

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

M. ZISMAN

Classes de Chern

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 23,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A21_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSES DE CHERN

(Exposé de M. ZISMAN, le 27.5.1957)

1.- Espaces fibrés universels et espaces classifiants.

Dans tout cet exposé, les fibrés envisagés sont associés à des éléments de $H^1(B, G_c)$, les éléments de $H^1(B, G_d)$ ou $H^1(B, G_\omega)$ étant considérés comme appartenant à $H^1(B, G_c)$ (Exposé 17).

DÉFINITION. - On dit qu'un espace fibré $p : E \longrightarrow B$, principal de groupe structural G compact, E compact connexe est universel pour G et pour n si $H^i(E, Z) = 0$ pour $0 < i \leq n$. B est alors appelé classifiant pour G et pour n .

On notera dans la suite un tel espace $E(G, n) \longrightarrow B(G, n)$ ou simplement $E_G \longrightarrow B_G$.

Cette terminologie est justifiée par les 2 propositions suivantes :

PROPOSITION 1.1. - Soient $p : E_G \longrightarrow B_G$ et $p' : E'_G \longrightarrow B'_G$ 2 espaces fibrés universels pour G et pour n alors $H^i(B_G, Z) \approx H^i(B'_G, Z)$ pour $i \leq n$.

PROPOSITION 1.2. - Soient $\rho : E \longrightarrow B$ un espace fibré principal de groupe G , et $p : E_G \longrightarrow B_G$ un espace fibré universel pour G et pour n . Il existe alors un homomorphisme (indépendant de l'espace universel choisi) :

$$\sigma^* : H^i(B_G, Z) \longrightarrow H^i(B, Z) \quad \text{pour } i \leq n .$$

La démonstration de ces deux propriétés est basée sur le théorème suivant :

PROPOSITION 1.3. - (Victoris-Begle) Soit $p : E \longrightarrow B$, un espace fibré, E connexe localement compact, à fibre F compacte connexe. Si $H^i(F, Z) = 0$ pour $0 < i \leq n$, $p^* : H^i(B, Z) \longrightarrow H^i(E, Z)$ est un isomorphisme sur pour $0 \leq i \leq n$.

DEMONSTRATION de 1.1 et 1.2 :

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 E_G & \xleftarrow{f} & E_G \times E'_G & \xrightarrow{f'} & E'_G \\
 p \downarrow & & \rho \downarrow & & p' \downarrow \\
 B_G & \xleftarrow{\bar{f}} & E_G \times_G E'_G & \xrightarrow{\bar{f}'} & B'_G
 \end{array}$$

f et f' sont les projections $(e, e') \longrightarrow e$, $(e, e') \longrightarrow e'$ ($e \in E_G$, $e' \in E'_G$) toutes les flèches sont des fibrations ; \bar{f} et \bar{f}' ont été définies dans l'exposé 17, paragraphe 3.4.(b) (en faisant opérer G à gauche sur E'_G par $g.e' = e'g^{-1}$ $g \in G$ $e' \in E'$) ; ρ est l'application qui à $(e, e') \in E_G \times E'_G$ fait correspondre sa classe d'équivalence dans $E_G \times_G E'_G$ par la relation $(e, e') \sim (eg, e'g)$, et définit $E_G \times_G E'_G$ comme espace fibré principal sur $E_G \times_G E'_G$ de groupe G . Enfin le diagramme est commutatif comme on le voit sans peine.

D'après la proposition 1.3 \bar{f}^* et \bar{f}'^* sont des isomorphismes pour $0 \leq i \leq n$ donc

$$(\bar{f}^*)^{-1} \bar{f}'^* : H^i(B'_G, Z) \longrightarrow H^i(B_G, Z)$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$.

Pour démontrer 1.2 on considère de même le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc}
 E_G & \xleftarrow{g} & E_G \times E & \xrightarrow{f} & E \\
 p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho \\
 B_G & \xleftarrow{\bar{g}} & E_G \times_G E & \xrightarrow{\bar{f}} & B
 \end{array}$$

\bar{f}^* est un isomorphisme sur pour $0 \leq i \leq n$ et l'on pose $\sigma^* = (\bar{f}^*)^{-1} \bar{g}^*$. C'est un homomorphisme $H^i(B_G, Z) \longrightarrow H^i(B, Z)$ définit pour $0 \leq i \leq n$. On montre sans peine, que cet homomorphisme est indépendant de l'espace fibré universel choisi, et que c'est aussi un homomorphisme pour les structures d'algèbre de $H(B_G, Z)$ et $H(B, Z)$ définies par le cup-produit pour les degrés $\leq n$. L'image de σ^* est appelée l'algèbre caractéristique, σ^* l'homomorphisme caractéristique de la fibration $E \longrightarrow B$.

PROPOSITION 1.4.- Soient $\rho: E \longrightarrow B$ et $\rho': E' \longrightarrow B'$ 2 espaces fibrés principaux de groupe G , h un homomorphisme de E dans E' , σ^* et σ'^* les homomorphismes caractéristiques de ces fibrations. Alors

$$\sigma^* = \bar{h}^* \circ \sigma'^*$$

En effet, à l'aide de h , on établit un homomorphisme évident du diagramme (1) dans le diagramme correspondant pour E' . En n'écrivant que les deux lignes inférieures de ces diagrammes, on obtient un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & \bar{g} & \\
 & \swarrow & \\
 B_G & & E_G \times_G E \xrightarrow{\bar{f}} B \\
 & \searrow & \downarrow h \\
 & g' & E_G \times_G E' \xrightarrow{\bar{f}'} B' \\
 & & \downarrow \bar{h}
 \end{array}$$

d'où :

$$\sigma^* = (\bar{f}^*)^{-1} \circ \bar{g}^* = (\bar{f}^*)^{-1} \circ h^* \circ \bar{g}'^* = \bar{h}^* \circ (\bar{f}'^*)^{-1} \circ \bar{g}'^* = \bar{h}^* \circ \sigma'^* .$$

2.- La cohomologie des grassmanniennes $\mathcal{G}(q, N; \mathbb{C}) = U(q + N)/U(q) \times U(N)$.

On démontre que l'espace fibré principal de groupe $U(q)$ $U(q + N)/U(N) \longrightarrow U(q + N)/U(q) \times U(N)$ est universel pour $U(q)$ pour la dimension $2N$. Soient y_1, \dots, y_q q variables indépendantes, où l'on considère que y_i a le degré $2i$. On démontre alors que $H(\mathcal{G}(q, N; \mathbb{C}), Z) \approx Z(y_1, \dots, y_q)$ pour les dimensions $\leq 2N$, c'est-à-dire que $H^i(\mathcal{G}(q, N; \mathbb{C}), Z)$ est isomorphe au groupe additif des polynômes sur Z homogènes de degré i en les variables y_1, \dots, y_q pour $i \leq 2N$, et que la multiplication de deux éléments dont la somme des degrés est inférieure à $2N$ s'obtient en multipliant les 2 polynômes qui les représentent.

Si $\rho: E \longrightarrow B$ est un espace fibré principal de groupe $U(q)$, et si la dimension de B est finie (Cf. exposé 14 paragraphe 5), on considère une grassmannienne $\mathcal{G}(q, N; \mathbb{C})$ avec N assez grand et $\sigma^*(y_1), \dots, \sigma^*(y_q)$ sont des générateurs de l'algèbre caractéristique de l'espace fibré; σ^* représentant l'homomorphisme caractéristique défini au paragraphe 1.

Les classes de Chern d'un $U(q)$ -fibré de base B sont un système particulier de générateurs de l'algèbre caractéristique du fibré. Pour les définir, il suffit donc de définir des générateurs particuliers de $H(\mathcal{G}(q, N; \mathbb{C}), Z)$ et ensuite de les transformer par σ^* . On peut aussi les définir de façon axiomatique grâce à un procédé dû à F. Hirzebruch. C'est ce dernier mode d'exposition qui sera suivi ici.

3.- L'espace projectif complexe.

Soit $P_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe à n dimensions, de coordonnées homogènes z_0, \dots, z_n . C'est une variété analytique complexe, à $2n$ dimensions réelles. Son algèbre de cohomologie est engendrée par 1 générateur de degré

deux : $H(P_n(C), Z) \approx Z(y_1)/(y_1^{n+1})$ où y_1 est de degré 2. On va exhiber un générateur particulier, noté $g_n \in H^2(P_n(C), Z)$. Soit $P_{n-1}(C)$ la sous-variété de $P_n(C)$ obtenue en faisant $z_0 = 0$. $P_n(C)$ et $P_{n-1}(C)$ sont orientables (Cf. exposé 21 paragraphe 2). On démontre que si V_n est une variété orientable à n dimensions réelles,

$$H_n(V_n, Z) \approx Z.$$

Comme il n'y a pas de $n+1$ -chaines, tous les n cycles sont donc multiples de l'un d'entre eux, noté $[V_n]$, ainsi que sa classe d'homologie, ou bien de son opposé $-[V_n]$. "Orienter" V_n , c'est choisir l'un de ces 2 cycles comme base de l'homologie en dimension n . Si $W \subset V_n$ est une variété orientable, l'orientation de V_n induit une orientation de W .

Soit alors $[P_{n-1}(C)]$ le $(2n-2)$ -cycle, base de l'homologie de $P_{n-1}(C)$ muni de l'orientation induite par celle de $P_n(C)$.

Si $i : P_{n-1}(C) \longrightarrow P_n(C)$ est l'injection canonique de $P_{n-1}(C)$ dans $P_n(C)$, $i_*[P_{n-1}(C)]$ est une $(2n-2)$ -classe d'homologie de $P_n(C)$. g_n est alors l'élément de $H^2(P_n(C), Z)$ tel que pour toute $(2n-2)$ -classe de cohomologie γ on ait

$$\langle [P_n(C), \gamma \cdot g_n \rangle = \langle i_*[P_{n-1}(C)], \gamma \rangle \quad (\text{Cf. exposé } \epsilon)$$

g_n est parfaitement déterminé, et c'est un générateur de $H(P_n(C), Z)$.

L'application $i : P_{n-1}(C) \longrightarrow P_n(C)$ induit d'autre part

$$i^* : H^2(P_n(C), Z) \longrightarrow H^2(P_{n-1}(C), Z)$$

On montre alors que

$$i^* g_n = g_{n-1}$$

Remarquons enfin que $P_n(C) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$. $P_n(C)$ est donc un espace classifiant pour $U(1)$ et pour la dimension $2n$. L'espace fibré universel $U(n+1)/U(n) \longrightarrow U(n+1)/U(n) \times U(1)$ ou plus précisément sa classe dans $H^1(\mathcal{Q}(1, n; C), U(1)_c)$ sera noté η_n . Si U_i désigne l'ouvert de $P_n(C)$ défini par $z_i \neq 0$, un cocycle de η_n est donné par $g_{ij} = z_i/z_j$ dans $U_i \cap U_j$ (en fait g_{ij} définit un C^* -fibré. On obtient η_n en réduisant le groupe structural de C^* à $U(1)$).

i induit une application $i^* : H^1(\mathcal{Q}(1, n; C), U(1)_c) \longrightarrow H^1(\mathcal{Q}(1, n-1; C), U(1)_c)$ et $i^* \eta_n = \eta_{n-1}$.

4.- Les axiomes.

X désigne un espace topologique de dimension finie.

Axiome I.- Pour tout $U(q)$ -fibré de base X , soit ξ et tout entier $i \geq 0$, il existe une classe de Chern $c_i(\xi) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, $c_0(\xi) = 1$.

On pose $c(\xi) = \sum_i c_i(\xi)$ (il n'y a qu'un nombre fini de terme $\neq 0$ sous le \sum car X est de dimension finie). $c(\xi)$ est la classe de Chern totale.

Axiome II.- Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. f induit deux applications $f^*: H^1(Y, U(q)_c) \rightarrow H^1(X, U(q)_c)$
 $f^*: H(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H(X, \mathbb{Z})$.

Soit $\xi \in H^1(Y, U(q)_c)$ alors

$$f^*(c(\xi)) = c(f^*(\xi)).$$

Axiome III.- Si ξ_1, \dots, ξ_q sont des $U(1)$ -fibrés sur X ,

$$c(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q) = c(\xi_1) \dots c(\xi_q)$$

(\oplus est la somme de Whitney des fibrés ; dans le membre de droite la multiplication a lieu dans l'algèbre $H(X, \mathbb{Z})$).

Axiome IV.- $c(\eta_n) = 1 - g_n$ où η_n et g_n ont été défini au paragraphe 3. L'axiome IV est compatible avec l'axiome II car $c^* \eta_n = \eta_{n-1}$ et $i^* g_n = g_{n-1}$. Il reste à démontrer l'existence et l'unicité des classes de Chern.

5.- Unicité.

a) Soit $\xi \in H^1(X, U(1)_c)$; reprenons le diagramme (1)

$$\begin{array}{ccccc} E_G & \xleftarrow{g} & E_G \times E & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_G & \xleftarrow{\bar{g}} & E_G \times_G E & \xrightarrow{\bar{f}} & X \end{array}$$

où $E_G \rightarrow B_G$ est le fibré η_n , avec $n > \dim X$, et $E \rightarrow X$ un espace fibré principal de groupe $U(1)$ associé à ξ . Les flèches verticales définissent des espaces fibrés principaux de groupe $U(1)$, les flèches horizontales, des homomorphismes d'espaces fibrés principaux. On a donc

$$\bar{f}^*(\xi) = \bar{g}^*(\eta_n)$$

soit, d'après l'axiome II : $\bar{f}^* c(\xi) = \bar{g}^* c(\eta_n) = \bar{g}^*(1 - g_n)$ en utilisant l'axiome IV. f^* est un isomorphisme pour tous les degrés car $n > \dim X$, et par

conséquent $c(\xi) = (\bar{f}^*)^{-1} \bar{g}^* (1 - g_n) = \sigma^*(1 - g_n)$. L'unicité est donc prouvée pour les $U(1)$ -fibrés.

b) ξ désigne maintenant un $U(q)$ -fibré sur X . Soit E un espace fibré principal associé à ξ , de fibre $U(q)$, et $T = T^q$ le tore maximal de $U(q)$ formé par les matrices diagonales. Appliquons la proposition 5.2 de l'exposé 17 : on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/T \\ p \searrow & & \swarrow \rho \\ & X & \end{array}$$

le fibré $E/T \longrightarrow X$ est associé à ξ et l'on a

$$\rho^* \xi = h^* \check{\xi}$$

où $\check{\xi}$ est la classe du fibré $E \longrightarrow E/T$ de fibre T , et h^* l'application $H^1(E/T, T) \longrightarrow H^1(E/T, U(q))$ induite par l'injection $T \subset U(q)$. Le groupe structural de $\rho^* \xi$ peut donc être réduit à T , ce qui entraîne l'existence de q fibrés diagonaux $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ de base E/T et l'on a

$\rho^*(\xi) = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q$ d'après la proposition 3.2 de l'exposé 21. L'unicité a déjà été démontré pour les $U(1)$ -fibrés : on peut même écrire $c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$ d'après (a), où $\gamma_i \in H^2(E/T, Z)$.

Les axiomes II et III montrent alors que

$$(2) \quad \rho^* c(\xi) = c(\rho^* \xi) = \prod_{i=1}^q (1 + \gamma_i).$$

Or, d'après un théorème de A. Borel $\rho^* : H(X, Z) \longrightarrow H(E/T, Z)$ est un isomorphisme dans ; $c(\xi)$ est donc unique. On a démontré de plus que $c_i(\xi) = 0$ pour $i > q$.

6.- Existence.

a) ξ est un $U(1)$ -fibré.

On définit $c(\xi)$ par la formule

$$c(\xi) = \sigma^*(1 - g_n)$$

où l'on a pris $n > \dim X$. $c(\xi)$ est indépendant de n puisque $i^* g_n = g_{n-1}$, $c^* \eta_n = \eta_{n-1}$, vérifie les axiomes I et IV par définition, et l'axiome II d'après la proposition 1.4.

b) ξ est un $U(q)$ -fibré. $q > 1$. $c(\xi)$ sera défini par la formule (2). Plus précisément $\rho^* c_i(\xi) = \sigma_i$ où σ_i est la i -ième fonction symétrique

élémentaire des γ_i (on reprend les notations de 5 (b)). ρ^* étant biunivoque, $c_i(\xi)$ sera bien déterminé. Encore faut-il, pour que cette définition ait un sens que σ_i appartienne à l'image de ρ^* . C'est ce que nous allons démontrer à présent.

Soit N le normalisateur de T dans $U(q)$. $N/T = \bar{\Phi}$ est un groupe fini, le groupe de Weyl de $U(q)$. $\bar{\Phi}$ est isomorphe au groupe des permutations de q objects. Les éléments de $\bar{\Phi}$ peuvent être considérés comme des automorphismes de T : si $\alpha \in \bar{\Phi}$ et

$$t = \begin{pmatrix} e & & & \\ & i\varphi_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e & \\ & & & & i\varphi_q \end{pmatrix} \quad \text{un élément de } T, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} e & & & \\ & i\varphi_{\alpha_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e & \\ & & & & i\varphi_{\alpha_q} \end{pmatrix}$$

où $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ est une permutation de $\{1, \dots, q\}$.

$\bar{\Phi}$ peut être considéré d'autre part comme un groupe d'homéomorphismes de E/T qui conserve les fibres $U(q)/T = F(q)$ de la fibration $\rho: E/T \rightarrow X$. En effet, si V est une carte admissible de cette fibration, E/T est homéomorphe au-dessus de V à $V \times F(q)$. Si $\alpha \in \bar{\Phi}$, on définit alors

$$\tilde{\alpha}(v, gT) = (v, gaT) = (v, gTa)$$

où $v \in V$, gT est une classe à gauche de $V(q)$ modulo T , et $a \in N$ un élément de la classe α . $\tilde{\alpha}$ est un homéomorphisme de E/T sur lui-même que laisse bien invariant les fibres.

$\tilde{\alpha}$ induit donc un isomorphisme $H(E/T, Z) \approx H(E/T, Z)$ qui induit l'identité sur $\rho^* H(X, Z)$, et $\bar{\Phi}$ devient un groupe d'isomorphismes de $H(E/T, Z)$ laissant fixe les éléments de $\rho^* H(X, Z)$. Or d'après un théorème de A. Borel, $\rho^* H(X, Z)$ est exactement l'ensemble des éléments invariants par $\bar{\Phi}$. Il nous reste donc à démontrer que σ_i est invariant par $\bar{\Phi}$ pour être assuré que $\sigma_i \in \rho^* H(X, Z)$.

Tout élément $\alpha \in \bar{\Phi}$ étant un automorphisme de T (défini par $t \rightarrow a^{-1}ta$ $t \in T$ $a \in \alpha$) induit une application

$\alpha^H: H^1(E/T, T_c) \approx H^1(E/T, T_c)$ (Cf. exposé 17 paragraphe 1.3). Comme α n'opère sur T qu'en changeant l'ordre des termes, $\alpha^H \xi$ a même fibrés diagonaux que ξ , à l'ordre près et

$$\alpha^H \xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q.$$

D'autre part l'application $\tilde{\alpha} : E/T \longrightarrow E/T$ définie ci-dessus induit une application $\tilde{\alpha}^* : H^1(E/T, T_c) \longrightarrow H^1(E/T, T_c)$. On montre alors (en utilisant les cocycles qui définissent $\check{\xi}$) que $\alpha^* \check{\xi} = \tilde{\alpha}^* \check{\xi}$. Donc $\tilde{\alpha}^*$ permute les fibrés diagonaux de $\check{\xi}$, et, (d'après 6 (a)) comme l'axiome II est vérifié pour les $U(1)$ -fibrés, l'application $H(E/T, Z) \approx H(E/T, Z)$ induite par α permute les γ_i , et laisse donc invariante les fonctions symétriques élémentaires des γ_i . C.Q.F.D.

La vérification des axiomes I, II, IV est immédiate.

Vérification de l'axiome III :

Supposons que $\xi = \xi'_1 \oplus \dots \oplus \xi'_q$, $\xi'_i \in H^1(X, U(1)_c)$ l'espace fibré $\rho : E/T \longrightarrow X$ admet donc une section continue $s : X \longrightarrow E/T$ (Cf. exposé 21 paragraphe 3.2 et 3.3) et $s^* \xi_i = \xi'_i$ où ξ_i désigne encore le i -ième fibré diagonal de $h^* \xi$. Donc

$$c(\xi) = s^* \rho^* c(\xi) = s^* \prod_{i=1}^q c(\xi_i) = \prod_{i=1}^q c(\xi'_i)$$

car $\rho s = \text{identité}$.

7.- Nous adopterons la convention suivante : étant donné un polynôme $1 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ où les a_i sont des éléments commutatifs on écrira formellement $\sum_{i=0}^n a_i x^i = \prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j x)$, considérant ainsi les a_i comme les fonctions symétriques élémentaires des α_j . Ceci étant on a le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1.- Soient ξ un $U(q)$ -fibré et ξ' un $U(q')$ -fibré sur le même espace X . On écrit formellement

$$\sum_{i=0}^q c_i(\xi) x^i = \prod_{j=1}^q (1 + \gamma_j x)$$

et $\sum_{i=0}^{q'} c_i(\xi') x^i = \prod_{k=1}^{q'} (1 + \delta_k x)$. Alors :

1. $\sum_{i=0}^q c_i(\xi^*) x^i = \prod_{j=1}^q (1 - \gamma_j x)$ c'est-à-dire $c_i(\xi^*) = (-1)^i c_i(\xi)$

2. $\sum_{i=0}^{q+q'} c_i(\xi \oplus \xi') x^i = \prod_{j=1}^q (1 + \gamma_j x) \prod_{k=1}^{q'} (1 + \delta_k x)$ c'est-à-dire

$$c(\xi \oplus \xi') = c(\xi) c(\xi')$$

$$\underline{3.} \quad \sum_{i=0}^{qq'} c_i(\xi \otimes \xi') x^i = \prod_{j,k} (1 + (\gamma_j + \delta_k)x) \quad \begin{array}{l} 0 \leq j \leq q \\ 0 \leq k \leq q' \end{array}$$

$$\underline{4.} \quad \sum c_i(\xi^{(p)}) x^i = \left(\prod (1 + (\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_p})x) \right) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq q$$

La démonstration du théorème est précédée de 3 lemmes :

LEMME 7.1.- Supposons que ξ (resp. ξ') soit un $GL(q, C)$ -fibré (resp. $GL(q', C)$) sur X admettant ξ_1, \dots, ξ_q pour fibrés diagonaux (resp. $\xi'_1, \dots, \xi'_{q'}$). Alors

ξ^* a pour fibrés diagonaux ξ_1^*, \dots, ξ_q^*
 $\xi \oplus \xi'$ a pour fibrés diagonaux $\xi_1, \dots, \xi_q, \xi'_1, \dots, \xi'_{q'}$
 $\xi \otimes \xi'$ a pour fibrés diagonaux les qq' fibrés $\xi_i \otimes \xi'_j$
 $\xi^{(p)}$ a pour fibrés diagonaux les $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_p}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq q$.

Démonstration immédiate sur les définitions.

LEMME 7.2.- Soient ξ, ξ', ξ'', \dots une suite finie de $U(q)$ (resp. $U(q')$, $U(q'')$...) fibrés sur X . Il existe alors un espace topologique Y et une appli-
cation $\varphi: Y \rightarrow X$ tels que

a) $\varphi^*: H^*(X, Z) \rightarrow H^*(Y, Z)$ soit injectif

b) $\varphi^*(\xi), \varphi^*(\xi')$ etc.. sont des sommes de Whitney de fibres

diagonaux.

En effet dans le cas d'un seul fibré, nous avons vu au paragraphe 5 que $\rho: E/T^{q'} \rightarrow X$ avait les deux propriétés désirées. $\rho^*(\xi')$ est un fibré sur E/T et on peut lui appliquer la même méthode : on définit un espace E' et une application $\rho': E'/T^{q'} \rightarrow E/T^q$, ρ'^* est injectif, et $\rho'^* \circ \rho^*(\xi')$ se décompose en somme de fibrés diagonaux. $\rho' \circ \rho: E'/T^{q'} \rightarrow X$ a donc les deux propriétés pour ξ et ξ' . Ainsi, au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient le résultat désiré.

LEMME 7.3.- Soient ξ_1 et ξ_2 des $U(1)$ -fibrés sur X alors
 $c_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = c(\xi_1) + c(\xi_2)$ (en particulier comme $\xi \otimes \xi^*$ est le fibré trivial si ξ est un $U(1)$ -fibré, et comme la classe de Chern d'un fibré trivial est nulle (on le voit par un calcul direct de $\sigma^* g_n$) on a $c(\xi) = -c(\xi^*)$.) La démonstration sera donnée dans un prochain exposé.

Démonstration du théorème 7.1.

Le théorème est vrai si ξ et ξ' sont des sommes de Whitney de $U(1)$ -fibrés d'après les lemmes 7.1 , 7.2 et l'axiome III donc toujours vrai d'après le lemme 7.2 et l'axiome II.

BIBLIOGRAPHIE

- BOREL (Armand).- Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., t. 57, 1953 p. 115-207.
- HIRZEBRUCH (Friedrich).- Neue topologische Methoden in der algebraischen geometrie. Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik..., neue Folge, Heft 9).
- STEENROD (Norman).- The topology of fibre bundles.- Princeton, Princeton Univ. Press, 1951 (Princeton math. Series n° 14).
-