel que $m'^m \subset V_\alpha \cap A'$. L'inclusion $m'^m \cap A \subset m^n$ montre alors que sur A la topologie induite par A' est plus fine que sa topologie naturelle. L'égalité $m = m' \cap A$ montre d'autre part qu'elle est moins fine. Il en résulte que A est un sous-espace de A'. Le complété $\hat{A}$ de A peut donc être considéré comme un sous-anneau du complété $\hat{A}'$ de A'.

Ceci posé, l'hypothèse 4 entraîne que l'idéal mA' est m'-primaire. Par suite, si $\hat{m}$ et $\hat{m}'$ sont les idéaux maximaux de $\hat{A}$ et de $\hat{A}'$, l'idéal $\hat{m}A'$ est $\hat{m}'$-primaire. L'hypothèse 3° et le théorème 8 de COHEN [4] montrent alors que $\hat{A}'$ est un $\hat{A}$-module fini. Donc A' est entier sur $\hat{A}$.

Désignons par $\wp$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A. Comme A est intégralement clos, on a l'égalité :

(1) $$A = \bigcap_{p \in \wp} A_p$$

(cf. par exemple KRULL, [9], page 106).

Mais si $p \in \wp$, l'anneau A_p qui est local, intégralement clos et de dimension 1 est un anneau de valuation (ibidem, page 103) et définit par suite une valuation réelle v_p ayant pour centre p sur A. Désignons par S le complémentaire de p dans A et par $\bar{p}$ la fermeture de p dans $\hat{A}$. La relation $\bar{p} \cap S = \emptyset$ entraîne l'existence d'un idéal premier $\hat{p}$ de $\hat{A}$ contenant l'idéal $\bar{p}$ et tel que $\hat{p} \cap S = \emptyset$, c'est-à-dire $\hat{p} \cap A = p$. Considérons sur A une valuation $\hat{v}$ de centre $\hat{p}$ (sur $\hat{A}$). Elle induit sur A une valuation w de centre p , laquelle s'identifie nécessairement à v_p puisque A_p est anneau de valuation.

Ceci posé, soit x un élément de K n'appartenant pas à A . L'égalité (1) montre l'existence de $p \in \mathcal{P}$ tel que $x \notin A_p$. Par suite $v_p(x) < 0$ et il existe une valuation $\hat{v}$ de $\hat{A}$ telle que $\hat{v}_p(x) < 0$. Donc x n'est pas entier sur $\hat{A}$ et $x \notin A'$. On en déduit $A = A'$, ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (Shreeram). - On the valuations centered in a local domain, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 321-348.

[2] ABHYANKAR (Shreeram). - Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 491-526.

[3] ABHYANKAR (Shreeram) and ZARISKI (Oscar). - Splitting of valuations in extension of local domains, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 41, 1955, p. 84-90.

[4] COHEN (I. S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[5] JAFFARD (Paul). - Dimension des anneaux de polynômes I., Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 11, 1957/58, n° 22, 13 p.

[6] JAFFARD (Paul). - Dimension des anneaux de polynômes, II et Addendum, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 11, 1957/58, n° 25, 20 p.

[7] JAFFARD (Paul). - Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes, Mémorial des Sciences mathématiques (à paraître).

[8] KRULL (Wolfgang). - Ein Satz über primäre Integritätsberichte, Math. Annalen, t. 103, 1930, p. 450-465.

[9] KRULL (Wolfgang). - Idealtheorie. - Berlin, J. Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, 3).

[10] KRULL (Wolfgang). - Beiträge zur Arithmetik kommutativen Integritätsbereiche III : Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Z., t. 42, 1937, p. 745-766.

[11] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.

[12] NORTHCOTT (D. G.). - Ideal theory. - Cambridge, at the University Press, 1953 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 42).

[13] SAKUMA (Motoyoshi). - Existence theorems of valuations centered in a local domain with preassigned dimension and rank, J. Sc. Hiroshima Univ., Series A, t. 21, 1957, p. 61-67.

[14] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mémorial des Sciences mathématiques, 123).

[15] SATÔ (Hazimu). - On splitting of valuations in extension of local domains, J. Sc. Hiroshima Univ., Series A, t. 21, 1957, p. 69-75.

[16] ZARISKI (Oscar). - A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 35, 1949, p. 62-66.