

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GABRIEL THIERRIN

Quelques problèmes concernant la structure des anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 22,
p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A11_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LA STRUCTURE DES ANNEAUX

par Gabriel THIERRIN

1. Radical corpoïdal d'un anneau.

Un anneau A est dit intersersif à droite, si l'on a

$$abA = baA, \quad \text{quels que soient } a, b \in A.$$

On voit facilement qu'un anneau A est intersersif à droite, si et seulement si pour tout triple $a, b, c \in A$, il existe $x \in A$ tel que l'on ait

$$abc = bax.$$

Un idéal B d'un anneau A est dit intersersif à droite, si l'anneau-quotient A/B est intersersif à droite. Tout idéal contenant un idéal intersersif à droite est intersersif à droite. En particulier, tout idéal d'un anneau intersersif à droite est intersersif à droite.

Un A -module (à droite) \mathfrak{K} est dit intersersif, si l'on a

$$uabA = ubaA, \quad \text{quels que soient } u \in \mathfrak{K}, a, b \in A.$$

Si l'anneau A est intersersif à droite, tout A -module est évidemment intersersif.

THÉORÈME 1. - Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il existe un A -module \mathfrak{K} irréductible, fidèle et intersersif.

La condition est nécessaire. Il suffit de prendre $\mathfrak{K} = A$.

La condition est suffisante. Le A -module \mathfrak{K} étant irréductible, si $0 \neq u \in \mathfrak{K}$, on a d'après N. JACOBSON ([1], chapitre I), $\mathfrak{K} = uA \cong A - (0 : u)$ où $(0 : u) = \mathfrak{J}$ est un idéal à droite modulaire maximal. Soient $t \in \mathfrak{J}$ et $x \in A$; on a $txA \subseteq \mathfrak{J}$ et $utxA = uxtA = 0$. D'où $xtA \subseteq \mathfrak{J}$. L'ensemble

$$\mathfrak{J}^{\circ}.A = \{a \mid a \in A, aA \subseteq \mathfrak{J}\}$$

est un idéal à droite de A et $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}^{\circ}.A$. On a donc soit $\mathfrak{J}^{\circ}.A = \mathfrak{J}$, soit $\mathfrak{J}^{\circ}.A = A$. Si $\mathfrak{J}^{\circ}.A = A$, on a $A^2 \subseteq \mathfrak{J}$, ce qui est impossible puisque \mathfrak{J} est modulaire. Par conséquent $\mathfrak{J}^{\circ}.A = \mathfrak{J}$. Comme $xt \in \mathfrak{J}^{\circ}.A$, on a $xt \in \mathfrak{J}$ et donc \mathfrak{J} est un idéal bilatère. Soit

$$\mathfrak{K} = \{v \mid v \in \mathfrak{M}, v\mathfrak{J} = 0\}$$

Cet ensemble \mathfrak{K} est un sous-module de \mathfrak{M} et $u \in \mathfrak{K}$. Donc $\mathfrak{K} \neq 0$ et, puisque \mathfrak{M} est irréductible, $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$, ce qui entraîne $\mathfrak{J} \subseteq (0 : \mathfrak{M})$. Comme \mathfrak{M} est fidèle, on a $(0 : \mathfrak{M}) = 0$. Par conséquent, $\mathfrak{J} = 0$, et A est un corps.

COROLLAIRE. - Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit primitif et intersersif à droite.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. En effet, l'anneau A étant primitif, il existe un A -module \mathfrak{M} irréductible et fidèle. Comme A est intersersif à droite, le module \mathfrak{M} est intersersif, et donc A est un corps.

Un idéal K d'un anneau A est dit corpoïdal, si l'anneau-quotient A/K est un corps. On voit facilement qu'un idéal est corpoïdal si et seulement s'il est un idéal à droite modulaire maximal.

THÉORÈME 2. - Pour qu'un idéal K d'un anneau A soit corpoïdal, il faut et il suffit qu'il existe un A -module \mathfrak{M} irréductible et intersersif, tel que l'on ait $K = (0 : \mathfrak{M})$.

La condition est nécessaire. L'anneau-quotient A/K étant un corps, il existe, d'après le théorème 1, un A/K -module \mathfrak{M} irréductible fidèle et intersersif. Mais ce A/K -module \mathfrak{M} peut aussi être considéré comme un A -module. Le A -module \mathfrak{M} est également irréductible, et l'on a $K = (0 : \mathfrak{M})$. Montrons que le A -module \mathfrak{M} est intersersif. Soient $a, b \in A$ et $u \in \mathfrak{M}$. Si $u = 0$, on a évidemment $uabA = ubaA = 0$. Soit $u \neq 0$. Si $ab \in K$, alors $ba \in K$. De $abA \subseteq K$ et $baA \subseteq K$ suit $uabA = ubaA = 0$. Si $ab \notin K$, alors $ba \notin K$, $abA \not\subseteq K$ et $baA \not\subseteq K$. Comme K est un idéal à droite maximal, on a

$$A = K + abA = K + baA \quad .$$

L'élément u étant différent de zéro, on a, puisque \mathfrak{M} est un A -module irréductible, $uA = \mathfrak{M}$. D'où

$$uA = uK + uabA = uK + ubaA = \mathfrak{M} \quad .$$

Comme $uK = 0$, on a par conséquent

$$uabA = ubaA = \mathfrak{M} \quad .$$

La condition est suffisante. En effet, \mathfrak{M} peut être considéré comme un A/K -module irréductible et fidèle, car on a $K = (0 : \mathfrak{M})$ et \mathfrak{M} est un A -module irréductible. On voit d'autre part facilement que \mathfrak{M} , considéré comme A/K -module, est aussi intersersif. Par conséquent, l'anneau-quotient A/K est un

corps d'après le théorème 1.

Soient A un anneau quelconque et Σ l'ensemble de tous les A -modules M_i irréductibles et intersersifs. Le noyau C de Σ , c'est-à-dire l'ensemble

$$C = \cap \{(0 : \pi_i) \mid \pi_i \in \Sigma\}$$

est appelé le radical corpoïdal de A . Si l'ensemble Σ est vide, le radical corpoïdal de A est, par définition, A lui-même.

Si \mathcal{R} est le radical (dans le sens de N. JACOBSON, [1]) de A , on a $\mathcal{R} \subseteq C$. Si A est intersersif à droite, alors $\mathcal{R} = C$.

THÉOREME 3. - S'il est distinct de A , le radical corpoïdal C d'un anneau A est l'intersection de tous les idéaux corpoïdaux de A .

C'est immédiat, d'après le théorème 2.

Un anneau A est dit c-semi-simple, si $A \neq 0$ et si le radical corpoïdal de A se réduit à 0 .

THÉOREME 4. - Si le radical corpoïdal C de l'anneau A est distinct de A , l'anneau-quotient A/C est c-semi-simple.

L'intersection des idéaux corpoïdaux de A étant C , d'après le théorème 3, il s'ensuit facilement que l'intersection des idéaux corpoïdaux de A/C se réduit à zéro. Donc A/C est c-semi-simple.

THÉOREME 5. - Un anneau A est isomorphe à une somme sous-directe de corps, si et seulement s'il est c-semi-simple.

Si A est c-semi-simple, l'idéal (0) est l'intersection des idéaux corpoïdaux K_i de A . Par conséquent, A est isomorphe à une somme sous-directe des anneaux-quotients A/K_i qui sont des corps. Inversement, il est immédiat que si A est isomorphe à une somme sous-directe de corps, A est c-semi-simple.

Si a est un élément fixé d'un anneau A , on désigne d'après F. JACOBSON [1] (même si A ne contient pas d'élément unité) par $(1 - a)A$ l'idéal à droite $\{x - ax \mid x \in A\}$ et par $A(1 - a)$ l'idéal à gauche $\{x - xa \mid x \in A\}$.

Un élément $z \in A$ est dit c-quasi-régulier si l'idéal à droite $(1 - z)A$ n'est contenu dans aucun idéal corpoïdal de A .

PROPOSITION 1. - Un élément $z \in A$ est c-quasi-régulier si et seulement si l'idéal à gauche $A(1 - z)$ n'est contenu dans aucun idéal corpoïdal de A .

La démonstration découle immédiatement du lemme suivant :

LEMME. - Si K est un idéal corpoïdal de l'anneau A , les relations $x - ax \in K$ et $x - xa \in K$ sont équivalentes.

Montrons par exemple, que $x - ax \in K$ entraîne $x - xa \in K$. Si $x \in K$, c'est immédiat. Si $x \notin K$, il existe, puisque K est corpoïdal, des éléments e et x' tels que

$$xx' \equiv e (K), \quad ye \equiv y (K) \quad \text{pour tout } y \in A.$$

De $x - ax \in K$ suit $x \equiv ax (K)$, $xx' \equiv axx' (K)$, $e \equiv ae \equiv a(K)$, D'où

$$x \equiv xe \equiv xa (K), \quad \text{c'est-à-dire } x - xa \in K.$$

Remarquons que tout élément quasi-régulier à droite ou à gauche est c -quasi-régulier.

PROPOSITION 2. - Un élément z de A est c -quasi-régulier si et seulement si l'idéal A est le seul idéal interversif à droite contenant $(1 - z)A$.

Supposons que z soit c -quasi-régulier. S'il existe un idéal interversif à droite H , différent de A , contenant $(1 - z)A$, cet idéal H est modulaire, donc contenu dans un idéal à droite maximal \mathfrak{J} . L'idéal

$$P = \mathfrak{J} \cdot A = \{a \mid a \in A, Aa \subseteq \mathfrak{J}\}$$

est primitif et $H \subseteq P$. Comme H est interversif à droite, P l'est également. Par conséquent, l'anneau-quotient A/P est primitif et interversif à droite, donc un corps d'après le corollaire du théorème 1. L'idéal P est par suite corpoïdal et contient $(1 - z)A$, contre l'hypothèse. Inversement, il est immédiat que si A est le seul idéal interversif à droite contenant $(1 - z)A$, il n'existe pas d'idéal corpoïdal contenant $(1 - z)A$, car tout idéal corpoïdal est interversif à droite.

Un idéal à droite de A est dit c -quasi-régulier, si tous ses éléments sont c -quasi-réguliers.

THÉORÈME 6. - Le radical corpoïdal C d'un anneau A est un idéal c -quasi-régulier contenant tout idéal à droite c -quasi-régulier.

Soit $z \in C$. Si z n'est pas c -quasi-régulier, $(1 - z)A$ est contenu dans un idéal corpoïdal K . D'après le théorème 3, $z \in K$. Si x est un élément quelconque de A , on a $x - zx \in K$ et donc $x \in K$. D'où $K = A$, ce qui est

impossible. Par conséquent, tout élément de C est c -quasi-régulier.

Soit T un idéal à droite c -quasi-régulier et soit $z \in T$. L'élément zx est c -quasi-régulier pour tout $x \in A$. Si $z \notin C$, il existe alors un idéal corpoïdal K tel que $z \notin K$. Comme K est corpoïdal, il existe des éléments e et z' tels que

$$ex \equiv x (K) \quad \text{pour tout } x \in A, \quad zz' \equiv e (K) \quad .$$

D'où $zz'x \equiv ex \equiv x (K)$ et $(1 - zz')A \subseteq K$. Par conséquent, zz' n'est pas c -quasi-régulier, ce qui est contradictoire.

2. Anneaux bipotents à droite.

Un anneau A est dit bipotent à droite, si l'on a

$$aA = a^2 A \quad \text{pour tout } a \in A \quad .$$

On voit facilement qu'un anneau A est bipotent à droite, si et seulement si pour tout couple $a, b \in A$, il existe $x \in A$ tel que l'on ait $ab = a^2 x$.

Voici quelques exemples d'anneaux bipotents à droite :

1° Les corps et les sommes directes de corps.

2° Les anneaux A tels que pour chaque $a \in A$, on a soit $aA = 0$, soit $aA = A$. En particulier, tout anneau de carré nul et tout idéal à droite minimal d'un anneau quelconque sont des anneaux bipotents à droite.

3° Les anneaux A tels que pour tout $a \in A$, il existe $x \in A$ vérifiant l'égalité $a^2 x = a$.

4° Soit \mathfrak{M} un espace vectoriel (à gauche) sur le corps K . Nous définissons dans l'ensemble-produit $K \times \mathfrak{M}$ une addition et une multiplication de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (a, \mu) + (a', \mu') &= (a + a', \mu + \mu') \\ (a, \mu)(a', \mu') &= (aa', a\mu') \end{aligned} \quad .$$

On vérifie facilement que, vis-à-vis de ces deux opérations, l'ensemble-produit $K \times \mathfrak{M}$ est un anneau bipotent à droite.

Si nous prenons en particulier $\mathfrak{M} = K$, l'anneau bipotent à droite $K \times K$ sera appelé un pseudo-corps à droite.

Remarquons que si A est un anneau bipotent à droite, on a

$$a^n A = aA \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et tout entier positif } n \quad .$$

PROPOSITION 3. - L'ensemble \mathcal{N} des éléments nilpotents d'un anneau A bipotent à droite est un idéal et l'on a $\mathcal{N}A = 0$.

Soit $a \in \mathcal{N}$. Il existe un entier positif n tel que $a^n = 0$. D'où

$$a^n A = eA = 0.$$

Par conséquent, \mathcal{N} est l'annulateur à gauche de A , donc un idéal.

PROPOSITION 4. - Pour tout élément non nilpotent a d'un anneau A bipotent à droite, il existe $x \in A$ tel que $a^2 x$ soit un élément idempotent différent de zéro.

L'égalité $a^4 A = aA$ entraîne l'existence d'un élément x tel que $a^4 x = a^2$. On vérifie facilement que l'élément $a^2 x a^2 - a^2$ est nilpotent. D'où, d'après la proposition 3, $a^2 x a^2 x - a^2 x = 0$. Par conséquent, l'élément $a^2 x$ est idempotent et $a^2 x \neq 0$.

PROPOSITION 5. - Le radical R (dans le sens de N. JACOBSON) d'un anneau bipotent à droite A est formé de l'ensemble de ses éléments nilpotents.

D'après la proposition 3, l'ensemble \mathcal{N} des éléments nilpotents de A est un nilidéal ; donc $\mathcal{N} \subseteq R$. Si $a \in R$ et si a n'est pas nilpotent, il existe, d'après la proposition 4, un élément x tel que $a^2 x$ soit un idempotent non nul, et l'on a $a^2 x \in R$, ce qui est impossible, car le radical ne contient pas d'éléments idempotents non nuls. Donc $R \subseteq \mathcal{N}$.

THÉORÈME 7. - Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit primitif et bipotent à droite.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. L'anneau A étant primitif, son radical se réduit à zéro. Par conséquent, d'après la proposition 5, A ne contient pas d'éléments nilpotents différents de zéro. D'autre part, (0) est un idéal premier. Soient $ab = 0$ et x un élément quelconque de A . De $ab = 0$ suit $(bxa)^2 = 0$, donc $bxa = 0$. Par conséquent, $bAa = 0$, ce qui entraîne, puisque (0) est premier, $a = 0$ ou $b = 0$. L'anneau A est donc un anneau sans véritables diviseurs de zéro. Soit a un élément quelconque non nul de A . D'après la proposition 3, il existe x tel que $a^2 x = e$ soit un élément idempotent non nul. Comme A est sans diviseurs de zéro, e est élément unité de A . Il s'ensuit alors immédiatement que A est un corps.

COROLLAIRE. - Si R est le radical d'un anneau bipotent à droite A et si R est distinct de A , l'anneau-quotient A/R est isomorphe à une somme sous-directe de corps.

PROPOSITION 6. - Soit e un élément idempotent non nul d'un anneau bipotent à droite A . On a les propriétés suivantes :

1° Pour tout $a, b \in A$, l'élément $ea - ae$ est nilpotent et $ea = ae$, $eab = aeb$.

2° Les idéaux à droite eA et $(1 - e)A$ sont bilatères.

1° De $(eae - ae)^2 = 0$ suit, d'après la proposition 3,

$$eae - ae = (eae - ae) e = 0 .$$

De là, on vérifie facilement que $(ea - ae)^2 = 0$. L'élément $ea - ae$ étant nilpotent, on a alors :

$$(ea - ae) b = eab - aeb = 0 .$$

2° L'idéal à droite eA est bilatère, car si $ea \in eA$, on a $xea = exa \in eA$. Il en est de même pour l'idéal à droite $(1 - e)A$; en effet, $x(a - ea) = xa - xea = xa - exa$.

THÉOREME 8. - Tout anneau A , bipotent à droite et sous-directement irréductible, est soit un anneau de carré nul, soit un corps, soit un pseudo-corps à droite.

Montrons d'abord que pour chaque $a \in A$, on a soit $aA = 0$, soit $aA = A$. En effet, supposons que $aA \neq 0$. Dans ce cas, la proposition 3 montre que l'élément a n'est pas nilpotent. D'après la proposition 4, il existe un élément x tel que $a^2 x = e$ soit un élément idempotent différent de zéro. Cet élément e est élément unité à gauche de A . En effet, d'après la proposition 6, eA et $(1 - e)A$ sont des idéaux bilatères et l'on a $eA \cap (1 - e)A = 0$. L'anneau A étant sous-directement irréductible et l'idéal eA étant différent de zéro, on doit avoir $(1 - e)A = 0$, c'est-à-dire $x = ex$ pour tout $x \in A$. De $A = eA = a^2 xA \subseteq aA$ suit $A = aA$.

Supposons maintenant que l'anneau A ne soit pas de carré nul. De ce qui précède, on déduit l'existence dans A d'un élément unité à gauche e . Posons $K = Ae$. On a $K \neq 0$ et e est élément unité de K . Soit $k \in K$, $k \neq 0$. De $kA \neq 0$ suit $kA = A$ et donc $kK = kAe = Ae = K$; par conséquent, K est un corps.

Posons $T = A(1 - e)$. On a $A = K + T$ (somme directe pour l'addition). D'autre part, $TA = 0$; en effet

$$(x - xe) a = xa - xea = xa - xa = 0 .$$

Si $T = 0$, on a $A = K$ et A est un corps. Supposons $T \neq 0$. Soit t un élément fixé de T , $t \neq 0$. On voit facilement que l'ensemble Kt est un idéal non nul de A et que $Kt \subseteq T$. Montrons que $Kt = T$. En effet, soit $v \in T$, $v \neq 0$. L'ensemble Kv étant un idéal non nul de A , on a, puisque A est sous-directement irréductible, $Kt \cap Kv \neq 0$. Par conséquent, il existe $k, h \in K$ tels que $kt = hv \neq 0$. D'où, puisque K est un corps, $h^{-1}kt = ev = v$, c'est-à-dire $v \in Kt$. De ce qui précède, il résulte que si t est un élément fixé non nul de T , tout élément v de T est de la forme $v = kt$, avec $k \in K$. Cette décomposition est d'autre part unique. En effet, si $v = kt = ht$, on a $(k - h)t = 0$. Si $k - h \neq 0$, il existe $p \in K$ tel que $p(k - h) = e$. D'où $et = t = 0$, ce qui est contradictoire. Comme $A = K + T$, tout élément $a \in A$ est d'une manière unique de la forme $a = k + ht$, avec $k, h \in K$. Soit $K \times K$ le pseudo-corps à droite défini à partir du corps K . A tout $a \in A$ faisons correspondre l'élément $(k, h) \in K \times K$. Cette application est évidemment une application biunivoque de A sur $K \times K$. Montrons que c'est un isomorphisme d'anneau. Soit $b = k' + h't$ avec $k', h' \in K$. On a :

$$(1) \quad \begin{aligned} a + b &= k + k' + (h + h')t \\ &\rightarrow (k + k', h + h') = (k, h) + (k', h') \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} ab &= (k + ht)(k' + h't) \\ &= kk' + htk' + kh't + hth't \\ &= kk' + kh't \\ &\rightarrow (kk', kh') = (k, h)(k', h') \end{aligned}$$

L'anneau A est donc un pseudo-corps à droite.

THÉOREME 9. - Tout anneau A bipotent à droite est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux appartenant à l'une des catégories suivantes : anneaux de carré nul, corps, pseudo-corps à droite.

En effet, tout anneau A est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux sous-directement irréductibles A_i . Les anneaux A_i , étant homomorphes à l'anneau A qui est bipotent à droite, sont également bipotents à droite. Le théorème découle alors du théorème 8.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (American mathematical Society **Colloquium** Publications, 37).
- [2] THIERRIN (Gabriel). - Sur le radical corpoidal d'un anneau, Canadian J. Math., t. 12, 1960, p. 101-106.
- [3] THIERRIN (Gabriel). - Sur la structure d'une classe d'anneaux, Canadian math. Bull., t. 3, 1960, p. 11-16.