F. Bertrandias

Fonctions arithmétiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1957-1958), exp. nº 11, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58
-:-:-:-

27 janvier 1958

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Mme F. BERTRANDIAS

Nous dirons qu'une fonction est "arithmétique" lorsqu'elle prend des valeurs entières rationnelles pour les valeurs entières rationnelles positives de la variable.

Les fonctions $f(x)$, qui nous intéressent, satisfont de plus aux conditions (A) :

$$(A) \begin{cases} f(x) \text{ est analytique dans un angle } |\arg x| < \delta \\ f(x) \text{ est de type exponentiel } w \end{cases}$$

($f(x)$ de type exponentiel w signifie $\limsup_{|x| \to \infty} \dfrac{\log |f(x)|}{|x|}$ a une valeur finie w)

Comme exemples de telles fonctions on peut cités :

- des polynômes
- les fonctions $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i^x$, où les α_i sont des entiers algébriques figurant avec tous leurs conjugués.

<u>Peut-on trouver toutes les fonctions arithmétiques vérifiant les conditions</u> A <u>avec</u> $w < w_0$?

Le problème avait été résolu par POLYA [6] , en 1915, pour les fonctions entières croissant moins vite que 2^r ($w_0 = \text{Log } 2$) : la condition, pour $f(x)$, d'être arithmétique, entraîne que $f(x)$ est un polynome.

Les travaux de HARDY, IZUMI, CARLSON, généralisant les résultats de POLYA, n'avaient pas permis de dépasser la constante $\text{Log } 2 = 0,693 \ldots$ En 1940, SERLBERG a montré que si w_0 dépasse légèrement Log 2 ($w_0 = \text{Log } 2 + 0,008$) , la fonction entière et arithmétique $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = P(x) + 2^x Q(x)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynomes.

En 1946, C. PISOT, en utilisant la transformée de Laplace de $f(x)$, a obtenu des résultats beaucoup plus généraux, valables pour les fonctions analytiques non entières. En particulier il a montré que si $w < 0,843 \ldots$, $f(x)$ est de la forme

$$|f(x) = \alpha_1^x P_1(x) + \dots + \alpha_s^x P_s(x)|$$

où $P_1(x) \dots P_s(x)$ sont des polynômes et $\alpha_1 \dots \alpha_s$ des entiers algébriques en nombre fini

1. Méthode de Polya [1] .

A titre d'exemple des méthodes d'interpolation employées également par HARDY, IZUMI, etc ... POLYA démontre le théorème :

THÉORÈME 1.1. - Si une fonction entière $f(x)$ est arithmétique et si

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^{\frac{1}{2}} M(r)}{2^r} = 0 \quad ,$$

$f(x)$ est un polynôme.

($M(r)$ module maximum de $f(x)$ pour $(x) = r$)

On construit la série $\sum_0^\infty a_n \binom{x}{n}$ où

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!}$$

et

$$a_n = \Delta^n f(0) = f(n) - \binom{n}{1} f(n-1) + \dots + (-1)^n f(0)$$

Pour $x = n$, cette série n'a qu'un nombre fini de termes dont la somme est $f(n)$. L'hypothèse faite sur $M(r)$ entraîne que cette série est un polynôme $g(x)$

En effet

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_c \left[\frac{1}{x-n} - \frac{\binom{n}{1}}{x-n+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{x}\right] f(x)\, dx = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(x)\, dx}{x(x-1)\dots(x-n)}$$

où c est le cercle de centre 0 et de rayon $r > n$.

Ceci entraîne une majoration de $|a_n|$

$$|a_n| < \frac{n!\, M(r)}{(r-1) \dots (r-n)} < \frac{2^r \varepsilon(r)}{r^{\frac{1}{2}}} \; \frac{\Gamma(n+1)\, \Gamma(r-n)}{\Gamma(r)}$$

Si l'on choisit $r = 2n$, cette majoration tend vers zéro. a_n étant entier, il en résulte que $g(x)$ est un polynôme.

Le LEMME. - Si deux fonctions entières $g(x)$ et $f(x)$ sont de type exponentiel inférieur à 1, $g(n) = f(n)$ entraîne $g(x) \equiv f(x)$, montre ensuite que $f(x)$ est un polynôme.

2. Transformée de Laplace de $f(x)$. Série de puissances associées à $f(x)$ [2].

1° Soit une fonction $f(x)$ vérifiant les conditions (A).

Si

$$w(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |f(re^{ie})|}{r}$$

$\rho = w(\varphi)$ est l'équation polaire de l'indicatrice de croissance I de $f(x)$

Les intégrales $\ell_\varphi(s) = \int e^{-sx} f(x)\,dx$ (le long de la démi-droite issue de 0 ayant pour angle polaire φ) définissent une même fonction $\ell(s)$ appelée transformée de Laplace de $f(x)$.

$\ell(s)$ est uniforme et holomorphe dans le complémentaire du domaine (S).

S = réunion des demi-plans $|s| \cos(\omega + \varphi) < w(\varphi)$ (avec $s = |s|e^{i\omega}$) S est le plus petit ensemble convexe contenant les singularités de $\ell(s)$. La courbe qui limite (S) est symétrique de la transformée par antipodaire de I, par rapport à l'origine. Le domaine (S) est tout entier à distance finie si les conditions (A) sont vérifiées avec $\delta > \frac{\pi}{2}$. Si $f(x)$ est une fonction entière de type exponentiel, (S) est évidemment contenu dans le cercle $(0, w)$.

Inversement la connaissance de $\ell(s)$ permet de déterminer $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_c e^{sx} \ell(s)\,ds \tag{2.1}$$

où c est une courbe convenable du domaine d'holomorphie de $\ell(s)$. Si $\delta > \frac{\pi}{2}$, c peut être n'importe quelle courbe fermée contenant (S) à son intérieur.

2° Associons à la fonction $f(x)$ la série de puissances $\sum_0^\infty \frac{f(n)}{z^{n+1}}$

Cette série définit une fonction $F(z)$, holomorphe à l'extérieur d'un domaine situé à distance finie. Ce domaine se déduit simplement de l'ensemble S des singularités de $\ell(s)$.

En effet

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{f(n)}{z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi} \sum_0^\infty \frac{1}{z^{n+1}} \int_c e^{ns} \ell(s)\,ds \quad \text{d'après (2.1)}$$

Les fonctions

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_0^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_c e^{ns}\,\ell(s)\,ds \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_c \Big(\sum_0^{\infty}\frac{e^{ns}}{z^{n+1}}\Big)\,\ell(s)\,ds$$

sont identiques puisqu'elles coïncident dans le domaine de convergence de la série $\sum_0^{\infty}\frac{e^{ns}}{z^{n+1}}$. D'où

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\ell(s)\,ds}{z - e^s} \tag{2.2}$$

$F(z)$ est donc holomorphe à l'extérieur de la courbe Γ tranformée de c par $z = e^s$.

On démontre que Γ peut être choisie aussi voisine que l'on veut de la frontière de l'ensemble T, T étant le transformé de S par $z = e^s$. D'où le

THÉORÈME 2.1. - <u>La série de puissances</u> $F(z) = \sum_0^{\infty}\frac{f(n)}{z^{n+1}}$ <u>définit une fonction holomorphe à l'extérieur du domaine</u> T, <u>transformé par</u> $z = e^s$ <u>de l'ensemble</u> S <u>des singularités de</u> $\ell(s)$.

3. <u>Théorème de Polya et Carlson</u>.

En 1928, POLYA, généralisant un résultat de Carlson, a démontré un théorème important sur les séries de puissances [7].

THÉORÈME 3.1. - <u>Lorsqu'une fonction</u> $\Phi(z)$, <u>développable en série de puissances en</u> $\frac{1}{z}$, <u>à coefficients entiers rationnels, est holomorphe et uniforme à l'extérieur d'un domaine</u> E <u>dont le diamètre transfini est inférieur à</u> 1, $\Phi(z)$ <u>est une fraction rationnelle</u>.

a. <u>Définition du diamètre transfini d'un ensemble de points</u> [3].

Soient E un ensemble de points fermé borné, $P_n(z)$ un polynôme à coefficients complexes, de degré n, dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1,

1° n <u>étant fixé : il existe un polynôme</u> $P_n(z)$ <u>et un seul dont le maximum du module sur</u> E <u>soit le plus petit possible</u>.

Ce polynôme $T_n(z)$ est appelé le polynôme de Tchebicheff de degré n sur E. De façon plus précise, on a :

$$\max_{\text{sur } E}|T_n(z)| = \lim \max_{\text{sur } E}|P_n(z)| = \tau_n$$

2° Lorsque $n \to \infty$: $\sqrt[n]{\tau_n}$ tend vers une limite τ qui est par définition le diamètre transfini de l'ensemble E

On démontre l'existence de $T_n(z)$ en remarquant que la quantité $\max_{\text{sur } E} |P_n(z)|$ est une fonction continue des coefficients de P_n. L'unicité se démontre facilement quand on a prouvé que $T_n(z)$ atteint son maximum en $n+1$ points au moins. Pour le 2° on considère la suite particulière de polynômes $P_n^{\times}(n) = [T_{n_0}(z)]^p z^q$ où p et q sont le quotient et le reste de la division de n par n_0 et l'on voit que $\sqrt[n]{\max |P_n^{\times}|}$ tend vers la lim inf $\sqrt[n]{\tau_n}$.

- Le diamètre transfini τ de l'ensemble E ne dépend que de E, et non de sa position dans le plan.

- Le diamètre transfini d'un cercle est son rayon :

En effet, sur le cercle (O, R) le maximum M du module de $P_n(z)$ vérifie l'inégalité :

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{P_n(z)}{z^{n+1}}\, dz \leqslant \frac{M}{R^n}$$

c'est-à-dire $M \geqslant R^n$. D'où :

$$z^n = T_n(z) \qquad \tau_n = R_n \qquad \text{et} \qquad \tau = R$$

- Les ensembles E dont le diamètre transfini est inférieur à 1 possèdent une propriété remarquable :

Si $\tau < 1$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers algébriques contenus dans E avec tous leurs conjugués.

Principe de la démonstration. - Le maximum du module des polynômes $T_n(z)$ tend vers zéro quand $n \to \infty$ (puisque $\tau_n < (\tau + \varepsilon)^n$). Il en résulte l'existence d'un polynôme $Q(z)$ à coefficients entiers, tels que sur E on ait $|Q(z)| < 1$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des entiers algébriques avec tous leurs conjugués. $Q(\alpha_1) \dots Q(\alpha_s)$ est un entier rationnel. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ appartiennent à E $|Q(\alpha_1) \dots Q(\alpha_s)| < 1$ et donc $Q(\alpha_1) \dots Q(\alpha_s) = 0$. $Q(z)$ admet donc tous les α_i comme racines.

Application à la recherche des entiers algébriques contenus, avec tous leurs conjugués dans E tel que $\tau < 1$: il suffit de trouver un polynôme $Q(z)$ à coefficients entiers, tel que la courbe $|Q(z)| = 1$ contienne E à son intérieur.

Propriété du diamètre transfini d'un ensemble E. - Il est invaraint dans toute transformation conforme transformant l'extérieur de E en l'extérieur de E', et conservant le point à l'infini et se réduisant à une translation à l'infini.

b. Démonstration du théorème de Polya et Carlson.

$$\Phi(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $F(z)$ soit une fraction rationnelle est que le déterminant $D_0^{(n)}$ soit nul à partir d'un certain rang

$$D_0^{(n)} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_n \\ a_1 & & \ldots \\ \ldots & & \\ a_n & & a_{2n} \end{vmatrix}$$

a_0, ... a_n, ... étant entiers rationnels, $D_0^{(n)}$ est un entier rationnel. Pour introduire l'hypothèse : les singularités de $F(z)$ sont dans un domaine de diamètre transfini τ plus petit que 1, on fait subir au déterminant $D_0^{(n)}$ une transformation faisant apparaître les polynômes de Tchebicheff sur E.

On trouve

$$D_0^{(n)} = \begin{vmatrix} b_0 & \ldots & b_n \\ \ldots & & \ldots \\ b_n & \ldots & b_{2n} \end{vmatrix}$$

avec

$$b_{h+k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\, Q_h(z)\, Q_k(z)}{z}\, dz$$

$Q_h(z)$ étant le polynôme de Tchebicheff de degré h sur $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ une courbe fermée entourant le domaine E.

E ayant un diamètre transfini inférieur à 1, on peut trouver une telle courbe $\mathcal{C}$ de diamètre transfini τ' inférieur à 1 (propriété des transformations conformes).

Soient M le maximum du module de $\frac{f(z)}{z}$ sur $\mathcal{C}$ et L la congueur de $\mathcal{C}$.

$$|b_{h+k}| < \frac{M.L}{2\pi} \max |Q_h(z)| \max |Q_k(z)|$$

Pour $h > n_0$,

$$\max|Q_h(z)| < \theta^h \qquad (\tau' < \theta < 1)$$

donc quel que soit h,

$$\max|Q_h(z)| < A\theta^h$$

(A constante indépendante de h) et donc

$$b_{h+k} < C\ \theta^h\ \theta^k$$

La majoration de $|D_0^{(n)}|$ sur son développement, donne :

$$|D_0^{(n)}| < (n+1)\,!\,[C^{n+1}\ \theta^{1+2+\ldots+n}\ \theta^{1+2+\ldots+n}] < [(n+1)\ C\ \theta^n]^{n+1}$$

Donc : $D_0^{(n)}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini et par suite $D_0^{(n)} = 0$ à partir d'un certain rang

4. Etude des fonctions arithmétiques $f(x)$ vérifiant les conditions (A).

La série de puissances associée $F(z) = \sum_0^{\infty} \frac{f(n)}{z^{n+1}}$ est à coefficients entiers, $F(z)$ est holomorphe à l'extérieur du domaine T. Donc : si le diamètre transfini τ de T est inférieur à 1, $F(z)$ est une fraction rationnelle.

Propriété des pôles α_i. - D'après un théorème de Fatou, toute fraction rationnelle, représentée par un développement en série en $\frac{1}{z}$, à coefficients entiers, peut se mettre sous la forme : $\frac{B(z)}{A(z)}$, où $B(z)$ et $A(z)$ sont à coefficients entiers, le coefficient du terme de plus haut degré de $A(z)$ étant 1. Les α_i sont donc des entiers algébriques, et avec chaque α_i figurent tous ses conjugués.

Or T ne contient qu'un nombre fini d'entiers algébriques avec tous leurs conjugués : les pôles α_i sont déterminés par la connaissance de T. D'où

THÉORÈME 4.1. - Soit $f(x)$ une fonction arithmétique, satisfaisant aux conditions (A). Soit T le transformé par $z = e^s$ de l'ensemble S des singularités de $\ell(s)$. Si le diamètre transfini τ de T est inférieur à 1.

$$\boxed{f(n) = \alpha_1^{\,n}\ P_1(n) + \ldots + \alpha_k^{\,n}\ P_k(n)}$$

$P_1(n) \ldots P_k(n)$ étant des polynômes en n et $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ des entiers algébriques figurant avec tous leurs conjugués dans T.

THÉORÈME d'unicité 4.2. - Si les conditions (A) sont vérifiées avec $\delta > \frac{\pi}{2}$ et si les domaines déduits de S par les translations $2k\pi i$ sont tous dans l'extérieur de S

(H) $f(n) = 0$ pour n entier positif entraîne $f(x) \equiv 0$

DÉMONSTRATION. - Posons $z = e^u$

$$F(z) = F(e^u) = G(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{\ell(s)ds}{e^u - e^s}$$

Soient Γ une courbe fermée entourant c et le point u,

$$G(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\ell(s)ds}{e^u - e^s} + \frac{\ell(u)}{e^u} \tag{4.1}$$

Si S vérifie l'hypothèse (H), il est possible de trouver C, u, et Γ de façon que Γ vérifie l'hypothèse (H).

Alors $e^u - e^s$ ne s'annule pour aucun u intérieur à Γ. L'intégrale $\int_\Gamma \frac{\ell(s)\,ds}{e^u - e^s}$ définit une fonction holomorphe à l'intérieur de Γ.

Si $f(n) = 0$ pour n entier, $G(u) \equiv 0$. D'après (4.1), $\ell(s)$ est holomorphe à l'intérieur de Γ et l'intégrale $\int_c e^{sx}\,\ell(s)\,ds$ est nulle : $f(x) \equiv 0$.

Les 2 théorèmes précédents entraînent :

THÉORÈME 4.3. - Soit $f(x)$ une fonction arithmétique vérifiant les conditions (A) avec $\delta > \frac{\pi}{2}$. Si le diamètre transfini de T est inférieur à 1 et si le domaine S vérifie l'hypothèse H, on a :

$$f(x) = \alpha_1^x P_1(x) + \dots + \alpha_k^x P_k(x) \tag{4.2}$$

où $P_1(x) \dots P_k(x)$ sont des polynômes en x et $\alpha_1 \dots \alpha_k$ des entiers algébriques continus, avec pour leurs conjugués, dans T.

CONSÉQUENCES. - On peut prendre en particulier pour S le cercle $|s| \leqslant w$. Alors T est le domaine $|\mathrm{Log}\, z| < \Gamma$ dont le diamètre transfini croît avec w et est égal à 1 si $w = w_0 = 0{,}843 \dots$ Comme $w_0 < \pi$, L vérifie l'hypothèse H.

THÉORÈME 4.4. - Toute fonction arithmétique entière $f(x)$ de type exponentiel $w < w_0$ est de la forme (4.2)

1° si $w < \mathrm{Log}\, 2 = 0{,}693 \dots$, 1 est le seul entier algébrique contenu dans T : $f(x)$ est un polynôme (on retrouve le théorème 1.1)

2° si $w < \left|\mathrm{Log}\, \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = 0{,}758 \dots$, 1 et 2 sont les seuls entiers algébriques :

$$f(x) = P(x) + Q(x)\, 2^x$$

3° si $w < 0{,}8$, 1, 2, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ sont les seuls entiers algébriques :

$$f(x) = P(x) + Q(x)2^x + R(x)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^x + S(x)\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)^x$$

Inversement si l'on prend pour T le cercle $|z-1| < 1$, on définit des fonctions analytiques dans le demi-plan $\mathcal{R}(x) > 0$, et dont l'indicatrice de croissance I a pour équation polaire

$$\rho = g(\varphi) = \cos\varphi \log(2\cos\varphi) + \varphi \sin\varphi$$

1 étant le seul entier algébrique contenu dans T avec tous ses conjugués, on a :

THÉORÈME 4.5. - <u>Toute fonction</u> $f(x)$ <u>satisfaisant les conditions</u> (A) <u>avec</u> $\delta = \frac{\pi}{2}$, <u>et telle que</u> $w(\varphi) < g(\varphi)$ <u>est un polynôme</u>.

CARLSON [1] avait trouvé ce résultat par un autre procédé. Il donne un exemple de fonction arithmétique ayant dans $\mathcal{R}(x) > 0$ pour indicatrice de croissance $w(\varphi) = g(\varphi)$, à savoir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{x+1}{n^2}$$

5. <u>Etude des fonctions $f(x)$-entières, de type exponentiel et telles que $f(x)$ et $f(-x)$ soient simultanément arithmétiques</u>.

POLYA, en 1915, avait démontré le

THÉORÈME 5.1. - <u>Si</u> $f(x)$ <u>est une fonction entière, telle que</u> $f(n)$ <u>soit un entier rationnel pour</u> n <u>entier rationnel positif ou négatif, la condition</u> :

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^{\frac{3}{2}} M(r)}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r} = 0$$

entraîne que $f(x)$ est un polynôme.

La méthode employée dans 4 pour les fonctions arithmétiques réussit encore

1° <u>Cas des fonctions paires</u> : $f(x) = f(-x)$.

Soit

$$h(n) = f(n) + \binom{n}{1} f(n-2) + \dots + f(-n) \tag{5.1}$$

On considère la série

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(z) &= \sum_0^{\infty} \frac{h(n)}{z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \sum_0^{\infty} \frac{(e^s+e^{-s})^n}{z^{n+1}} \ell(s)\, ds \\ H(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\ell(s)}{z-(e^s+e^{-s})} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Les singularités de $H(z)$ sont donc intérieures au domaine $T^{\times}$, transformé du domaine S par $z = e^{s} + e^{-s}$.

Si le diamètre transfini $\tau^{\times}$ de $T^{\times}$ est inférieur à 1, $H(z)$ est une fraction rationnelle, d'après le théorème 4.1 on a :

$$h(n) = \beta_1^{\,n} Q_1(n) + \dots + \beta_k^{\,n} Q_k(n)$$

où $\beta_1 \dots \beta_k$ sont des entiers algébriques appartenant avec tous leurs conjugués à $T^{\times}$

Montrons que $f(n)$ est de la forme

$$f(n) = (\eta_1^{\,n} + \eta_1^{\,-n})\, P_1(n) + \dots + (\eta_k^{\,n} + \eta_k^{\,-n})\, P_k(n)$$

où

$$\eta_1 + \eta_1^{-1} = \beta_1 \;\; \dots \;\; \eta_k + \eta_k^{-1} = \beta_k$$

a. Posons d'abord

$$h_1(n) = \beta_1^{\,n} Q_1(n)$$

et cherchons la forme de la fonction paire $f_1(n)$ déterminée par (5.1).

Les séries de puissances associées sont

$$H_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{\ell_1(s)}{z-(e^{s}+e^{-s})} \qquad F_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{\ell_1(s)}{z-e^{s}}$$

$H_1(z)$ est une fraction rationnelle ayant pour seul pôle β ; le domaine (S) à $2k\pi i$ près est donc simplement le segment $(-v, v)$ où v et $-v$ sont déterminés par $\beta = e^{v} + e^{-v}$.

Posons $z = e^{u} + e^{-u}$,

$$H_1(z) = R_1(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{\ell_1(s)}{(e^{u}+e^{-u})-(e^{s}+e^{-s})}$$

Soit Γ une courbe entourant c et u.

$$R_1(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\ell_1(s)\, ds}{e^{u}+e^{-u}-(e^{s}+e^{-s})} + \frac{\ell_1(u)}{e^{u}-e^{-u}}$$

S vérifiant (H) on peut trouver u, c, et Γ de façon que Γ vérifie (H).

Alors la fonction $\ell_1(u)$ a les mêmes singularités dans Γ, et donc S, que

$$(e^{u} - e^{-u})R_1(u) = (e^{u} - e^{-u})\sum_{k=1}^{k} \frac{\lambda_k}{(e^{u}+e^{-u}-\beta)^h}$$

De façon analogue, on démontre que $\ell(u')$ a les mêmes singularités dans S que : $e^{u'}G_1(u')$, où $G_1(u') = F_1(z)$ avec $z = e^{u'}$.

Il en résulte que $F_1(z)$ a les mêmes singularités dans T que :

$$\sum_1^k \frac{\lambda_h}{(z+\frac{1}{z} - \beta_1)}$$

ces singularités sont toutes des pôles, et ces pôles sont déterminés par :

$$\eta_1 + \frac{1}{\eta_1} = \beta_1$$

on a donc,

$$f_1(n) = (\eta_1^{\,n} + \eta_1^{-n})\, P_1(n)$$

b. $h(n) = \sum \beta_i^n\, Q_i(n)$ entraîne donc

$$f(n) = \sum (\eta_i^{\,n} + \eta_i^{-n})\, \alpha_i(n)$$

D'où le

THÉORÈME 5.2. - <u>Si</u> $f(x)$ <u>paire, entière, de type exponentiel est arithmétique, et si le diamètre transfini de</u> $T^{\times}$ <u>est inférieur à</u> 1, <u>alors</u>

$$f(n) = (\eta_1^{\,n} + \eta_1^{-n})\, P_1(n) + \dots + (\eta_k^{\,n} + \eta_k^{-n})\, P_k(n)$$

où $\eta_1 \dots \eta_k$ sont des unités situées avec toutes leurs conjuguées dans T ;

THÉORÈME d'unicité 5.3. - Il se démontre comme dans 4. Si $f(x)$ entière, paire est arthmétique et si (S) vérifie l'hypothèse (H)

$$f(n) = 0 \text{ entraîne } f(x) \equiv 0$$

D'où

THÉORÈME 5.4. - <u>Si</u> $f(x)$ <u>paire, entière, de type exponentiel est arithmétique, si</u> $\tau^{\times} < 1$ <u>et si</u> S <u>vérifie l'hypothèse</u> (H), alors

$$f(x) \equiv (\eta_1^{\,x} + \eta_1^{-n})\, P_1(x) + \dots + (\eta_k^{\,x} + \eta_k^{-x})\, P_k(x)$$

2° <u>Cas des fonctions impaires</u>. - se traite de façon analogue en posant

$$k(n) = f(n) + \dots + \left[\binom{n-1}{m} - \binom{n-1}{m-1}\right] f(n - 2m) \dots f(-n)$$

alors

$$K(z) = \sum_0^{\infty} \frac{k(n)}{z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \frac{\ell(s)}{z-(e^s+e^{-s})} ds$$

3° Toute fonction est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. - Soit $f(x)$ une fonction entière, de type exponetiel, telle que $f(x)$ et $f(-x)$ soient arithmétiques.

THÉORÈME 5.5. - Si le diamètre transfini $\tau^{\times}$ de $T^{\times}$ est inférieur à 1.

$$f(n) = \eta_1^{\,n} P_1(n) + \eta_1^{-n} Q_1(n) + \dots + \eta_k^{\,n} P_k(n) + \eta_k^{-n} Q_k(n)$$

THÉORÈME 5.6. - Si $\tau^{\times} < 1$, et si S vérifie l'hypothèse (H), alors

(5.3) $$f(x) = \eta_1^{\,n} P_1(x) + \eta_1^{-n} Q_1(x) + \dots + \eta_k^{\,x} P_k(x) + \eta_k^{-n} Q_k(x)$$

CONSÉQUENCES..- On peut prendre en particulier pour S le cercle $|s| \leqslant w$. D est le domaine

$$\left| \log \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right| \leqslant w$$

dont le diamètre transfini croit avec w, et est égal à 1 pour $w = w_0^{\times} = 0{,}9934 \dots$ comme $\omega_0^{*} < \pi$, la condition (H) est vérifiée si $\omega < \omega_0^{+}$.

THÉORÈME 5.7. - Toute fonction $f(x)$ entière de type exponentiel w telle que $f(x)$ et $f(-x)$ soient arithmétiques est de la forme (5.3) si $w < w_0^{+}$.

En particulier si $w < \log \frac{z + \sqrt{5}}{2} = 0{,}96242 \dots$, $\eta_1 = 1$ est la seule unicité : $f(x)$ est un polynôme. (On retrouve le théorème 5.1)

6. Etude des fonctions $f(x)$ vérifiant la condition (A) telles que la dérivée n-ième prenne une valeur entière pour $x = n$.

$f'(n)$ a pour transformé de Laplace $s\,\ell(s) - u_0$. D'où

$$f'(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_c e^{sx} s\, \ell(s)\, ds$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_c e^{sx} s^n \ell(s)\, ds$$

Soit $H(z)$ la fonction représentée par la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(x)}(n)}{z^{n+1}}$

$$H(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \sum_0^\infty \frac{e^{ns} s^n}{z^{n+1}} \ell(s)\, ds = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{\ell(s)\, ds}{z - se^s}$$

Les singularités de $H(z)$ appartiennent au domaine V transformé de S par $z = s\,e^s$. Si le diamètre transfini v de V est plus petit qui 1 , $H(z)$ est une fraction rationnelle.

La fonction de u : $z = u\,e^u$ est multivalente. Elle fait correspondre biunivoquement le domaine $\mathcal{D}$ du plan des u, limité pas la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{\pi - \theta}{\sin\theta}$ et contenant le point $u = 0$, au plan des z. Dans la suite on désignera le point de $\mathcal{D}$ associé à z par $z = u\,e^u$ par $u = \gamma(z)$.

$$H(z) = h(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{\ell(s)\, ds}{ue^u - se^s}$$

Supposons que S appartienne à $\mathcal{D}$. On peut trouver une courbe fermée Γ contenue dans $\mathcal{D}$ et entourant la courbe G et le point u.

$$h(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\ell(s)\, ds}{ue^u - se^s} + \frac{\ell(u)}{(1+u)e^u}$$

L'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\ell(s)\, ds}{ue^u - se^s}$ est holomorphe à l'intérieur de Γ. Donc $\ell(u)$ et $(1 + u)\, e^u\, h(u)$ ont donc les mêmes singularités dans $\mathcal{C}$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{sx}(1 + s)\, e^s\, h(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{x\,\gamma(z)}\, H(z)\, dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}'} e^{x\,\gamma(z)} \sum \frac{\lambda_h}{(z - \beta_i)^h}\, dz = \sum_i P_i(x)\, e^{x\,\gamma(\beta_i)} \end{aligned}$$

THÉORÈME 6.1. - <u>Si le diamètre transfini de</u> V <u>est inférieur à</u> 1 <u>et si l'ensemble</u> S <u>est contenu dans</u> $\mathcal{D}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\, e^{\alpha_i x}$$

<u>les</u> $\alpha_i\, e^{\alpha_i}$ <u>étant des entiers algébriques, appartenant à</u> V <u>ainsi que tous leurs conjugués.</u>

CONSÉQUENCES. - Si on prend pour S le cercle $|s| \leq r$, V est le domaine $|\gamma(z)| \leq r$ dont le diamètre transfini croît avec γ et est égal à 1 pour $r = r_1$ peu différent de 0,7; pour $r < r_1$, le cercle $|s| \leq r$ est contenu dans $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 6.2. - Les fonctions entières $f(x)$ pour lesquelles $f^{(n)}(n)$ est entier et dont le type r est inférieur à $r_1 = 0,7 \ldots$ sont de la forme (1)

- Si $r < \gamma(1) = 0,567 \ldots$ zéro est le seul entier algébrique contenu, $f(x)$ est un polynôme

- Si $r < \gamma\left(\frac{1+i\sqrt{z}}{2}\right) = 0,616 \ldots$, zéro et 1 sont les seuls entiers algébriques contenus et

$$f(x) = P(x) + Q(x)\, e^{x\gamma(1)}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLSON (Fritz). - Über ganzwertige Funktionen, Math. Z., t. 11, 1921, p. 1-23.

[2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Prolongement analytique de la série de Taylor, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 87, 1951, p. 105-124.

[3] FEKETE (M.). - Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z., t. 17, 1923, p. 228-249.

[4] PISOT (Charles). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 988-990.

[5] PISOT (Charles). - Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 1027-1028.

[6] POLYA (Georg). - Über gangwertige ganze Funktionen, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 40, 1915, p. 1-16.

[7] POLYA (Georg). - Arithmetische Eigenschaften und analytischer Charakter, Jahresb. deutschen Math. Verein., t. 31, 1922, p. 107-115.