M. Zisman

Variétés différentiables

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A7_0>

-:-:-:-

Exposé n° 7

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIES DES NOMBRES)

Année 1956/57

-:-:-:-

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

(Exposé de M. ZISMAN, le 14.1.1957)

I.- DÉFINITION DES VARIÉTÉS

Une application d'un voisinage de R^n dans un voisinage de R^m $x'_1 = x'_1(x_1 , \dots , x_n)$, ... $x'_m = x'_m(x_1 , \dots , x_n)$ est dite de classe C^p (resp. C^∞ , resp. analytique réelle) si les fonctions $x'_1 , \dots , x'_m$ ont des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p (resp. de tout ordre, resp. sont analytiques réelles).

1.- DÉFINITION.- Une variété différentiable de classe C^p (resp. C^∞, resp. analytique réelle) est un espace topologique connexe V tel que

a) Il existe un recouvrement de V par des ouverts U_i tels que chaque U_i soit homéomorphe à un ouvert d'un espace euclidien à n dimension R^n . (n est le même pour tous les U_i). Soit $f_i : U_i \longrightarrow f_i(U_i) \subset R^n$ cet homéomorphisme. Si $x \in U_i$, $f_i(x)$ est un point de R^n et a donc n coordonnées $x_1 , x_2 , \dots , x_n$. Ces n fonctions continues de x s'appelent les coordonnées locales de x dans le voisinage U_i .

b) Soient $x \in U_i \cap U_j$ et $x'_1 , x'_2 , \dots , x'_n$ les coordonnées locales de x dans le voisinage U_j . Alors

$$f_j \circ f_i^{-1} : (x_1 , \dots , x_n) \longrightarrow (x'_1 , \dots , x'_n)$$

est une application différentiable de classe C^p (resp. C^∞ resp. analytique réelle) à jacobien $\neq 0$.

c) L'ensemble des U_i est maximal pour les propriétés a) et b). L'entier n s'appelle la dimension de V (on écrit souvent V_n) . Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'au cas C^∞ et nous supprimerons l'expression "de classe C^∞" dans les énoncés.

2.- L'ensemble des fonctions différentiables en un point.

Soit $x_0 \in V$ et U un voisinage de x_0 . Une fonction f définie sur U , à valeurs réelles, est appelée différentiable en x_0 si quelque soit $x \in U \cap U_i$

(quand $x_0 \in U_i$)

$$f(x) = f \circ f_i^{-1}\ (x_1(x)\ ,\ \dots\ ,\ x_n(x))$$

est une fonction différentiable en $x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n$.

L'axiome b) nous montre immédiatement que cette notion est indépendante du système de coordonnées choisies en x_0 si $x_0 \in U_i \cap U_j$, et que si une fonction est différentiable en x_0 , elle est différentiable dans tout un voisinage de x_0 (dépendant de la fonction). On écrit $f(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ au lieu de $f \circ f^{-1}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$. Nous désignerons l'ensemble des fonctions différentiables en x_0 par $\Omega(x_0)$. Cet ensemble possède les propriétés suivantes :

a) Les fonctions $x_1(x)\ ,\ \dots\ ,\ x_n(x)$ définies dans U_i sont différentiables en tout point de U_i .

b) Si F est une fonction différentiable $F(u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_p)$ définie dans un voisinage de R^p , et si $f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_p \in \Omega(x_0)$ alors $F(f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_p) \in \Omega(x_0)$.

<u>PROPOSITION 2.1.- Soient</u> $\{x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n\}$ <u>un système de coordonnées dans un voisinage du point</u> x_0 <u>et</u> $f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_m \in \Omega(x_0)$. <u>Les conditions nécessaires et suffisantes pour que toute fonction de</u> $\Omega(x_0)$ <u>s'exprime comme une fonction différentiable de</u> $f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_m$ <u>sont</u>

1°) $m = n$

2°) si $f_i = f_i(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ on a $\left(\dfrac{D(f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_n)}{D(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)}\right)_{x_0} \neq 0$

(démonstration immédiate).

Quand les conditions de la proposition sont vérifiées, le théorème des fonctions implicites montre que $f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_n$ forment un système de coordonnées x_0 dans un certain voisinage ouvert de ce point.

3.- <u>Applications différentiables.</u>

Soient V et W deux variétés différentiables et $f : U \longrightarrow W$ une application d'un voisinage U de x_0 dans W . On dit que f est différentiable en x_0 si, quel que soit $g \in \Omega(f(x_0))$ $g \circ f \in \Omega(x_0)$. Autrement dit, si $\{x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n\}$ est système de coordonnées autour de x_0 , et $\{y_1\ ,\ \dots\ ,\ y_p\}$ un système de coordonnées autour de $f(x_0)$ la fonction f peut s'exprimer par $y_1 = f_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)\ ,\ \dots\ ,\ y_p = f_p(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$, les p fonctions $f_1\ ,\ \dots\ ,\ f_p \in \Omega(x_0)$. Si f est un homéomorphisme $V \longrightarrow W$ et si f et f^{-1} sont différentiables on dit que f est un isomorphisme. (il faut remarquer que même dans le cas où f est un homéomorphisme, f différentiable n'entraîne pas toujours f^{-1} différentiable).

II.- ESPACE TANGENT EN UN POINT D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

4.- Vecteur tangent en un point.

On appelle vecteur tangent en $x_0 \in V_n$ une application $X : \mathcal{D}(x_0) \longrightarrow R$ ayant les 2 propriétés suivantes

a) X est linéaire c'est-à-dire $X(af + bg) = aX(f) + b\,X(g)$ $(a\,,\, b \in R)$ $(f\,,\, g \in \mathcal{D}(x_0))$.

b) X est une différentiation : $X(f\,g) = X(f)\,.\,g(x_0) + f(x_0)\,.X(g)\,(f\,,g\in\mathcal{D}(x_0))$.

Soient X et X' 2 vecteurs tangents en x_0 et $\lambda, \lambda' \in R$. L'application $f \longrightarrow \lambda X(f) + \lambda' X'(f)$ $(f \in \mathcal{D}(x_0))$ est un vecteur tangent ; l'ensemble des vecteurs tangents en x_0 est donc un espace vectoriel que nous désignerons par Tx_0 .

Soit $\{x_1\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ un système de coordonnées en x_0 . Alors $f \in \mathcal{D}(x_0)$ s'écrit $f(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)$. Pour simplifier nous désignerons par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ la valeur de la dérivée partielle de f par rapport à la i-ième variable prise au point $x_1(x_0)\,,\,\dots\,,\,x_n(x_0)$. On voit immédiatement que l'application $f \longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\lambda_i$ est un vecteur tangent en x_0 $(\lambda_i \in R)$.

Nous allons montrer que réciproquement si X est un vecteur tangent quelconque et $f \in \mathcal{D}(x_0)$ alors $X(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,X(x_i)$.

DÉMONSTRATION.- Il est évident que $X(f) = 0$ si f est une fonction constante. Soit $f \in \mathcal{D}(x_0)$. Dans le voisinage U_i de coordonnées $\{x_1\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ on peut écrire

$$f = a_0 + a_1(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) + \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i^0)\,(x_j - x_j^0)\,g_{ij}$$

$$(a_i \in R\;,\; g_{ij} \in \mathcal{D}(x_0)\quad,\quad x_i^0 = x_i(x_0))$$

appliquons X :

$$X(f) = a_1X(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n\,X(x_n - x_n^0) + X\Big(\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i^0)\,(x_j - x_j^0)\,g_{ij}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i X(x_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \big[(x_j(x_0) - x_j^0)g_{ij}(x_0)\,X(x_i) + (x_i(x_0) - x_i^0)\,g_{ij}(x_0)X(x_j) +$$

$$+ (x_i(x_0) - x_i^0)\,(x_j(x_0) - x_j^0)\,X(g_{ij})\big]$$

le crochet est évidemment nul, d'où le résultat annoncé puisque $a_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

5.- Posons $X_i(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$. Nous obtenons n vecteurs tangents $X_1 , \ldots , X_n$ pour lesquels $X_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants car $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = 0$ entraîne $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i)(x_j) = 0$ pour tout j c'est-à-dire $\lambda_j = 0$. Si X est un vecteur quelconque de T_{x_0} nous avons

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i(f)\, X(x_i) \qquad \text{donc}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\, X_i$$

nous avons donc démontré :

PROPOSITION 5.1.- T_{x_0} est un espace vectoriel à n dimensions.

6.- Application linéaire tangente.

Soient V et W deux variétés différentiables et $\Phi : V \longrightarrow W$ une application différentiable en $x_0 \in V$, $X \in T_{x_0}$ et $y_0 = \Phi(x_0)$ à toute fonction $g \in \Omega(y_0)$ faisons correspondre le nombre réel

$$Y(g) = X(g \circ \Phi)$$

Y est une application $\Omega(y_0) \longrightarrow R$ qui est un vecteur de T_{y_0} . L'application $T_{x_0} \longrightarrow T_{y_0}$ ainsi définie est évidemment linéaire, on l'appelle l'application linéaire tangente induite par Φ , ou différentielle de Φ . On la note $d\Phi$ ou $(d\Phi)_{x_0}$ ou Φ'_{x_0} . Si Ω est une troisième variété différentiable et si $\Psi : W \longrightarrow \Omega$ est différentiable en y_0 , on a

$$d(\Psi \circ \Phi)_{x_0} = (d\Psi)_{y_0} \circ (d\Phi)_{x_0}$$

7.- Champ de vecteurs tangents.

Un champ de vecteurs tangents X sur une variété différentiable V est une application qui fait correspondre à tout point x de V un vecteur tangent en ce point à V , X_x .

Soit f une fonction différentiable définie dans un voisinage U de V ; alors $X_x(f)$ est une fonction définie dans U que nous noterons simplement X(f) . Si cette fonction est encore différentiable quelle que soit f différentiable, nous dirons que le champ X est différentiable.

Existence de champs différentiables.

Soit U un voisinage de V dans lequel est défini un système de coordonnées $\{x_1 , \dots , x_n\}$, et f une fonction différentiable sur U , qui s'écrit donc $f(x_1 , \dots , x_n)$. Posons $X_{i,x}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x$. $X_{i,x}$ est un vecteur tangent en x et l'application $x \longrightarrow X_{i,x}$ est un champ différentiable de vecteurs définis sur U . Les n champs $X_{i,x}$ sont linéairement indépendants et tout champ différentiable peut s'écrire

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, X_{i,x}$$

où $a_i(x)$ est C^∞ dans U puisque $a_i(x) = X_x(x_i)$.

Réciproquement $\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, X_{i,x}$ définit un champ différentiable sur U . Au lieu de X_i on écrit parfois $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pour rappeler que $X_{i,x}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x$.

Si X et Y sont 2 champs différentiables définis sur une variété V l'opération $XY - YX$ est appelée crochet de X et de Y et se note $[X , Y]$.

PROPOSITION 7.1.- <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux champs différentiables de vecteurs tangents,</u> $[X , Y]$ <u>est un champ différentiable de vecteurs tangents.</u>

En effet si $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$

$$[X , Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) X_j$$

On vérifie que le crochet a les propriétés suivantes :

$[a_1 X_1 + a_2 X_2 , Y] = a_1 [X_1 , Y] + a_2 [X_2 , Y] \quad (a_1 , a_2 \quad R)$

$[X , X] = 0 \quad [X , Y] = - [Y , X]$

$[X , [Y , Z]] + [[Y , Z] , X] + [[Z , X] , Y] = 0$ (identité de Jacobi).

PROPOSITION 7.2.- <u>Soient</u> $\Phi : V \longrightarrow W$ <u>une application différentiable,</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>des champs de vecteurs tangents différentiables de</u> U <u>alors</u>

$$(d\,\Phi)\,[X_1 , X_2] = [(d\,\Phi)X_1 , (d\,\Phi)\,X_2] .$$

Soit r_0 un point quelconque de V et $g \in \mathcal{D}(\Phi(x_0))$. Posons

$$Y_{i,\Phi(x)} = (d\,\Phi_x)\, X_{i,x} \qquad (i = 1 , 2) .$$

Alors par définition : $(X_i(g \circ \Phi))_x = (Y_i(g))_{\Phi(x)}$, c'est-à-dire

$(X_i(g \circ \Phi))_x = (Y_i(g) \circ \Phi)_x$, expression qui est valable pour tout point x d'un voisinage convenable de x_0 dans V .

Donc
$$(Y_1\, Y_2(g))_{\Phi(x)} = X_1(Y_2(g) \circ \Phi)_x = (X_1\, X_2(g \circ \Phi))_x$$
$$(Y_2\, Y_1(g))_{\Phi(x)} = (X_2\, X_1(g \circ \Phi))_x \ ,$$

et par conséquent
$$([Y_1\, ,\, Y_2](g))_{\Phi(x)} = ([X_1\, ,\, X_2](g \circ \Phi))_x \quad \text{c'est-à-dire}$$
$$[Y_1\, ,\, Y_2]_{\Phi(x_0)} = (d\,\Phi)_{x_0}\, [X_1\, ,\, X_2]_{x_0}$$

III.- FORMES DIFFÉRENTIELLES

8.- Différentielle d'une fonction.

Une fonction différentielle $f \in \Omega(x_0)$ peut être considérée comme une application différentiable en x_0 de V dans la variété R des nombres réels définie par une seule coordonnée y . L'application linéaire tangente df est une application linéaire de T_{x_0} dans T_{y_0} $(y_0 = f(x_0))$. Mais T_{y_0} est un espace vectoriel à 1 dimension sur R , engendré par le vecteur Y_0 défini par $Y_0(y) = 1$. On peut donc identifier T_{y_0} à R en identifiant Y_0 avec le nombre 1 . df devient alors une fonction linéaire définie sur T_{x_0} à valeurs réelles, telle que

$$df(X) = X(f) \qquad (X \in T_{x_0}).$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions appartenant à $\Omega(x_0)$, nous avons $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,(X) = \lambda_1 df_1(X) + \lambda_2 df_2(X)$. L'espace des différentielles df, pour $f \in \Omega(x_0)$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace dual de T_{x_0} . Mais si $\{x_1\, ,\, \dots\, ,\, x_n\}$ forment un système de coordonnées en x_0 , les différentielles $dx_1\, ,\, \dots\, ,\, dx_n$ sont linéairement indépendantes ; par conséquent:

PROPOSITION 8.1.- *L'espace des différentielles en un point x_0 de V est l'espace dual de T_{x_0} .*

9.- Algèbre des formes différentielles extérieures.

DÉFINITION 9.1.- *L'algèbre extérieure construite sur l'espace vectoriel des différentielles en un point x_0 d'une variété V s'appelle l'algèbre différentielle en x_0 à la variété V .* Nous la désignerons par E_{x_0} .

DÉFINITION 9.2.- <u>Une application qui à tout point x d'un sous-ensemble A de U fait correspondre un élément homogène de degré p de E_x s'appelle une forme différentielle extérieure de degré p, définie sur A. Une forme différentielle de degré 1 s'appelle une forme de Pfaff.</u>

Une forme différentielle de degré 0 est une fonction à valeur réelle. Nous savons donc ce que signifie une forme différentiable de degré 0. Par analogie, nous allons étendre cette notion à une forme de degré quelconque.

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées dans un voisinage de x_0. Si x est un point de ce voisinage, $(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x$ forment une base pour les éléments de degré 1 de E_x. Une forme différentielle θ de degré p définie dans ce voisinage peut donc s'écrire au point x :

$$\theta_x = \sum u_{i_1 i_2 \dots i_p}(x)\,(dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_x \tag{1}$$

la sommation étant étendue au $\binom{n}{p}$ combinaisons de $\{i_1, \dots, i_p\}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.

<u>Par définition,</u> θ <u>est différentiable en</u> x_0 <u>si les</u> $\binom{n}{p}$ <u>fonctions</u> $u_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{O}(x_0)$.

Pour justifier cette définition, il faut démontrer que cette notion est indépendante du système de coordonnées choisies en x_0 :

Soient $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ un autre système de coordonnées en x_0. Alors dans un voisinage de x_0 nous avons

$$x_1 = f_1(x'_1, \dots, x'_n), \dots, x_n = f_n(x'_1, \dots, x'_n) \qquad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(x_0).$$

Si x est assez près de x_0, nous avons

$$(dx_i)_x = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right)_x (dx'_j)_x ,$$

où $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right)_x$ est la valeur de $\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}$ pour $x'_i = x'_i(x)$. $i = 1, 2, \dots, n$

puisque $X(f_i(x'_1, \dots, x'_n))_x = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right)_x X(x'_j)_x$ pour tout $X \in T_x$.

Par conséquent, d'après (1)

$$\theta_x = \sum u_{i_1 \dots i_p}(x) \frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p})}{D(x'_{j_1}, x'_{j_2}, \dots, x'_{j_p})} (dx'_{j_1})_x \wedge \dots \wedge (dx'_{j_p})_x$$

la sommation étant effectuée sur tous les systèmes

$(i_1, \dots, i_p ; j_1, \dots, j_p)$ tels que $i_1 < \dots < i_p$; $j_1 < \dots < j_p$

posons $u'_{j_1 \dots j_p}(x) = \sum_{i_1, \dots, i_p} u_{i_1 \dots i_p}(x) \dfrac{D(f_{i_1}, \dots, f_{i_p})}{D(x'_{j_1}, \dots, x'_{j_p})}$

et nous avons

$$\theta_x = \sum_{j_1, \dots, j_p} u'_{j_1 \dots j_p}(x) (dx'_{j_1})_x \wedge \dots \wedge (dx'_{j_p})_x$$

si $u_{i_1 \dots i_p} \in \Omega(x_0)$ il en est de même de $u'_{j_1 \dots j_p}$ ce qui justifie la définition.

10.- Différentiation extérieure.

Soit θ une forme différentielle, différentiable en x_0, de degré p. Si $p = 0$ $\theta \in \Omega(x_0)$ et $(d\theta)_x$ a déjà été défini.

Dans le cas général, on définit la différentielle de θ donnée par l'expression (1) par :

(2) $$(d\theta)_x = \sum (d\, u_{i_1 \dots i_p})_x \wedge (dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_x$$

là encore, il faut montrer que cette définition est indépendante du système de coordonnées choisies. Cependant, la vérification directe étant trop longue, nous établirons d'abord quelques propriétés formelles de l'opérateur d défini ci-dessus pour un système particulier de coordonnées.

(3) $$(d(a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2))_x = a_1(d\theta_1)_x + a_2(d\theta_2)_x \qquad (a_1, a_2 \in R)$$

(4) d est une antidérivation c'est-à-dire

$$(d(\theta \wedge \eta))_x = (d\theta)_x \wedge \eta_x + (-1)^p \theta_x \wedge (d\eta)_x$$

(θ, η différentiables, p = degré de θ)

(5) $d^2\theta = 0$ pour toute forme θ différentiable.

démonstration de (4) et (5) ((3) est immédiat)

Si θ et η sont différentiables en x_0, on voit facilement que $\theta \wedge \eta$ est aussi différentiable en x_0. D'après (3) il suffit de démontrer (4) quand

$$\theta_x = u(x)\ (dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_x$$

$$\eta_x = v(x)\ (dx_{j_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{j_r})_x$$

$(i_1 < \dots < i_p\ ;\ j_1 < \dots < j_r\ ;\ u(x)\ ,\ v(x) \in \mathcal{E}(x_0))$.

Si les ensembles $\{i_1, \dots, i_p\}$ et $\{j_1, \dots, j_r\}$ ont un élément en commun, $\theta \wedge \eta = 0$ $d\theta \wedge \eta = 0$ $\theta \wedge d\eta = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc ces 2 ensembles disjoints, et soit $\{k_1, k_2, \dots, k_{p+r}\}$ la réunion des i et j réordonnés de façon croissante. Nous avons

$$(\theta \wedge \eta)_x = \varepsilon\, u(x)\ v(x)\ (dx_{k_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{k_{p+r}})_x$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que la permutation

$$\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p & j_1, \dots, j_r \\ k_1, & \dots \quad k_{p+r} \end{pmatrix}$$

est paire ou impaire. Donc

$$(d(\theta \wedge \eta))_{x_0} = \varepsilon((du)_{x_0}\ v(x_0) + u(x_0)(dv)_{x_0})\ (dx_{k_1})_{x_0} \wedge \dots \wedge (dx_{k_{p+r}})_{x_0} =$$

$$= (d\theta)_{x_0} \wedge \eta_{x_0} + u(x_0)(dv)_{x_0}\ (dx_{i_1})_{x_0} \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_{x_0} \wedge (dx_{j_1})_{x_0} \wedge \dots \wedge (dx_{j_2})_{x_0} =$$

$$= (d\theta)_{x_0} \wedge \eta_{x_0} + (-1)^p\ \theta_{x_0} \wedge (d\eta)_{x_0}$$

puisque $(dv)_{x_0} \wedge (dx_i)_{x_0} = -(dx_i)_{x_0} \wedge (dv)_{x_0}$

démonstration analogue si p ou $r = 0$.

En particulier, si $\omega_1, \dots, \omega_r$ sont des formes de Pfaff différentiables en x_0 nous avons

(4') $$(d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r)_{x_0} = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} (\omega_1)_{x_0} \wedge \dots \wedge (\omega_{i-1})_{x_0} \wedge (d\omega_i)_{x_0} \wedge \dots \wedge (\omega_r)_{x_0}$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}(x_0)$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

$$(df)_x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x (dx_i)_x$$

puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est C^∞ en x_0 , df est différentiable en x_0 et nous avons

$$(d(df))_{x_0} = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{x_0} (dx_i)_{x_0} \wedge (dx_j)_{x_0}$$

mais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$ donc $d^2 f = 0$.

Si $f_1 , \ldots , f_r \in \Omega(x_0)$ la formule (4') nous montre que

(5') $$d(df_1 \wedge \ldots \wedge df_r) = 0 .$$

Si maintenant θ_x est donnée par (1) et $(d\theta_x)$ par (2) , (3) et (5') montrent que $d(d\,\theta) = 0$. C.Q.F.D.

Montrons maintenant que l'opération d est définie indépendamment du système de coordonnées choisies.

Nous avons $\theta_x = \sum u_{i_1 \ldots i_p}(x)\,(d\,x_{i_1})_x \wedge \ldots \wedge (d\,x_{i_p})_x$ dans le système de coordonnées $\{x_1 , \ldots , x_n\}$. Soient $\{x'_1 , \ldots , x'_n\}$ un autre système de coordonnées dans le voisinage de x_0 , et d' l'opération de différentiation définie dans ce nouveau système ; d' possède aussi les propriétés (3) (4) (5) par conséquent

$$\begin{aligned}(d'\theta)_{x_0} &= \sum (d'(u_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}))_{x_0} = \\ &= \sum (d'\, u_{i_1 \ldots i_p})_{x_0} \wedge (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p})_{x_0} + \\ &+ \sum u_{i_1 \ldots i_p}(x_0)\,(d'(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}))_{x_0}\end{aligned}$$

mais par définition $d'f = df$ pour toute fonction f donc le deuxième $\sum$ s'annule d'après (5') , et $d'u_{i_1 \ldots i_p} = du_{i_1 \ldots i_p}$. On a donc

$$(d'\theta)_{x_0} = \sum (du_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1 \ldots i_p})_{x_0} = (d\,\theta)_{x_0} .$$

11.- Application induite sur E_{x_0} par une application différentiable $\Phi : V \longrightarrow W$

Soient $x_0 \in V$ $\Phi(x_0) = y_0 \in W$ Φ'_{x_0} l'application linéaire tangente $T_{x_0} \longrightarrow T_{y_0}$, E_{x_0} , E_{y_0} les algèbres extérieures en x_0 et y_0 Φ'_{x_0} induit une application duale $\Phi^*_{x_0}$ de E_{y_0} dans E_{x_0} de la manière suivante :

Soit $\theta \in E_{y_0}$, de degré p . C'est par définition une forme p-linéaire alternée sur T_{y_0} . Posons, pour tout système de p vecteurs

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_p \quad \text{de} \quad T_{x_0}$$

$$(\Phi^*_{x_0}\,\theta)(X_1 , \ldots , X_p) = \theta(\Phi'_{x_0} X_1 , \ldots , \Phi'_{x_0} X_p) .$$

$\Phi^*_{x_0}\theta$ est une forme p-linéaire alternée sur T_{x_0} donc un élément de degré p de E_{x_0}. On vérifie immédiatement que l'application $\Phi^*_{x_0} : E_{y_0} \longrightarrow E_{x_0}$ est linéaire, et qu'elle est un homomorphisme d'anneaux :

$$\Phi^*_{x_0}(\theta \wedge \eta) = \Phi^*_{x_0}\theta \wedge \Phi^*_{x_0}\eta .$$

<u>On montre enfin que</u> d <u>permute avec</u> Φ^* :

Si θ est une forme différentielle différentiable en y_0 l'application $x \longrightarrow \Phi^*_x\theta$ définit une forme différentielle différentiable en x_0 que nous désignerons par $\Phi^*\theta$ et l'on a

$$d(\Phi^*\theta) = \Phi^*(d\theta) .$$
