Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Hubert Delange

## Sur certaines fonctions arithmétiques

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 16, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58
-:-:-:-



3 mars 1958

# SUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Hubert DELANGE

Par "fonction arithmétique" nous entendons simplement une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

E étant un ensemble donné de nombres premiers, nous lui associons les deux fonctions arithmétiques $\omega_E$ et $\Omega_E$ définies de la façon suivante :

$\omega_E(n)$ est le nombre des diviseurs premiers de $n$ qui appartiennent à $E$, et $\Omega_E(n)$ est le nombre total des facteurs qui appartiennent à $E$ dans la décomposition de $n$ en facteurs premiers.

Autrement dit, on a $\omega_E(n) = \Omega_E(n) = 0$ si $n = 1$ ou si $n$ n'est divisible par aucun nombre de $E$, tandis que, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} m$, avec $p_1, p_2, \dots, p_k$ appartenant à $E$ et tous différents, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k > 0$ et $m$ divisible par aucun nombre de $E$,

$$\omega_E(n) = k \quad \text{et} \quad \Omega_E(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \ .$$

Un cas particulier simple, et important, est celui où $E$ est l'ensemble de tous les nombres premiers : $\omega_E(n)$ est alors le nombre des diviseurs premiers de $n$ et $\Omega_E(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de $n$ en facteurs premiers. Dans ce cas, nous écrirons simplement $\omega(n)$ et $\Omega(n)$.

Les résultats que nous avons en vue sont des types suivants :

1° Soit $f$ l'une des fonctions $\omega_E$ et $\Omega_E$ correspondant à un ensemble $E$ satisfaisant à une certaine hypothèse (H).

Alors, pour tout entier $q > 1$, les $q$ différentes valeurs possibles a priori pour le reste de la division de $f(n)$ par $q$, à savoir $0, 1, 2, \dots, q-1$, apparaissent avec la même fréquence.

De façon précise, quel que soit l'entier $r$, l'ensemble des entiers positifs $n$ tels que $f(n) \equiv r \pmod q$ possède une densité égale à $\frac{1}{q}$. (Autrement dit,

le nombre de ces entiers au plus égaux à $x$ est équivalent pour $x$ infini à $\frac{x}{q}$ ([1]).

Par ailleurs, pour tout nombre irrationnel $\lambda$, les nombres $\lambda f(n)$ sont répartis uniformément modulo 1. Autrement dit, $\{X\}$ désignant l'excès de $X$ sur le plus grand entier qui lui est au plus égal, l'ensemble des entiers positifs $n$ tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t \quad , \quad \text{où} \quad 0 \leq t \leq 1 \, ,$$

possède une densité égale à $t$. Ou encore, l'ensemble des $n$ tels que le point $\exp[2\pi i \lambda f(n)]$ appartienne à un arc donné, de longueur $\varphi$, de la circonférence $|\zeta| = 1$, possède une densité égale à $\frac{\varphi}{2\pi}$.

Les mêmes faits, à savoir apparition avec la même fréquence des différentes valeurs possibles a priori pour le reste de la division de $f(n)$ par $q$ et distribution uniforme modulo 1 de $\lambda f(n)$ pour $\lambda$ irrationnel, se produisent encore lorsque l'on ne donne à $n$ que les valeurs "quadratfrei" :

L'ensemble des entiers positifs "quadratfrei" tels que $f(n) \equiv r \pmod q$ possède une densité égale à $\frac{1}{q} \cdot \frac{6}{\pi^2}$ ([2]), et l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei" tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t \quad , \text{ où } \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{et} \quad \lambda \text{ est irrationnel,}$$

possède une densité égale à $t \frac{6}{\pi^2}$.

2° Soient $f$ l'une des fonctions $\omega_{E_1}$ et $\Omega_{E_1}$ et $g$ l'une des fonctions $\omega_{E_2}$ et $\Omega_{E_2}$, $E_1$ et $E_2$ étant deux ensembles sans élément commun et satisfaisant l'un et l'autre à l'hypothèse (H).

Alors, quels que soient les entiers $q$ et $q' > 1$, les $qq'$ systèmes de valeurs possibles a priori pour le reste de la division de $f(n)$ par $q$ et le reste de la division de $g(n)$ par $q'$ apparaissent avec la même fréquence. Autrement dit, $q$ et $q'$ étant deux entiers $>1$ et $r$ et $r'$ deux entiers quelconques, l'ensemble des $n$ tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q \quad \text{et} \quad g(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

---

([1]) Le cas particulier correspondant à $f(n) = \Omega(n)$ et $q = 2$ se trouve déjà dans LANDAU [1], p. 621. Le cas de $f(n) = \omega(n)$ et $q$ quelconque a été établi en 1940 par S.S. PILLAI [2].

([2]) Le cas particulier de ce résultat correspondant à $f(n) = \omega(n)$ et $q = 2$ se trouve dans LANDAU [1] p. 606. Le cas de $f(n) = \Omega(n)$ et $q$ quelconque a été établi par S. SELBERG [3], puis à nouveau par S.S. PILLAI [2].

possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$ .

Par ailleurs, quels que soient $\lambda$ et $\mu$ irrationnels, les points de coordonnées

$$\xi_n = \{\lambda f(n)\} \quad \text{et} \quad \eta_n = \{\mu g(n)\}$$

se répartissent uniformément dans le carré $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ , $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ . C'est-à-dire que l'ensemble des $n$ tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leqslant t \quad \text{et} \quad \{\mu g(n)\} \leqslant t' \text{ , où } 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant t' \leqslant 1 ,$$

possède une densité égale à $tt'$ .

On a des résultats semblables si l'on ne donne à $n$ que les valeurs "quadratfrei".

3° Supposons maintenant que $f$ et $g$ soient les fonctions $\omega_E$ et $\Omega_E$ correspondant à un même ensemble $E$ satisfaisant à l'hypothèse (H) .

Alors on a les mêmes résultats que ci-dessus, à l'exception de ce qui concerne les $n$ "quadratfrei", à condition de supposer $q$ et $q'$ premiers entre eux ou $\lambda$ et $\mu$ tels que l'équation $\lambda X + \mu Y = Z$ n'ait aucune autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$ .

Les résultats indiqués au paragraphe 1 sont établis si l'on montre que, $f$ étant l'une des fonctions $\omega_E$ et $\Omega_E$ , où $E$ satisfait à l'hypothèse (H) , pour $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$ , on a, quand $x$ tend vers $+\infty$

$$(1) \qquad \sum_{n \leqslant x} z^{f(n)} = o\,[x]$$

et, $Q$ désignant l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei",

$$(2) \qquad \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q}} z^{f(n)} = o\,[x] .$$

En effet, $q$ étant un entier $> 1$ et $r$ un entier quelconque, posons $\chi = e^{2\pi i/q}$ .

En faisant dans (1) $z = \chi^j$ et multipliant par $\chi^{-jr}$ , on voit que, pour $j = 1 , 2 , \ldots , q - 1$ ,

$$\sum_{n \leqslant x} \chi^{j\,[f(n)-r]} = o\,[x] .$$

En ajoutant à ces relations la relation évidente

$$(3) \qquad \sum_{n \leqslant x} 1 = x + o\,[x] ,$$

on obtient

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ f(n) \equiv r \pmod q}} q = x + o[x] ,$$

d'où il résulte que le nombre des $n \leqslant x$ tels que $f(n) \equiv r \pmod q$ est $\frac{x}{q} + o[x]$.

En procédant de même avec (2), (3) étant alors remplacée par

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q}} 1 = \frac{6}{\pi^2} x + o[x] ,$$

on en déduit que le nombre des $n \leqslant x$, "quadratfrei" et tels que $f(n) \equiv r \pmod q$ est $\frac{1}{q} \cdot \frac{6}{\pi^2} x + o[x]$.

Pour la distribution uniforme modulo 1 de $\lambda f(n)$, on fait dans (1) ou (2) $z = \exp[2\pi q \lambda i]$, $q = 1, 2, 3, \ldots$, et on applique le théorème bien connu de H. Weyl, ou une extension triviale de ce théorème.

On voit de façon analogue que les résultats du paragraphe 2 sont établis si l'on montre que, $f$ et $g$ étant les fonctions indiquées, pour $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$ et $u \neq 1$ ou $v \neq 1$, on a, quand $x$ tend vers $+\infty$

$$\sum_{n \leqslant x} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x] \tag{4}$$

et

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q}} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x] .$$

Les résultats indiqués au paragraphe 3 se déduisent de ce que, si $f$ et $g$ sont les fonctions $\omega_E$ et $\Omega_E$ correspondant à un même ensemble $E$ satisfaisant à l'hypothèse (H), on a (4) pour $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$ et $uv \neq 1$.

La nécessité de supposer ici que $q$ et $q'$ sont premiers entre eux ou que l'équation $\lambda X + \mu Y = Z$ n'a aucune autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$ provient de ce que la condition "$u \neq 1$ ou $v \neq 1$" est remplacée ici par $uv \neq 1$.

Une première méthode pour obtenir les différentes relations que nous venons de mentionner consiste à appliquer un théorème taubérien convenable aux séries de Dirichlet

$$\sum_1^{+\infty} \frac{z^{f(n)}}{n^s} \quad , \quad \sum_1^{+\infty} \frac{u^{f(n)}\, v^{g(n)}}{n^s} \quad ,$$

ou bien

$$\sum_{n \in Q} \frac{z^{f(n)}}{n^s} \quad \text{ou} \quad \sum_{n \in Q} \frac{u^{f(n)}\, v^{g(n)}}{n^s} \, .$$

Le cas des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ suggère d'utiliser le théorème suivant, qui se déduit aisément d'une variante simple du théorème de Ikehara :

Soit la série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$, où les coefficients $a_n$ sont réels ou complexes et de module $\leqslant 1$ .

Si l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \varphi(s)\ (s-1)^{\omega} \quad ,$$

avec $\varphi$ holomorphe dans le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqslant 1$ et $\mathcal{R}\omega > -1$, on a quand $x$ tend vers $+\infty$

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = o\,[x] \, .$$

Ceci conduit à prendre pour l'hypothèse (H) qui figure dans nos énoncés l'hypothèse suivante, que nous désignons par $(H_1)$ :

Il existe un $\alpha$ réel $>0$ et une fonction $\delta(s)$ holomorphe dans le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqslant 1$, tels que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$(5) \qquad \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s} = \alpha \log \frac{1}{s-1} + \delta(s) \, .$$

En effet, quel que soit l'ensemble $E$, on a, par exemple, pour $|z| \leqslant 1$ et $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} = \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s - 1}\right] \prod_{p \notin E} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad ,$$

$$= \zeta(s) \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z-1}{p^s}\right] .$$

D'autre part, le produit infini $\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{Z}{p^s}\right] e^{-\frac{Z}{p^s}}$ est convergent pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $Z$ quelconque, avec convergence uniforme sur tout ensemble compact.

Sa valeur est donc une fonction $G_E(s\ ,\ Z)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $Z$ quelconque.

Pour $\mathcal{R}s > 1$ et $Z$ quelconque, le produit $\prod_{p \in E} [1 + \frac{Z}{p^s}]$ et la série $\sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}$ étant tous deux convergents, on peut écrire

$$\prod_{p \in E} [1 + \frac{Z}{p^s}] = G_E(s\ ,\ Z) \exp [Z \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}] .$$

On voit ainsi que, pour $|z| \leq 1$ et $\mathcal{R}s > 1$ ,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} = \zeta(s)\ G_E(s\ ,\ z - 1) \exp [(z - 1) \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}] ,$$

$$= \frac{1}{s - 1} H_E(s\ ,\ z) \exp [(z - 1) \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}] ,$$

avec $H_E(s\ ,\ z)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $z$ quelconque.

On obtient des formules analogues pour

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} .$$

On voit que le théorème taubérien cité plus haut est applicable à toutes ces séries, pour $z \neq 1$ , si $E$ satisfait à l'hypothèse $(H_1)$ .

Il est aussi applicable aux séries correspondant au cas où l'on considère à la fois deux fonctions, si l'ensemble $E$ , ou les deux ensembles $E_1$ et $E_2$ , satisfont à l'hypothèse $(H_1)$ .

L'hypothèse $(H_1)$ est satisfaite, avec $\alpha = 1$ , pour $E$ égal à l'ensemble de tous les nombres premiers.

En effet, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + \sum [\frac{1}{p^s} + \log(1 - \frac{1}{p^s})] ,$$

$$= \log \frac{1}{s - 1} + \log [(s - 1)\zeta(s)] + \sum_{k > 1} \frac{1}{k p^{ks}} .$$

Le troisième terme du second membre représente une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ , le second est holomorphe dans le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geq 1$ , du fait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans ce demi-plan.

On voit aussi que l'hypothèse $(H_1)$ est satisfaite pour $E$ égal à l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à une congruence telle que

$$p \equiv \ell \pmod{k} \quad , \quad \text{où} \quad (k , \ell) = 1 .$$

Pour cela, on évalue d'abord la somme de la série

$$\sum \frac{\chi(p)}{p^s} ,$$

où $\chi$ est un caractère modulo $k$, en utilisant la fonction $L$ de Dirichlet correspondant à ce caractère, puis on multiplie par $\frac{1}{\chi(\ell)}$ et on ajoute entre elles toutes les formules ainsi obtenues à partir des différents caractères.

Comme il est clair que la réunion de plusieurs ensembles disjoints deux à deux et satisfaisant à l'hypothèse $(H_1)$ satisfait aussi à cette hypothèse, et que, d'autre part, un ensemble satisfaisant à l'hypothèse $(H_1)$ y satisfait encore si on lui ajoute ou lui enlève un ensemble $E_1$ tel que $\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty$ pour un $\sigma < 1$, on voit que l'hypothèse $(H_1)$ est satisfaite pour tous les ensembles du type suivant :

$$E = E_0 \cup E_1 - E_2 ,$$

où $E_0$ est l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à une congruence telle que

$$p \equiv \ell \pmod{k} \quad , \quad \text{où} \quad (k , \ell) = 1 ,$$

ou bien une réunion de tels ensembles relatifs à un même $k$, $E_1 \cap E_0 = \emptyset$, $E_2 \subset E_0$, avec $\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty$ et $\sum_{p \in E_2} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty$ pour un $\sigma < 1$.

Ajoutons que <u>les ensembles de ce type sont les seuls dont nous sachions effectivement prouver qu'ils satisfont à l'hypothèse</u> $(H_1)$.

Il semble a priori que nos résultats doivent être valables pour une classe plus étendue d'ensembles.

En fait, en utilisant une méthode entièrement différente de la précédente, on peut montrer que l'hypothèse $(H_1)$ peut être remplacée par la suivante, que nous désignerons par $(H_2)$ :

<u>On a $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ et le nombre des nombres de $E$ qui sont $\leqslant x$ est égal</u>

pour $x$ infini à $\alpha\frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right]$, avec $\alpha \geqslant 0$ ([3]).

Cette hypothèse est d'un caractère beaucoup moins artificiel que l'hypothèse $(H_1)$ et est certainement satisfaite lorsque cette dernière l'est, car (5) donne par dérivation

$$\sum_{p \in E} \frac{\log p}{p^s} = \frac{\alpha}{s-1} - \zeta'(s) ,$$

et le théorème de Ikehara permet d'en déduire

$$\sum_{\substack{p \in E \\ p \leqslant x}} \log p = \alpha x + o[x] .$$

Pour montrer que l'hypothèse $(H_2)$ convient comme hypothèse (H), on établit d'abord le théorème général suivant :

Soit $h(n)$ une fonction arithmétique à valeurs réelles ou complexes ayant les propriétés suivantes :

a. $|h(n)| \leqslant 1$ pour tout $n$ ;

b. $h(1) = 1$ et $h(mn) = h(m)h(n)$ lorsque $(m , n) = 1$ .

Supposons en outre que $\sum \frac{1 - \mathcal{R}h(p)}{p} = +\infty$ et qu'il existe un $\rho$ réel ou complexe tel que l'on ait pour $x$ infini

$$\sum_{p \leqslant x} h(p) = \rho\frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right] .$$

Alors on a pour $x$ infini

$$\sum_{n \leqslant x} h(n) = o[x] \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q}} h(n) = o[x] .$$

On voit que, si $E$ satisfait à l'hypothèse $(H_2)$, ce théorème s'applique à $h(n) = z^{\omega_E(n)}$ ou $z^{\Omega_E(n)}$, avec $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, et à $h(n) = u^{\omega_E(n)} v^{\Omega_E(n)}$, avec $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$ et $uv \neq 1$.

De même, si $E_1$ et $E_2$ sont sans élément commun et satisfont à l'hypothèse $(H_2)$, le théorème s'applique à $h(n) = u^{f(n)} v^{g(n)}$, où $f = \omega_{E_1}$ ou $\Omega_{E_1}$, $g = \omega_{E_2}$ ou $\Omega_{E_2}$, $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$ et $u$ ou $v \neq 1$.

---

([3]) Il est évident que l'hypothèse $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ est une conséquence de l'autre si $\alpha > 0$ .

Ce théorème est d'ailleurs susceptible d'applications plus générales à l'étude de la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques réelles additives, c'est-à-dire satisfaisant à $f(mn) = f(m) + f(n)$ toutes les fois que $(m , n) = 1$ .

Sa démonstration fait appel à un théorème taubérien relatif à la série de Dirichlet $\sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ , qui ne fait intervenir que les valeurs de la somme de cette série pour $s$ réel et se déduit immédiatement d'un théorème classique de Hardy et Littlewood sur les séries de Dirichlet à coefficients positifs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANDAU (Edmund). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band 2. - Leipzig, B.G. Teubner, 1909.

[2] PILLAI (S.S.). - Generalisation of a theorem of Mangoldt, Proc. Ind. Acad. Sc., Section A, t. 11, 1940, p. 13-20.

[3] SELBERG (Sigmund). - Zur Theorie der quadratfreien Zahlen, Math. Z., t. 44, 1939, p. 306-318.