Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Zisman

Éléments de cohomologie

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 8, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A8_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 8

ÉLÉMENTS DE COHOMOLOGIE

(Exposé de M. ZISMAN, le 21.1.1957)

I.- GÉNÉRALITÉS

1.- Groupe différentiel gradué.-

Soit A un groupe abélien (resp. module sur un anneau K) gradué par des sous-groupes (resp. sous-modules) A^p , c'est-à-dire $A = \sum_{p=0}^{\infty} A^p$ (p entier $\geqslant 0$; $\sum$ représente la somme directe).

On dira que A est un groupe différentiel s'il existe un endomorphisme $d : A \to A$ (resp. endomorphisme de modules) tel que

a) $dA^p \subset A^{p+1}$

b) $dd = 0$

(Tout ce qui suit est encore valable si la condition a) est remplacée par $dA^p \subset A^{p-1}$ $dA^0 = 0$ à condition de changer de façon évidente les formules ; en gros, on passe d'un cas à l'autre en changeant p en $-p$).

Le noyau de d est appelé l'ensemble des cocycles ; l'image de d est appelée l'ensemble des cobords ; le groupe

$$H(A) = d^{-1}(0)/dA$$

est appelé le groupe de cohomologie de A . On a bien $dA \subset d^{-1}(0)$ puisque $d^2 = 0$ en vertu de b) .

Le groupe $(d^{-1}(0) \cap A^p)/dA^{p-1} = H^p(A)$ est appelé le p-ème groupe de cohomologie de A et l'on a évidemment :

$$H(A) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(A)$$

2.- Nombres de Betti, torsion.

a) Si le module A est un espace vectoriel sur un corps , $d^{-1}(0)$ et dA sont des espaces vectoriels, ainsi que $d^{-1}(0) \cap A^p$, dA^{p-1} , $H^p(A)$, $H(A)$.

Si de plus $H^p(A)$ est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle p-ème nombre de Betti de A la dimension de $H^p(A)$; la série formelle $P(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (\dim.H^p(A))t^p$ est la "série de Poincaré" de A. La connaissance de $P(t)$ détermine la connaissance de $H(A)$. Si $H^p(A) = 0$ sauf pour un nombre fini de p, le nombre $P(-1) = \sum (-1)^p \dim.H^p(A)$ est appelé la "caractéristique d'Euler Poincaré de A".

b) Supposons maintenant que A soit un module libre de dimension finie sur l'anneau Z des entiers. Nous savons que dans ces conditions $H^p(A) = (d^{-1}(0) \cap A^p)/dA^{p-1}$ (quotient de 2 modules libres de dimension finie) est la somme directe d'un module libre de dimension finie et d'un certain nombre fini de Z_{q_i} (modules sur Z des entiers modulo q_i) ; les éléments non libres sont appelés les éléments de torsion et les q_i les coefficients de torsion ; la dimension de la partie libre de $H^p(A)$ est encore appelée p-ème nombre de Betti et on définit comme précédemment $P(t)$ et $P(-1)$. Pour déterminer $H(A)$ il faut connaitre non seulement $P(t)$ mais encore les coefficients de torsion.

3.- Algèbre différentielle graduée.

Soit A une algèbre sur un certain anneau K. On dira que A est graduée si elle est graduée en tant que K-module, et si de plus la graduation est "compatible" avec la multiplication dans A, c'est-à-dire si $A^p.A^q \subset A^{p+q}$.

A sera une algèbre différentielle graduée si elle est différentielle en tant que K-module, et si de plus le cobord est "compatible" avec la multiplication et la graduation dans le sens suivant :

$$d(a.b) = (da).b + (-1)^p a.db \qquad (a \in A^p, \quad b \in A)$$

(d s'appelle alors une antidérivation).

PROPOSITION 3-1.- Si A est une algèbre différentielle graduée, $H(A)$ est une algèbre.

Si $\bar{a} \in H^p(A)$ $\bar{b} \in H^q(A)$, il faut définir $\bar{a}.\bar{b} \in H^{p+q}(A)$.
Soit donc $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$; on a : $d(ab) = (da).b + (-1)^p a.db = 0$ car $da = 0$ $db = 0$.

Donc ab est un cocycle $\in d^{-1}(0) \cap A^{p+q}$. On pose $\bar{a}.\bar{b} = \overline{ab}$ = classe de cohomologie du cocycle ab. Pour justifier cette définition il faut montrer que $\overline{ab}$ ne dépend que de $\bar{a}$ et de $\bar{b}$ et non des représentants a et b.

or si $a' = a + d\alpha$ $(\alpha \in A^{p-1})$ $a'b = ab + (d\alpha)b$ mais

$d(\alpha . b) = (d\alpha)b + (-1)^{p-1}\alpha . db = (d\alpha)b$ donc

$a'b = ab + d(\alpha . b)$ et par conséquent $\overline{a'b} = \overline{ab}$ C.Q.F.D.

Si l'algèbre A est anticommutative, (c'est-à-dire si $ab = (-1)^{pq} ba$, $a \in A^p$ $b \in A^q$) on montre immédiatement que $H(A)$ est aussi anticommutative.

EXEMPLE.- L'algèbre des formes différentielles différentiables définies sur une variété V est une algèbre différentielle graduée au sens défini plus haut.

4.- Homomorphismes.

Soient A et B deux groupes différentiels gradués (resp. modules, resp. algèbres). On appelle homomorphisme de A dans B un homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ des structures de groupes (resp. modules resp. algèbres) de A et de B, compatibles avec les graduations et les opérateurs de cobords :

$$f(A^p) \subset B^p$$

$$f \circ d = d \circ f$$ (d désigne à la fois l'opérateur de cobord de A et de B).

PROPOSITION 4-1.- f induit un homomorphisme $f^* : H(A) \longrightarrow H(B)$.

Soit a un cocycle de A $df(a) = f(da) = 0$ donc fa est un cocycle de B. De plus, si $a' = a + d\alpha$, $f(a') = f(a) + fd\alpha = f(a) + df\alpha$ donc $f(a') - f(a) \in dB$.

L'application $a \longrightarrow f(a)$ passe donc au quotient et définit l'homomorphisme cherché $f^* : H(A) \longrightarrow H(B)$.

5.- La suite exacte de cohomologie.

(rappelons qu'une suite de modules et d'homomorphismes

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} \dots \quad A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}}$$

est dite exacte si, quel que soit i, image de f_i = noyau de f_{i+1})

Soit A un sous-groupe différentiel gradué de B, c'est-à-dire un groupe différentiel gradué tel que l'injection $i : A \longrightarrow B$ soit un homomorphisme au sens de I-4, et $C = B/A$.

On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

<u>LEMME 5-1.- C est un groupe différentiel gradué, et j un homomorphisme de groupe différentiel gradué</u> ;

En effet posons $C^p = j(B^p)$ donc $C = \sum_{p=0}^{\infty} C^p$
Si $b \in B$, posons $d(jb) = j(db)$. Ceci définit un opérateur d sur C en effet j étant <u>sur</u>, tout élément de C peut s'écrire jb, et si $jb = jb'$ $b - b' \in i(A)$ et $d(jb - jb') = d(j(b - b')) = jd(b - b') \in jdi(A) = ji(dA) = 0$ car $j \circ i = 0$.

$d^2 = 0$ car $d^2 j(b) = jd^2(b) = j(0) = 0$

Enfin j est un homomorphisme de groupe différentiel gradué par définition même de la structure de C.

Terminons ces généralités par l'important théorème suivant :

<u>THÉORÈME 5-1.- Si la suite de groupes différentiels gradués</u>

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

<u>est exacte, la suite</u>

$$0 \longrightarrow H^0(A) \xrightarrow{i^*} H^0(B) \xrightarrow{j^*} H^0(C) \xrightarrow{\delta^*} H^1(A) \xrightarrow{i^*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} H^p(A) \xrightarrow{i^*} H^p(B) \xrightarrow{j^*} H^p(C) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(A) \xrightarrow{i^*} \cdots$$

<u>est aussi exacte.</u>

i^* et j^* sont définis par la proposition 4-1. Définissons δ^*. Soit c un cocycle de C^p. j étant sur, il existe $b \in B^p$ tel que $jb = c$ mais $djb = jdb = dc = 0$ donc $db \in i(A^{p+1})$, mais i étant injectif, il existe un seul a tel que $db = ia$. a est un cocycle de A^{p+1} en effet

$$ida = dia = d^2 b = 0$$

par définition, $\delta^* \bar{c} = \bar{a}$ (la barre représente la classe de cohomologie de l'élément écrit au-dessous). Pour justifier cette définition, il faut montrer que $\bar{a}$ ne dépend que de $\bar{c}$, et non de c et b. Or si $jb = jb' = c$, $b' - b \in i(A^p)$ $db' - db \in di(A^p) = i(dA^p)$ et $a' - a \in dA^p$, en désignant par a' l'élément de A^{p+1} tel que $ia' = db'$.

De même, si $c' = c + d\gamma$ $(\gamma \in C^{p-1})$ et $jb' = c'$

$j(b' - b) = d\,\gamma = dj\,\beta \qquad (\beta \in B^{p-1}) \qquad$ donc

$b' - b - d\beta \in i(A^p) \qquad$ c'est-à-dire $\quad db' - db \in i(dA^p)$

ou $\qquad a' - a \in d(A^p)$.

δ^* est bien un homomorphisme $\quad H^p(C) \longrightarrow H^{p+1}(A)$

La vérification du fait que la suite est exacte, n'offre aucune difficulté.

<u>REMARQUE</u>.- Si d abaisse le degré de 1 $(dA^p \subset A^{p-1})$ la suite exacte du théorème s'écrit :

$$\xrightarrow{\delta^*} H^p(A) \xrightarrow{i^*} H^p(B) \xrightarrow{d^*} H^p(C) \xrightarrow{\delta^*} H^{p-1}(A) \xrightarrow{i^*} \cdots$$
$$\xrightarrow{\delta^*} H^0(A) \xrightarrow{i^*} H^0(B) \xrightarrow{d^*} H^0(C) \longrightarrow 0$$

II.- <u>HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE</u>

6.- Dans ce paragraphe, A désignera un groupe différentiel gradué par des A_p , l'opérateur différentiel abaissant le degré de 1 ; cet opérateur sera désigné par ∂ . On a donc $\partial : A_p \longrightarrow A_{p-1} \qquad \partial A_0 = 0$. Les groupes $(\partial^{-1}(0) \cap A_p)/dA_{p+1} = H_p(A)$ sont les groupes d'homologie de A .

(quand d abaisse le degré de 1 on parle d'homologie au lieu de cohomologie et on met les indices au bas des lettres au lieu de les mettre en haut).

Soit G un groupe additif, et $A^p = \mathrm{Hom}(A_p , G)$, où $\mathrm{Hom}(A_p , G)$ représente le groupe additif de tous les homomorphismes de A_p dans le groupe additif G . (Si G et A sont des K-modules, $\mathrm{Hom}(A_p , G)$ désignera le K-module des K-homomorphismes de A_p dans G).

Un élément $f \in A^p$ est donc une fonction linéaire sur A_p à valeur dans G dont la valeur pour $a \in A_p$ sera notée $\langle a , f \rangle$. On munit $A^* = \sum_{p=0}^{\infty} A^p$ d'un opérateur d tel que $\langle \partial a , f \rangle = \langle a , df \rangle$ $f \in A^p$, $a \in A_{p+1}$ $\quad d$ est donc un homomorphisme $A^p \longrightarrow A^{p+1}$ tel que $d^2 = 0$ puisque

$$\langle a , d^2 f \rangle = \langle \partial a , df \rangle = \langle \partial^2 a , f \rangle = 0$$

pour tout $a \in A_{p+2}$ et tout $f \in A^p$.

A^* est donc un groupe différentiel gradué. Les groupes de cohomologie de A^* seront désignés par $H^p(A^*)$, $H^p(A)$ ou $H^p(A , G)$.

PROPOSITION 6-1.- Tout élément $\overline{f} \in H^p(A , G)$ définit canoniquement un homomorphisme de $H_p(A)$ dans G .

Soit f un cocycle de $\overline{f}$; si $a \in A_p \cap \partial^{-1}(0)$, $\langle a , f \rangle$ est indépendant du choix de f dans $\overline{f}$ et du choix de a dans $\overline{a}$. En effet

$\langle a + \partial \alpha , f \rangle = \langle a , f \rangle + \langle \partial \alpha , f \rangle = \langle q , f \rangle + \langle \alpha , df \rangle = \langle a , f \rangle$
car $df = 0$.

$\langle a , f + d \varphi \rangle = \langle a , f \rangle + \langle a , d \varphi \rangle = \langle a , f \rangle + \langle \partial a , \varphi \rangle = \langle a , f \rangle$
car $\partial a = 0$.

On a ainsi un homomorphisme $\overline{f}$ de $H_p(A)$ dans G tel que

$$\langle \overline{a} , \overline{f} \rangle = \langle a , f \rangle .$$

En d'autres termes on a une application, évidemment bilinéaire, de $H^p(A) \times H_p(A)$ dans G .

Mais on n'a pas, en général $H^p(A , G) = \mathrm{Hom}(H_p(A) , G)$ car $\langle \overline{a} , \overline{f} \rangle$ peut être nul pour tout $\overline{a} \in H_p(A)$ sans que $\overline{f}$ soit nul.

La formule ci-dessus est cependant exacte dans les 2 cas suivants :

a) A et G sont des K-modules ou K est un corps

b) A et G sont des Z-modules et $H(A)$ est sans torsion.

Donnons nous 3 groupes différentiels gradués A , B , C tels que la suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ soit exacte, et supposons de plus que A soit facteur direct de B . La suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C^p , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B^p , G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p , G) \longrightarrow 0$$

est alors exacte pour tout p .

Le théorème 5-1 s'applique et donne :

THÉORÈME 6-1.- Dans les conditions ci-dessus on a la suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(C , G) \xrightarrow{j^*} H^0(B , G) \xrightarrow{i^*} H^0(A , G) \xrightarrow{\delta^*} H^1(C , G) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^p(C , G) \longrightarrow H^p(B , G) \longrightarrow H^p(A , G) \xrightarrow{\delta^*} H^p(C , G) \longrightarrow \cdots$$

7.- Homomorphismes.

Soit h un homomorphisme $G \longrightarrow G'$, on en déduit un homomorphisme noté encore $h : \mathrm{Hom}(A_p, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_p, G')$ par $\langle a, hf \rangle = h \langle a, f \rangle$ $a \in A_p$ $f \in \mathrm{Hom}(A_p, G)$. Notons encore d l'opérateur différentiel défini sur $\sum \mathrm{Hom}(A_p, G')$ dans (II-6). On a : $hd = dh$ en effet

$$\langle a, dhf \rangle = \langle \partial a, hf \rangle = h \langle \partial a, f \rangle$$

$$\langle a, hdf \rangle = h \langle a, df \rangle = h \langle \partial a, f \rangle$$

le raisonnement fait dans (I-4) s'applique :

h induit canoniquement un homomorphisme noté h^* de $H^p(A, G)$ dans $H^p(A, G')$.

Si A est libre et si la suite $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ est exacte, la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p, G') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^p, G'') \longrightarrow 0$ est aussi exacte. Le raisonnement qui nous a servi à démontrer le théorème 5-I s'applique sans changement, et l'on a

THÉORÈME 7-1.- Si la suite $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \longrightarrow 0$ est exacte, la suite

$$0 \longrightarrow H^0(A, G') \xrightarrow{i^*} H^0(A, G) \xrightarrow{j^*} H^0(A, G'') \xrightarrow{\theta} H^1(A, G') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(A, G'') \xrightarrow{\theta} H^q(A, G') \xrightarrow{i^*} H^q(A, G) \xrightarrow{j^*} H^q(A, G'') \longrightarrow \cdots$$

est aussi exacte.

III.- LE COMPLEXE SIMPLICIAL

8.- Définitions.

On appelle n-simplexe un ensemble de $n+1$ éléments appelés sommets (ou 0-simplexe) ; une q-face d'un n-simplexe est un sous-ensemble de $(q+1)$ éléments du n-simplexe, c'est donc aussi un q-simplexe. Un complexe simplicial K, est un ensemble de simplexes, qui avec tout simplexe contient l'ensemble de ses faces.

Une q-chaine élémentaire est une suite ordonnée de $q+1$ sommets de K pris dans un même simplexe de K, ou si l'on veut une fonction qui à tout entier $i = 0, 1, \ldots, q$, fait correspondre un sommet $a_i \in K$ tel que tous les a_i appartiennent à un même simplexe de K.

<u>Le groupe des q-chaines</u> est le groupe abélien libre engendré par les q-chaines élémentaires. Il sera désigné par $C_q(K)$. $(q \geqslant 0)$; $(C_q = 0$ si $q < 0)$.

Soit $a_0 \dots a_q$ une q-chaine élémentaire, on pose

$$\partial(a_0 \dots a_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_q$$

(le signe $\hat{}$ signifie que l'on a supprimé la lettre au dessus de laquelle il a été placé).

Les q-chaînes élémentaires engendrant $C_q(K)$, on peut prolonger ∂ par linéarisation à un homomorphisme noté encore $\partial : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$. On vérifie immédiatement que $\partial\partial = 0$. Le groupe libre (ou Z-module) $\sum_{q=0}^{\infty} C_q(K)$ est donc un groupe différentiel gradué. On peut donc définir ses groupes d'homologie et de cohomologie, que nous noterons $H_q(K)$, $H^q(K , G)$.

9.- <u>Le cup-produit.</u>

Nous supposerons maintenant que G est un anneau. On peut alors définir sur $\sum \mathrm{Hom}(C_q(K) , G)$ un produit.

En effet, si $f \in C^n(K , G)$ $g \in C^p(K , G)$, (où $C^q(K , G) = \mathrm{Hom}(C_p(K) , (G))$ on pose pour tout $(n+p)$-simplexe $a_0 \dots a_{n+p}$:

$$\langle a_0 \dots a_{n+p} , f.g \rangle = \langle a_0 \dots a_n , f \rangle \quad \langle a_n \dots a_{n+1} , g \rangle$$

la $(n+1)$-cochaine $f.g$ ainsi définie est le cup-produit de f et de g .

On a $d(f.g) = df.g + (-1)^n f.dg$ en effet :

$$\langle a_0 \dots a_{n+p+1} , d(f.g) \rangle = \langle d(a_0 \dots a_{n+p+1}) , f.g \rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_n \, a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , f.g \rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{n+i} \langle a_0 \dots a_n \, a_{n+1} \dots \hat{a}_{n+i} \dots a_{n+p+1} , f.g \rangle =$$

$$= \langle (\partial a_0 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , f.g \rangle + (-1)^n \langle a_0 \dots a_n (\partial a_{n+1} \dots a_{n+p+1}) f.g \rangle$$

$$= \langle (\partial a_0 \dots a_n) a_{n+1} , f \rangle \langle a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , g \rangle +$$

$$+ (-1)^n \langle a_0 \dots a_n , f \rangle \langle a_n (\partial a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , g \rangle$$

$= \langle (\partial a_0 \dots a_{n+1}) , f \rangle \langle a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , g \rangle +$

$+ (-1)^n \langle a_0 \dots a_n , f \rangle \langle \partial(a_n \dots a_{n+p+1} , g) \rangle =$

$= \langle a_0 \dots a_{n+1} , df \rangle \langle a_{n+1} \dots a_{n+p+1} , g \rangle +$

$+ (-1)^n \langle a_0 \dots a_n , f \rangle \langle a_n \dots a_{n+p+1} , dg \rangle =$

$= \langle a_0 \dots a_{n+p+1} , df.g + (-1)^n f.dg \rangle$

(dans le calcul précédent on a, pour simplifier l'écriture, "mis en facteur" certains éléments de chaines élémentaires. Par exemple $(\partial a_0 \dots a_n)a_{n+1}$ signifie $\sum_{i=0}^{n} (-1)^n a_0 \dots \acute{a}_i \dots a_n a_{n+1}$ et $a_n \partial(a_{n+1} \dots a_{n+p+1})$ signifie $\sum_{i=1}^{p+i} (-1)^{-i} a_n a_{n+1} \dots \acute{a}_{n+i} \dots a_{n+p+1}$ ..)

La proposition 3-1 permet alors de munir $H(K , G)$ d'une structure multiplicative compatible avec les graduations. Cette multiplication est le cup-produit.

$\sum \mathrm{Hom}(C_q(K) , G)$ n'est pas anticommutative pour le cup-produit comme on le remarque sans peine. Cependant on a le théorème :

<u>THÉORÈME 9-1</u>.- $H(K , G)$ <u>est une algèbre anticommutative</u>

c'est-à-dire que $\overline{f}.\overline{g} = (-1)^{np} \overline{g}.\overline{f}$ si $\overline{f} \in H^n(K , G)$, $\overline{g} \in H^p(K , G)$

La démonstration se fera en quatre parties.

a) A toute n-chaîne élémentaire $s = a_0 \dots a_n$ faisons correspondre la n-chaîne élémentaire $\rho(s) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_n \dots a_0$.

ρ définit par linéarisation un homomorphisme $C_n(K) \longrightarrow C_n(K)$ pour tous les degrés n , et par passage aux Hom un homomorphisme noté encore ρ de $C^n(K , G)$ dans $C^n(K , G)$.

On a évidemment $\partial \rho = \rho \partial$ et par conséquent $\rho d = d \rho$.

b) Soient $f \in C^n(K , G)$ et $g \in C^p(K , G)$; calculons $\rho(f.g)$

$\langle a_0 \dots a_{n+p} , \rho(f.g) \rangle = \langle \rho(a_0 \dots a_{n+p}) , f.g \rangle =$

$= (-1)^{\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}} \langle a_{n+p} \dots a_0 , f.g \rangle =$

$$= (-1)^{\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}} \langle a_{n+p} \dots a_p , f \rangle \langle a_p \dots a_0 , g \rangle =$$

$$= (-1)^{\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \langle \rho(a_p \dots a_{n+p}), f \rangle \langle \rho(a_0 \dots a_p), g \rangle =$$

$$= (-1)^{np} \langle a_p \dots a_{n+p} , \rho(f) \rangle \langle a_0 \dots a_p \ \rho(g) \rangle =$$

$$= (-1)^{np} \langle a_0 \dots a_{n+p} , \rho(g) \ \rho(f) \rangle$$

par conséquent $\rho(f.g) = (-1)^{np} \rho(g) . \rho(f)$

c) ρ induit un <u>isomorphisme</u> de $H_n(K)$ sur $H_n(K)$ et de $H^n(K)$ sur $H^n(K)$. Pour le démontrer nous allons construire un opérateur $\tau : C_q(K) \to C_{p+1}(K)$ tel que

$$(1) \qquad \partial \tau + \tau \partial = I - \rho \qquad (I \text{ est l'opérateur identique})$$

τ est appelé un opérateur d'homotopie. On définit τ par récurrence sur q. Sur $C_0(K)$ on pose $\tau = 0$. Supposons connu τ sur $C_k(K)$ pour $k \leqslant q-1$, l'identité (1) étant vérifiée, et posons

$$\tau(a_0 \dots a_q) = a_0[a_0 \dots a_q - \rho(a_0 \dots a_q) - \tau(\partial a_0 \dots a_q)]$$

un calcul facile montre que :

$$\partial(\tau(a_0 \dots a_q)) = a_0 \dots a_q - \rho(a_0 \dots a_q) - \tau(\partial a_0 \dots a_q) -$$
$$- a_0[\partial(a_0 \dots a_q) - \partial \rho(a_0 \dots a_q) - \partial \tau(\partial a_0 \dots a_q)]$$

(1) étant vérifié pour la (q-1) choisie $\partial a_0 \dots a_q$ on a

$$\partial \tau(\partial a_0 \dots a_q) + \tau \partial(\partial a_0 \dots a_q) = \partial a_0 \dots a_q - \rho \partial a_0 \dots a_q$$

et comme $\partial \rho = \rho \partial$ $\partial\partial = 0$, le crochet est nul. Il reste

$$(\partial \tau + \tau \partial)(a_0 \dots a_q) = I(a_0 \dots a_q) - \rho(a_0 \dots a_q)$$

d'où en transposant (1), et désignant encore par τ l'opération transposée, on a $\tau d + d\tau = I - \rho$. Si f est un cocycle on a donc $- d \rho f + df = - d \rho f = d \tau df + d^2 \tau f = 0$: $\rho(f)$ est donc aussi un cocycle ; de plus $f - \rho f = \tau df + d \tau f = d \tau f$: f et $\rho(f)$ ne diffèrent que d'un cobord et appartiennent par conséquent à la même classe de cohomologie.

<u>b</u> montre alors que $f.g$ et $(-1)^{np} g.f$ appartiennent à la même classe de cohomologie. C.Q.F.D.