Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Guérindon

Sur le passage d'un anneau local au gradué associé

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 2 (1958-1959), exp. n° 28, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A11_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1958/59
-:-:-:-

25 mai 1959

SUR LE PASSAGE D'UN ANNEAU LOCAL AU GRADUÉ ASSOCIÉ

par Jean GUÉRINDON

La notion de forme initiale, due à KRULL ([12], [14]), a été généralisée aux modules gradués associés aux modules filtrés [8]. Cette notion et celle d'idéal directeur peuvent être étudiées à deux points de vue principalement. On désignera par exemple par A un anneau local d'idéal maximal et par $\Gamma(A)$ l'anneau gradué $A/M \oplus M/M^2 \oplus \ldots$

On a une première série de résultats en cherchant à transférer certaines propriétés de $\Gamma(A)$ à A lui-même. Par exemple si $\Gamma(A)$ est normal et intègre, il en est de même de A. On voit que $A = K[[X_1, \ldots, X_n]]$ est noethérien en établissant que $\Gamma(A) = k[X_1, \ldots, X_n]$ l'est. Au contraire le sens $A \longrightarrow \Gamma(A)$ ne donne que peu de propriétés : par exemple $\Gamma(A)$ est noethérien. On va dans (I) étudier une sorte de transfert de A à $\Gamma(A)$. Une certaine propriété (en relation étroite avec le théorème des zéros de Hilbert, version de O. GOLDMANN [9]), notée (HJ), passe de A à $\Gamma(A)$.

On connaît une deuxième série de résultats sur $\Gamma(A)$: la longueur $\varphi(n)$ de M^n/M^{n+1} (sur A/M) est polynomiale en n, c'est-à-dire égale à un polynôme pour n grand. Cette "fonction caractéristique" $\varphi(n)$ se définit pour les S-modules gradués ([8]) $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots$, $S = S_0 \oplus S_1 \oplus \ldots$, S_0 étant anneau d'Artin, et $S = S_0[x_1, \ldots, x_r]$ avec $x_1, \ldots, x_r \in S_1$. On obtient aussi par ce dernier procédé la fonction caractéristique d'un faisceau algébrique cohérent [18]. La seconde partie de cet exposé donne une généralisation de la notion de fonction caractéristique fondée sur la théorie des séries entières à coefficients entiers (cf. [1], [2], [3], [7], [16] et [17]).

1. Sur une propriété conservée par graduation.

Le classique théorème des zéros de Hilbert a été mis sous forme abstraite simultanément par W. KRULL (cf. [13]) et O. GOLDMANN (cf. [9]) au moyen de la notion d'anneau de Jacobson (que GOLDMANN appelle anneaux de Hilbert) c'est-à-dire anneau

pour lequel tout idéal premier $\neq A$ est intersection d'idéaux maximaux.

On a les propositions classiques suivantes :

PROPOSITION 1. - Si A est anneau de Jacobson, $A[X]$ est anneau de Jacobson (X indéterminée).

PROPOSITION 2. - Si A est anneau de Jacobson, toute image homomorphe de A l'est également.

PROPOSITION 3. - Si A est un anneau de Jacobson et P un idéal maximal de l'anneau de polynômes $A[X]$, alors $P \cap A$ est maximal en A et le corps $A[X]/P$ est extension algébrique du corps $A/(P \cap A)$. La seconde proposition redonne le théorème des zéros en considérant un anneau de polynômes $B = k[X_1, \ldots, X_r]$, (k corps donné) : tout idéal maximal M de B est tel que B/M est sous-corps de la clôture algébrique $\bar{k}$ de k.

Soit alors A un anneau quelconque. On va étudier le comportement par graduation de A de la condition générale :

($\mathcal{H}$) Pour tout idéal maximal M_i de A le corps A/M_i est sous-corps d'un corps fixe K indépendant de i.

Cette condition ($\mathcal{H}$) est satisfaite notamment par les anneaux semi-locaux de la géométrie algébrique. Elle équivaut à dire que les caractéristiques des corps A/M_i sont égales entre elles.

Soit alors A un anneau satisfaisant à la condition ($\mathcal{H}$) et $\rho(A)$ son radical de Jacobson. Si $A/\rho(A)$ est un anneau de Jacobson (par exemple si A l'est) alors le gradué $\Gamma(A)$ pour la filtration définie par les puissances $\rho(A)$ du radical est de la forme

$$\Gamma(A) \simeq [A/\rho(A)][X_1, \ldots, X_s]/U \quad ,$$

si le $A/\rho(A)$ module $\rho(A)/\rho^2(A)$ a une base de s éléments ; $X_1, \ldots, X_s$ sont des indéterminées et U un idéal homogène de $[A/\rho(A)][X_1, \ldots, X_s]$, anneau de polynômes sur $A/\rho(A)$. Alors d'après les propositions 1 et 2, $\Gamma(A)$ est un anneau de Jacobson et d'après la proposition 3, $\Gamma(A)$ satisfait à la condition ($\mathcal{H}$) en prenant pour corps la clôture algébrique $\bar{K}$ de K (K étant relatif à l'anneau donné A). On a ainsi une propriété de transfert d'un type particulier d'une propriété ($\mathcal{H}$) conservée par graduation. On a l'énoncé :

PROPOSITION 4. - Si A est un anneau noethérien de Jacobson et satisfait à la condition ($\mathcal{H}$), il en est de même de son gradué $\Gamma(A)$.

En effet A étant noethérien $\Gamma(A)$ l'est (propriété de transfert classique) et s est au plus égal au nombre des éléments d'une base finie de $\rho(A)$. On peut donc appliquer ce qui précède, et la proposition 4 est établie. Il suffirait de supposer que $A/\rho(A)$ soit un anneau de Jacobson.

PROPOSITION 5. - Si un anneau semi-local satisfait à la condition (H) il en est de même de son gradué $\Gamma(A)$.

En effet $A/\rho(A)$ est somme directe de corps, donc anneau de Jacobson. Afin d'étendre cette proposition 5 on va remarquer que dans les conditions de la proposition 4 une condition (HJ) plus forte que (H) est réalisée.

Rappelons que la notion d'union sous-directe (cf. [10]) permet de considérer, pour un idéal I de l'anneau donné A tel que $I = \bigcap_\lambda J_\lambda$, le quotient A/I comme union (ou somme sous-directe) des A/J_λ (sous-anneau du produit des A/J_λ tel que l'homomorphisme canonique sur chaque facteur soit surjectif).

PROPOSITION 6. - Pour qu'un anneau A (quelconque) soit tel que $A/\rho(A)$ soit un anneau de Jacobson et satisfasse à la condition (H) il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition :

(HJ) Pour tout idéal premier P_j contenant $\rho(A)$ l'anneau A/p_j est somme sous-directe de sous-corps d'un corps K indépendant de j .

En effet si A est un anneau de Jacobson satisfaisant à (H) pour tout p_j on a $p_j = \bigcap_k M_{jk}$ et comme $A/M_{jk} \simeq K$ pour j et k quelconques, (HJ) est satisfaite d'après les propriétés des unions sous-directes.

Réciproquement, si on a (HJ) , tout p_j est intersection d'idéaux maximaux, donc $A/\rho(A)$ est anneau de Jacobson, et, en prenant en particulier p_j maximal, A/p_j est sous-corps de K , donc on a (H) . Notons qu'un anneau de polynômes sur K (algèbriquement clos) satisfait à (HJ) sur K . On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Si A est un anneau noethérien satisfaisant à la condition (HJ) , le gradué $\Gamma(A)$ est un anneau noethérien satisfaisant à la condition (HJ) . De plus $\Gamma(A)$ est un anneau de Jacobson.

Le théorème précédent est en défaut si A n'est pas noethérien, comme on le voit en prenant pour A , un anneau avec un seul idéal maximal M en sorte que l'espace vectoriel (sur $k = A/M$) M/M^2 soit de dimension infinie. Or on sait que le théorème des zéros de Hilbert n'est plus valable pour les polynômes à une infinité d'indéterminées X_i $(i \in I)$ dès que la puissance de l'ensemble I des indices des

variables est trop grande devant celle de l'anneau A (cf. LANG [15]).

Ce théorème de conservation d'une propriété (HJ) par l'opération Γ incite à <u>itérer</u> Γ. Si pour un entier p, $\Gamma^p(A)$ est semi-simple (c'est-à-dire puisqu'ici le radical de Jacobson est le nilradical) alors le processus s'arrête ; on a $\Gamma^{p+q}(A) = \Gamma^p(A)$ pour tout q.

Dans le cas général on a, pour tout i,

$\Gamma(A_i) = A_{i+1} = [A_i / \rho(A_i)][X_1, \dots, X_s]/U_i$, et on a donc un homomorphisme d'anneaux :

$$\varphi_i : A_i \longrightarrow A_{i+1} ,$$

tout élément de $\varphi_i(A_i)$ étant de degré zéro en A_{i+1}, s étant le nombre minimum de générateurs du $A_i/\rho(A_i)$-module $\rho(A_i)/\rho^2(A_i)$. Soit alors $A^* = \varinjlim A_i$ pour les homomorphismes φ_i précédents. Cette limite inductive est un anneau gradué $A^* = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell^*$, les A_j^* pouvant être définis de la manière suivante.

On a $A^* = \sum A_i / R$, $\sum A_i$ étant l'ensemble somme des A_i (différant de la somme directe !) et R étant l'idéal formé de la classe nulle dans l'équivalence $\mathcal{R}$ de $\overline{A} = \sum A_i$ définie comme suit. On dira que $\alpha_i \in A_i$, $\beta_j \in A_j$ sont équivalents s'ils sont appliqués par un nombre suffisant de φ_i sur un même γ_k ($k \geqslant i$ et j). On désignera par x^* la classe de tout $x \in \overline{A}$ modulo $\mathcal{R}$, et on dira que x^* est de degré ℓ si x est au minimum de degré ℓ.

L'anneau A^* <u>n'est pas noethérien en général</u> sauf dans le cas où l'on a $\Gamma^{(p+1)}(A) = \Gamma^p(A)$ pour un $p > 0$ auquel cas il se réduit à $\Gamma^{(p)}(A)$ donc est aussi anneau de Jacobson, avec (HJ). Plus généralement, on a le :

THÉORÈME 2. - <u>A^* est un anneau de Jacobson semi-simple et satisfait à la condition (HJ) pour la clôture algébrique $\overline{K}$ du corps K attaché à A donné, noethérien et satisfaisant à (HJ)</u>.

Pour établir ce théorème, prenons un idéal maximal M^* de A^* ; il provient d'un idéal maximal de $\overline{A}$, soit $\overline{M}$, qui est de la forme

$$\overline{M} = \overline{M}_{it} = (A_1, \dots, A_{i-1}, \mu_{it}, A_{i+1}, \dots)$$

μ_{it} étant maximal en A_i. Le corps résiduel A^*/μ^* est isomorphe à A_i/μ_{ir} et est donc contenu en $\overline{K}$ d'après les propositions 3 et 4.

Le radical de Jacobson de A^* est $\rho(A^*) = \rho(R)/R$, $\rho(R)$ désignant le

radical de Jacobson de l'idéal R de $\bar{A}$. Donc $A^*/\rho(A^*)$ est isomorphe à $\bar{A}/\rho(R)$ et comme $\rho(R)$ est intersection de certains μ^* soit $\rho(R) = \bigcap_{u \in U} \mu_u^*$, $A/\rho(R)$ est bien isomorphe à une somme sous-directe des A^*/μ^*, contenus chacun en K d'après ce qui précède. On a (HJ) pour A^*.

Soit P^* un idéal premier de A^*. Il est nécessairement sous la forme d'un quotient par R d'un idéal (premier) de $\bar{A}$ de la forme $\sum_i P_i$ (ensemble somme) chaque P_i étant un idéal premier de A_i. Comme d'après le théorème 1, A_i est, pour tout i, anneau de Jacobson ($i \geq 1$) en supprimant $A_0 = A$ au besoin (ce qui ne change pas A^*) on a $P_i = \bigcap_r \mu_{ir}$ (μ_{ir} maximal en A_i) et finalement $P^* = \bigcap_r \mu_r^*$ (μ_r^* maximal en A^*) avec

$$\mu^* = (A_1 , \dots , A_{i-1} , \mu_{ir} , A_{i+1} , \dots) \quad .$$

Ainsi non seulement $A^*/\rho(A^*)$ est un anneau de Jacobson (d'après la condition (HJ)) mais A^* l'est lui-même. On en déduit notamment qu'en A^* l'ensemble des éléments nilpotents est l'intersection des idéaux maximaux soit $\rho(0)$. On va voir que $\rho(0) = 0$ en montrant que $u^* \in A^*$ avec $u^{*n} = 0$ pour un n donné $u^* = 0$.

En effet, on a pour un i, $u_i \in A_i$, $u_i^* = u^*$ et pour un $j > i$ une suite :

$$u_i , \ u_{i+1} = \varphi_i(u_i) , \dots , \ u_j = \varphi_{j-1}(u_{j-1}) \quad \text{avec} \quad u_j^n = 0 \quad .$$

Comme $\rho(A_{j-1})$ est semi-premier, on a $u_{j-1} \in \rho(A_{j-1})$ et $u_j = 0$, et finalement $u^* = 0$.

S'inspirant de l'article de GOLDMANN cité, et modifiant un peu sa terminologie, on pourrait appeler "anneau du type de Hilbert sur K" un anneau (commutatif, avec élément unité non nul, sans condition de chaîne imposée) qui satisfait à la condition (HJ) avec K donné. Si A est noethérien et est du type de Hilbert sur K, $\Gamma^{(p)}(A)$ et $\Gamma^{\infty}(A) = A^*$ sont du type de Hilbert sur K (p entier quelconque). Notons que A^* étant semi-simple, on a $(A^*)^* = A^*$ et enfin que, si A n'est pas noethérien, $\Gamma(A)$ n'est pas toujours un anneau de Jacobson (car la proposition 1 n'est pas valable si on a une infinité d'indéterminées).

Il resterait à caractériser les anneaux noethériens A dont l'anneau associé A^* est noethérien. C'est déjà vrai si A est semi-local et plus généralement si la suite des φ_i "s'arrête". On sait déjà que l'ensemble des éléments de degré 0 de A^* (pour la graduation indiquée) est un anneau noethérien B. A^* sera alors noethérien si et seulement s'il existe des éléments homogènes $x_1 , \dots , x_h$ tels que $A^* = B[x_1 , \dots , x_h]$ (raisonnement classique sur les anneaux gradués

noethériens).

2. Sur une extension de la notion de fonction caractéristique de Hilbert.

Les notions de dimension, multiplicité et, plus généralement, de fonction caractéristique d'un idéal conduisent à la définition de fonction caractéristique $\varphi(n)$ pour des E modules gradués sur S gradués ($E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n$, $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$) dès que S peut se mettre sous la forme $A[X_1, \ldots, X_n]$, $S_0 = A$ étant un anneau d'Artin, les x_i étant de degré 1 en S : alors, pour tout n, $\text{long}_A E_n = \varphi(n) < \infty$, et pour $n > n_0$, $\varphi(n)$ est représenté par un polynôme.

Le cas le plus important est alors celui où l'on prend un A-module de type fini F, q à diviseurs premiers maximaux en A (supposé noethérien) et $E_n = q^n F/q^{n+1} F$. Notamment si q est lui-même maximal ($A/q = k$ corps) E sera un $k[X_1, \ldots, X_r]$-module de type fini, et chaque E_n sera somme de A-modules simples.

Pour étudier plus généralement le groupe additif $E = \sum E_n$ on est conduit à considérer l'anneau $\mathfrak{A}$ des endomorphismes (le groupe abélien) de E. Si on pose $\Sigma = S/(0 : E)$, on a $\Sigma \subseteq \mathfrak{A}$. Alors pour tout anneau $\mathfrak{B}$ avec $\Sigma \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, on désignera par $\mathfrak{B}_0$ le sous-anneau des $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $x \to \beta(x)$ ($x \in E$) soit de degré 0. On a $\Sigma_0 \subseteq \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}$.

Or la suite d'idéaux de A, 0 : $\sum_{n \geq p} E_n = I_p$ est croissante, donc stationnaire pour $n \geq n_1$, en supprimant un nombre fini de composants au début de E, on voit que pour $n \geq n_1$ on a

$$\text{long}_A E_n = \text{long}_{\mathfrak{B}_0} E_n = \varphi(n) \leq \psi(n)$$

d'après le théorème de Jordan-Hölder, tout $\mathfrak{B}_0$-module étant en E un Σ donc un S-module. Donc, pour tout n, $\psi(n)$ sera majoré par un polynôme.

En se limitant à $\mathfrak{B}_0$ commutatif (c'est-à-dire contenu en un sous-anneau commutatif maximal de $\mathfrak{A}$), on est conduit à la définition suivante qui comprend le cas où S_0 est un corps (cas des F A C) :

DÉFINITION. - Soit $E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n$ un sous-module gradué ($S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$), on dira que E est caractéristique (élémentaire) si on a les deux propriétés :

a. Pour tout $n \geq 0$, E_n est somme d'un nombre fini $\varphi(n)$ de sous S_0-modules

simples.

b. $\varphi(n)$ est majoré par un polynôme en n, $\bar{\varphi}(n)$. On a supposé S commutatif. Les coefficients de $\bar{\varphi}(n)$ peuvent être pris pour la suite complexes : on peut les supposer réels, entiers et positifs. Le S_0-module E_n est un socle de dimension finie (cf. [11], théorème 12.2).

On a alors les 4 propriétés (pour la 4e, voir BOURBAKI, [5], paragraphe 1, n° 3, formule (5), dans le cas où S_0 est un corps)

i. Si $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ sont caractéristiques élémentaires.

ii. Si on a une suite exacte $0 \to \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_2 \to 0$, les homomorphismes étant de degré 0, si deux des trois modules sont caractéristiques élémentaires, le troisième l'est.

iii. Si $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_h$ sont caractéristiques élémentaires, $\mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_h$ l'est.

iv. Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont caractéristiques élémentaires, alors $\mathfrak{M} \otimes_S \mathfrak{N}$ l'est.

Pour interpréter commodément la propriété 4, on est conduit à introduire dans le cas général la série :

$$\Psi(E) = \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)\, z^n \qquad (z \text{ complexe})$$

On a alors $\Psi(\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}) = \Psi(\mathfrak{M}) \times \Psi(\mathfrak{N})$, dès que S_0 est un corps. Dans le cas général $\varphi_{\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}}(n) \leq \varphi_{\mathfrak{M}}(n) \times \varphi_{\mathfrak{N}}(n)$ pour n grand, et alors le produit tensoriel a encore la propriété (b).

La majoration (b) donne le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Si E est caractéristique élémentaire on a

$$\Psi(E) = \frac{\Pi(z)}{(1 - z^{\alpha})^{\beta}} \quad ,$$

$\Pi(z)$ étant un polynôme à coefficients entiers, et pour n grand,

$$\varphi(n) = \rho_1^n P_1(n) + \ldots + \rho_\alpha^n P_\alpha(n) \quad ,$$

les $P_i(n)$ étant des polynômes en n à coefficients complexes et les ρ_i les racines (complexes conjuguées) de $z^{\alpha} - 1 = 0$.

Ce théorème se rattache à la théorie des séries à coefficients entiers (cf. [1], [2], [3], [16], et [17])). Comme $\sum \bar{\varphi}(n) z^n$ est une fraction rationnelle ayant pour seul pôle 1, $\sum \varphi(n)\, z^n$ a pour rayon de convergence 1 au moins et

peut se prolonger analytiquement hors du cercle unité C . Donc, d'après POLYA et CARLSON (cf. par exemple [16]) $\Psi(E)$ est une fraction rationnelle.

Or suivant un résultat ancien de FATOU (cf. [1] et [7]) si une fraction rationnelle irréductible $\frac{f(x)}{g(x)}$ a un développement en série avec des coefficients entiers, valable pour $|x| < 1$, $g(x)$ a un terme constant égal à 1 . La démonstration de FATOU est la suivante : soit A le coefficient du terme de plus haut degré de g . Les racines de $g(x)$ sont ≥ 1 en module et le produit des modules est $\frac{1}{|A|}$, donc $A = \pm 1$. Ces racines sont alors, d'après KRONECKER, des racines de l'unité et donc on a $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P(x)}{(1 - x^{\alpha})^{\beta}}$ et les $\frac{1}{\rho_i}$ (donc aussi les ρ_i de l'énoncé) sont des racines de l'unité. Reste à établir le lemme suivant.

LEMME (KRONECKER, cf. [2] et [3]). - Si l'équation à coefficients entiers rationnels $x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_n = 0$ a ses racines de valeur absolue 1 , celles-ci sont des racines de l'unité.

Soit pour tout n fixé (n entier), M(n) le nombre des équations E ayant la propriété précédente : M(n) est fini, car les fonctions symétriques des racines sont bornées, et il a donc N nombres λ différents, solutions d'une E . Si λ est solution d'une E , λ^{ρ} est solution d'une E pour tout ρ positif. Alors les $N + 1$ nombres λ , λ^2 , ... , λ^{N+1} ne sont pas différents et $\lambda^h = 1$ pour un $h > 0$.

Le théorème cité de Polya-Carlson utilise au passage le résultat suivant (BOREL [4]) : si une série à coefficients entiers représente une fonction n'admettant sur le cercle de rayon 1 , et à son intérieur, d'autre singularité que des pôles, elle est égale au quotient de deux polynômes à coefficients entiers.

Les polynômes $P_i(n)$ n'ont pas en général leurs coefficients entiers : par exemple si $\varphi(n) = n - 1$ pour n pair, et $n - 2$ pour n impair, on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n)\, z^n = \frac{(1 + z^2)}{(1 - z^2)(1 + z)} = \frac{(1 + z^2)(1 - z)}{(1 - z^2)^2} \quad \text{et} \quad \varphi(n) = (n - \tfrac{3}{2}) + (-1)^n \tfrac{1}{2} \ .$$

On a enfin la relation de récurrence (obtenue par identification) :

$$\varphi(n) - \beta\varphi(n - \alpha) + \frac{\beta(\beta - 1)}{2} \varphi(n - 2\alpha) + \ldots + (-1)^{\beta} \varphi(n - \beta\alpha) = 0 \ .$$

On définit alors de manière naturelle les grandeurs d'origine géométrique au moins pour le cas où $\varphi(n)$ est un polynôme. Si $\varphi(n)$ est un polynôme de degré d , on a $\beta = d + 1$ et $\alpha = 1$. On appellera $\beta - 1$ la dimension et α la

polarité de $E = \sum E_n$ sur $\mathfrak{o}$.

De plus Ψ a un développement de Laurent pour $z = 1$

$$\Psi = \ldots + \frac{\gamma - 1}{z - 1} + \gamma + \gamma_1(z - 1) + \ldots$$

et lorsque $E_n = 0$ pour n grand, on a $\gamma = \Psi(1) = \varphi(0) + \ldots + \varphi(n) + \ldots$ et γ est la longueur (finie) de E, comme $\mathfrak{o}_0$-module. On appellera γ pseudo-longueur de E dans le cas général. Il est aisé de suivre le comportement de α, β, γ dans chacune des opérations mises en jeu par les propriétés (i) à (iv).

REMARQUE. - Au produit tensoriel ci-dessus, on attache le produit de convolution de $F(z) = \sum \frac{\varphi(n)}{n!} z^n$ et $G(z) = \sum \frac{\psi(n)}{n!} z^n$ qui sont deux fonctions entières ($\varphi(n)$ attaché au premier module et $\psi(n)$ au second) comme on le voit en posant $z = \frac{1}{t}$ (cf. [17]).

Il est alors naturel de chercher à s'affranchir de la condition (b) et de considérer un module gradué E (sur $\mathfrak{o}$ gradué) tel que l'on ait

a. Pour tout n, E_n est somme d'un nombre fini $\varphi(n)$ de sous $\mathfrak{o}_0$-modules simples,

et

b'. E est somme directe (discrète mais éventuellement infinie) de modules gradués E_i ($i \in I$), chaque $E_i = \sum_n E_{i,n}$ étant caractéristique élémentaire.

Alors E est un $\mathfrak{o}$-module gradué. Il est nécessaire, puisque $\varphi(n) < \infty$ d'après (a), que pour chaque n, tous les $E_{n,i}$, sauf au plus un nombre fini, soient réduits à zéro. Posons $\varphi(E) = \sum \varphi(n) z^n$ et le rayon de convergence ρ de cette série est tel que $\rho \leq 1$ (à moins que E ne soit réduit à zéro ce que l'on exclut a priori).

On dira que E est un $\mathfrak{o}$-module gradué caractéristique si on a $\rho = 1$ c'est-à-dire si on a (a), (b') et (b") avec :

b". $\varphi(n)$ satisfait à $\overline{\lim} \sqrt[n]{\varphi(n)} = 1$.

Deux cas peuvent se produire : ou le cercle de convergence U ($|z| = 1$) est une coupure, ou bien il existe un arc de U sans point singulier auquel cas on peut prolonger $\sum \varphi(n) z^n$ hors de U et donc, d'après POLYA et CARLSON, φ est une fraction rationnelle, c'est-à-dire E est caractéristique élémentaire. On établit

aussitôt que les quatre propriétés (i), (ii), (iii),et (iv) restent valables en remplaçant le qualificatif caractéristique élémentaire par celui de caradtéristique. D'où 4 conditions (i'), (ii'), (iii'), (iv').

Pour démontrer la 4e par exemple :

iv'. Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont caractéristiques, il en est de même du produit tensoriel $\mathfrak{M} \otimes_S \mathfrak{N}$.

On remarque que le produit des deux séries $\varphi(m)$ et $\varphi(n)$ est convergent pour tout z avec $|z| < 1$ et donc le rayon R associé au produit est 1.

Remarquons que les conditions (a), (b'), (b") ont un caractère purement arithmétique : il suffit de prendre $E_n = k^{\varphi(n)}$ où k est un corps et $\varphi(n)$ un entier satisfaisant à (b"). Il n'en est pas de même des conditions (a) et (b). Quant à préciser le cas où une suite de nombres $\varphi(n)$ est la suite des valeurs d'un polynôme il s'agit d'un problème étudié par GAETA.

Comme on constate que sur le segment $(0 , 1)$ de l'axe réel les séries $\Psi(E_i)$ sont commutativement convergentes $(i \in I)$ de somme $\Psi(E)$ le <u>problème général</u> suivant se pose :

On donne un E-module gradué sur $\mathfrak{O}$ gradué avec les conditions (a) et (b"). Le décomposer en sous-modules gradués E_i en sorte que l'on ait (b') c'est-à-dire que chaque E_i soit élémentaire.

D'autre part l'hypothèse (b") entraîne que la fonction $f(z) = \sum \frac{\varphi(n)}{n!} z^n$ est <u>une fonction entière de type exponentiel</u> c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel $a > 0$ avec $f(z)\, e^{-a|z|}$ borné (cf. [17], p. 578). Alors pour a assez petit $\varphi(n)$ a bien la forme $\varphi(n) = \varphi_1^n P_1(n) + \ldots + \varphi_h^n P_h(n)$, (cf. [1]) c'est-à-dire E est élémentaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Mme Françoise). - Fonctions arithmétiques, Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et théorie des nombres, t. 11, 1957/1958, n° 11.

[2] BIEBERBACH (Ludwig). - Über einen Satz Pólyascher Art, Archiv der Math., t. 4, 1953, p. 23-27.

[3] BIEBERBACH (Ludwig). - Analytische Fortsetzung. - Berlin, Springer, 1955 (Ergebnisse der Mathematik ... , Neue Folge, 3).

[4] BOREL (Emile). - Sur une application d'un théorème de M. Hadamard, Bull. Sc. math., série 2, t. 18, 1894, p. 22-25.

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, chapitre 3 : Algèbre multilinéaire, 2e éd. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1044).

[6] DUBREIL (Paul). - La fonction caractéristique de Hilbert, Algèbre et théorie des nombres [1949, Paris]. - Paris, centre national de la Recherche scientifique, 1950 (Colloques intern. C. N. R. S., 24) ; p. 109-114.

[7] FATOU (Pierre). - Sur les séries entières à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 138, 1904, p. 342-344.

[8] GODEMENT (Roger). - Localités simples I et II, Séminaire Cartan-Chevalley, t. 8; 1955/1956 : Géométrie algébrique ; n° 16 et 17.

[9] GOLDMAN (Oscar). - Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, Math. Z., t. 54, 1951, p. 136-140.

[10] GUÉRINDON (Jean). - Sur les unions sous-directes de structures, Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et théorie des nombres, t. 9, 1955/56, n° 3.

[11] GUÉRINDON (Jean). - Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 459-520, (Thèse Sc. math. Paris, 1957).

[12] KRULL (Wolfgang). - Dimensionstheorie in Stellenringen, J. für reine und angew. Math., t. 179, 1938, p. 204-226.

[13] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.

[14] KRULL (Wolfgang). - Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche, J. für reine und angew. Math., t. 192, 1953, p. 230-252.

[15] LANG (Serge). - Hilbert's Nullstellensatz in infinite dimensional spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 407-410.

[16] PISOT (Charles). - Propriétés arithmétiques des coefficients des séries de Taylor, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 224, 1947, p. 438-440.

[17] POLYA (Georg). - Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z., t. 29, 1929, p. 549-640.

[18] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.