

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

REINHOLD BAER

Le théorème de Maschke

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

6 janvier 1959

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1958/59

-:-:-

LE THÉOREME DE MASCHKE

par Reinhold BAER

Si θ est un groupe d'automorphismes du groupe fini G et K un sous-groupe normal θ -permis de G , on peut mettre les critères de l'existence des compléments θ -permis de K dans G en analogie avec le théorème bien connu de Maschke. Comme tout sous-espace d'un espace vectoriel possède un complément, le problème résolu par le théorème classique de Maschke est celui de savoir, quand parmi des compléments il y a un qui est permis ; mais, dans la situation que nous considérons, il n'existe en général même pas un seul complément, à plus forte raison pas de complément θ -permis.

Nous indiquons tout d'abord deux critères relativement spéciaux.

THÉOREME A. - Si θ est un groupe d'automorphismes et K un sous-groupe normal θ -permis du groupe fini G , si de plus l'ordre $o(K)$ de K est (relativement) premier à $[G : K]$ et $o(\theta)$, si enfin l'un au moins des groupes K et θ est résoluble, il existe un complément θ -permis de K dans G .

THÉOREME B. - Si θ est un groupe d'automorphismes et K un sous-groupe normal abélien θ -permis du groupe G , si de plus $o(K)$ et $o(\theta)$ sont premiers entre eux l'existence d'un complément de K dans G entraîne celle d'un complément θ -permis.

La démonstration du théorème A repose sur le théorème appelé "Théorème de Schur" relatif à l'existence de compléments et à leur propriété d'être conjugués, tandis que la démonstration du théorème B s'appuie sur la formation de "moyenne" relative à certains automorphismes croisés de G/K dans K . Il est intéressant de remarquer que le théorème B n'est déjà plus valable, si l'on remplace la commutativité de K par la nilpotence par exemple.

Du théorème B on peut dériver sans grande peine le résultat suivant qui met

en évidence l'analogie avec le théorème classique de Maschke.

COROLLAIRE. - Si θ est un groupe d'automorphismes et K un facteur direct θ -permis du groupe fini G , si de plus $o(K)$ et $o(\theta)$ sont premiers entre eux, il existe un facteur direct θ -permis de G complémentaire de K .

En combinant les théorèmes A et B on peut déduire un critérium plus général. Pour l'exprimer il nous faut recourir à ce qu'on appelle l'ordre central $z(K)$ du groupe K . Si $1 = K_0 < \dots < K_{i-1} < K_i < \dots < K_n = K$ est une suite principale de K , l'ordre central $z(K)$ est le produit (indépendant du choix de la suite principale K_i) de tous les $[K_i : K_{i-1}]$ pour lesquels K_i/K_{i-1} est au centre de K/K_{i-1} . Cet ordre central est toujours un multiple de $[K : K']$; et nous pouvons définir l'ordre central réduit $z_0(K)$ par l'équation $z(K) = z_0(K) [K : K']$. Alors on a le

THEOREME C. - Si θ est un groupe d'automorphismes et si K est un sous-groupe normal θ -permis résoluble du groupe fini G , si en outre $o(K)$ et $o(\theta)$ sont premiers entre eux, si enfin $z_0(K)$ et $[G : K]$ sont eux aussi premiers entre eux l'existence d'un complément de K/K' dans G/K' entraîne l'existence d'un complément θ -permis de K dans G .

Pour prouver ce théorème on doit recourir essentiellement au normalisateur de ce qu'on appelle la représentation de Hall de K , introduite par Philip HALL. Il convient de remarquer que le théorème B, mais non le théorème A, est un cas particulier du théorème C. La cause en est que, d'après les théorèmes bien connus de Hall, seuls des groupes résolubles possèdent une représentation de Hall. Ainsi pour parvenir à un critérium plus général, il faut remplacer le concept de représentation de Hall par un concept plus général, applicable à tous les groupes finis.

Un exposé plus détaillé de ces questions est en préparation.