

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

M. ZISMAN

Espaces fibrés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 17,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A17_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES FIBRÉS

(Exposé de M. ZISMAN, le 1.4.1957)

Variétés analytiques complexes.

La définition de ces variétés est analogue à celle des variétés C^ω (Cf. exposé 7). V est une variété analytique complexe (ou de classe C^ω) si c'est un espace topologique séparé possédant un recouvrement ouvert $U = \{U_\alpha\}$ par des ouverts U_α homomorphes à des boules ouvertes de C^n . On définit ainsi dans chaque U_α des fonctions coordonnées z_α^i ($i = 1, 2, \dots, n$). Dans $U_\alpha \cap U_\beta$ les coordonnées z_α^i sont astreintes à être des fonctions holomorphes des coordonnées z_β^j , à jacobien non nul. On suppose enfin que le recouvrement U est maximal pour toutes ces propriétés. On étend alors sans difficulté la plupart des définitions de l'exposé 7 : anneau des fonctions holomorphes en un point, application holomorphe d'une variété C^ω dans une autre.

Remarquons qu'une variété analytique complexe V_n possède une structure induite de variété analytique réelle de dimension $2n$: U_α est homéomorphe à une boule ouverte de R^{2n} , dans U_α $z_\alpha^i = x_\alpha^i + \sqrt{-1} y_\alpha^i$, et les $2n$ coordonnées x_α^i, y_α^i font de V_n une variété analytique réelle. Quand on parlera de l'espace tangent en un point de V_n , ou des formes différentielles de V_n , il s'agira toujours de l'espace tangent et des formes différentielles définis par la structure réelle induite par la structure analytique complexe.

1.- Les ensembles $H^1(X, G_e)$, $H^1(X, G_d)$, $H^1(X, G_\omega)$.

1.1.- Soit G un groupe, X un espace topologique, et U un ouvert de X . L'espace des applications de U dans G , soit $\Gamma(U, G)$ est muni d'une structure de groupe. Dans la suite, nous distinguerons 3 sous-groupes intéressants de $\Gamma(U, G)$.

a) X est un espace topologique, et G un groupe topologique. $\Gamma(U, G_c)$ est le groupe des applications continues de U dans G .

b) X est une variété différentiable C^∞ et G un groupe de Lie. $\Gamma(U, G_d)$ est le groupe des applications différentiables C^∞ de U dans G .

c) X est une variété analytique complexe et G un groupe de Lie complexe. $\Gamma(U, G_\omega)$ est le groupe des applications holomorphes de U dans G .

Il est entendu que dans toute la suite, lorsqu'on parle de G_c (resp. G_d , resp. G_ω). X est un espace topologique (resp. variété différentiable C^∞ , resp. analytique complexe). On a évidemment (quand les trois groupes sont définis)

$$\Gamma(U, G_\omega) \subset \Gamma(U, G_d) \subset \Gamma(U, G_c).$$

Dans toute la suite de cet exposé, les résultats et définitions seront valables dans les trois cas. Pour simplifier l'écriture nous écrirons donc toujours G au lieu de G_c (resp. G_d , resp. G_ω).

Si $V \subset U$ on a un homomorphisme

$$\Gamma(U, G) \longrightarrow \Gamma(V, G)$$

défini par la restriction à V des fonctions définies sur U .

On posera $\Gamma(U, G) = 1$ (él. neutre de G) si $U = \emptyset$.

1.2.- Définition de $H^1(U, G)$.

Soit $U = \{U_i\}$ un recouvrement de X par des ouverts, et $I(U)$ l'ensemble des indices intervenant dans le recouvrement. Un U-cocycle est une fonction f qui, à 2 éléments ordonnés de $I(U)$, fait correspondre un élément f_{ij} $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G)$ telle que

$$f_{ij}(x) \cdot f_{jk}(x) = f_{ik}(x) \quad \text{si } x \in U_i \cap U_j \cap U_k, \quad i, j, k \in I(U)$$

(la multiplication a lieu dans G).

On en déduit $f_{ii} = \text{él. unité de } \Gamma(U_i, G)$

$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}.$$

Deux cocycles f et f' sont dits équivalents s'il existe, pour tout $i \in I(U)$ un élément $g_i \in \Gamma(U_i, G)$ tel que

$$f'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x) f_{ij}(x) g_j(x) \quad \text{dans } U_i \cap U_j.$$

L'ensemble des classes d'équivalences est désigné par $H^1(U, G)$ (confert G est un groupe abélien discret noté additivement, on prend pour $\Gamma(U_i, G)$ le

groupe des applications constante de U_i dans G . Alors f_{ij} est un 2 cocycle de Čech du nerf X_U et $H^1(U, G)$ coïncide avec le groupe ainsi désigné précédemment).

Si $U < V$, on a une application

$$r_V^U : H^1(U, G) \longrightarrow H^1(V, G)$$

définie à l'aide d'une projection $p : I(V) \longrightarrow I(U)$, mais indépendante de la projection choisie (Cf. exposé 11, paragraphe 7) : on pose

$$(pf)_{r,s} = f_{pr,ps} \quad \text{dans } V_r \cap V_s \quad \text{pour tout } U\text{-cocycle } f.$$

Il est alors immédiat que l'application ainsi définie passe au quotient par la relation d'équivalence, et que l'application r_V^U ainsi obtenue est indépendante de la projection choisie. La limite inductive du système des $\{H^1(U, G), r_V^U\}$ est désignée par $H^1(X, G)$.

Si U est un recouvrement quelconque, f_{ij} = unité de $\Gamma(U_i \cap U_j, G)$ est un cocycle particulier. Sa classe s'appelle la classe unité de $H^1(X, G)$.

REMARQUE. - Par limite inductive, on entend la notion suivante : deux éléments

$\gamma \in H^1(U, G)$ $\gamma' \in H^1(V, G)$ définissent le même élément de $H^1(X, G)$ si et seulement si il existe un recouvrement W , $U < W$, $V < W$ tel que $r_W^U \gamma = r_W^V \gamma'$.

1.3.- Les inclusions (quand elles existent) $\Gamma(U, G_\omega) \subset \Gamma(U, G_d) \subset \Gamma(U, G_c)$ induisent les applications

$$H^1(U, G_\omega) \subset H^1(U, G_d) \subset H^1(U, G_c)$$

Si $h : G' \longrightarrow G$ est un homomorphisme (resp. continu, resp. différentiable, resp. holomorphe), on a des applications

$$h^* : H^1(X, G') \longrightarrow H^1(X, G)$$

Si $G' = G$ et si $h(a)$ est l'automorphisme intérieur $h(a).g = a^{-1}ga$ $h^*(a)$ est bijectif.

1.4.- REMARQUE. Si G est commutatif, $H^1(X, G)$ est alors un groupe commutatif. On peut alors définir des groupes $H^n(X, G)$ suivant un procédé qui généralise la construction des groupes de Čech. Ceci sera fait dans un exposé ultérieur.

2.- DÉFINITIONS.

2.1.- On dit que G opère effectivement sur F (à gauche) si

a) (G "opère") on a une application $G \times F \longrightarrow F$ (continue, resp. différentiable, resp. holomorphe) notée $(g, f) \longrightarrow g.f$ telle que

$$g_1(g_2.f) = g_1g_2.f, \quad e.f = f \quad (g_1, g_2 \in G, \quad e = \text{unité de } G)$$

b) (G "effectif")

$$g.f = f \quad \text{pour tout } f \in F \implies g = e$$

en d'autres termes, G est isomorphe à un groupe d'homéomorphismes de F .

2.2.- Espaces fibrés.

Un espace topologique E (resp. variété C^∞ , resp. variété analytique complexe) est appelé espace fibré de base B (espace topologique, resp. variété C^∞ , resp. variété analytique complexe) de fibre F (idem) de groupe structural G (topologique, de Lie, complexe de Lie) et de projection p , si l'on a

a) $p : E \longrightarrow B$ surjective est continue (resp. différentiable, resp. holomorphe)

b) G opère effectivement sur F à gauche.

c) il existe un recouvrement $U = \{U_i\}$ de B par des ouverts et des homéomorphismes (resp. isomorphismes différentiables, isomorphismes holomorphes)

$$h_i : p^{-1}(U_i) \approx U_i \times F \quad \text{tels que}$$

$$(1) \quad \text{si } x \in U_i \quad h_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times F$$

$$(2) \quad \text{il existe des } g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G) \quad (\text{resp. } G_c, G_d, G_\omega)$$

avec

$$h_i h_j^{-1}(x, f) = (x, g_{ij}(x).f) \quad \text{si } x \in U_i \cap U_j, f \in F.$$

$p^{-1}(x)$ est appelée la fibre au-dessus de x ; on la désigne par F_x . (1) entraîne que $F_x \approx F$.

REMARQUES.-

1°) Il est immédiat que g_{ij} est un cocycle.

2°) G étant effectif, g_{ij} est entièrement déterminé par h_i et h_j .

Cartes admissibles.-

Soit V un ouvert de B et supposons qu'il existe un homéomorphisme $h_V :$

$p^{-1}(V) \approx V \times F$. Le système (V, h_V) est une carte admissible, si l'on a, pour tout $U_i \in U$

$$\begin{aligned} h_V h_i^{-1}(x, f) &= (x, g_{V,i}(x) \cdot f) \\ (x \in V \cap U_i, f \in F) &\quad \text{où} \\ g_{V,i} &\in \Gamma(V \cap U_i, G) \quad (\text{resp. } G_c, G_d, G_\omega) \end{aligned}$$

Etant donné $p : E \longrightarrow B$, un espace F , un groupe G vérifiant les propriétés a et b de (2.2) et deux recouvrements $U = \{U_i\}$, $V = \{V_j\}$ de B ayant les propriétés c, on convient de dire qu'ils définissent le même fibré E si toute carte admissible pour U est admissible pour V .

2.3.- Homomorphismes.

Soient deux espaces fibrés $p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B'$ ayant même fibre F et même groupe structural G . Un homomorphisme h de E dans E' est une application (continue, resp. différentiable, resp. holomorphe)

$h : E \longrightarrow E'$ telle que

a) la restriction de h à F_x est un homéomorphisme de F_x sur une fibre $F_{x'}$ de E' . En d'autres termes, h induit une application (que l'on suppose continue, resp. différentiable, resp. holomorphe) $\bar{h} : B \longrightarrow B'$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' \end{array} \quad \text{est commutatif.}$$

b) pour tout $x' \in B'$, il existe une carte admissible $(V', h_{V'})$ $h_{V'} : p^{-1}(V') \approx V' \times F$ de E' telle que $V = h^{-1}(V')$ ait les propriétés suivantes

- 1°) il existe un homéomorphisme $h_V : p^{-1}(V) \approx V \times F$
 ((V, h_V) est une carte admissible de E)
 2°) $h_V, h h_V^{-1} : V \times F \longrightarrow V' \times F$
 $(x, f) \longrightarrow (\bar{h}(x), g_V(x) \cdot f) \quad \begin{pmatrix} x \in V \\ f \in F \end{pmatrix}$
 avec $g_V \in \Gamma(V, G)$ (resp. G_c, G_d, G_ω)

Si $B' = B$, $\bar{h} = \text{identité}$, h homéomorphisme sur, on dit que h est un isomorphisme.

3.1.- Construction d'un espace fibré à partir d'un cocycle de la base.

Soit $U = \{U_i\}$ un recouvrement de B , et $\gamma = \{g_{ij}\}$ un U -cocycle. On construit un fibré E de base B , de fibre F comme suit : dans la réunion $\bigcup_{i \in I} (U_i \times F)$ on identifie

$$(x, f) \in U_j \times F \quad \text{et} \quad (x, g_{ij}(x)f) \in U_i \times F \quad \text{si} \quad x \in U_i \cap U_j.$$

E_γ est alors un fibré de fibre F , base B , groupe G , $p : E \longrightarrow B$ étant défini par la projection $U_i \times F \longrightarrow U_i$.

PROPOSITION 3.1.- Les classes d'isomorphie de fibrés de base B , fibre F et groupe structural G , sont naturellement en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(B, G)$ (resp. G_c, G_d, G_ω). L'élément unité de $H^1(B, G)$ correspond au "fibré trivial" $E = B \times F$.

Soit $\gamma = \{g_{ij}\}$ et $\gamma' = \{g'_{ij}\}$ deux U -cocycles équivalents c'est-à-dire $g'_{ij} = g_i^{-1} g_{ij} g_j$ dans $U_i \cap U_j$ avec $g_i \in \Gamma(U_i, G)$. Si $x \in U_j$, posons $h(x, f) = (x, g_j^{-1}(x)f)$, c'est un homéomorphisme de $U_j \times F$ sur $U_j \times F$. Si $x \in U_i \cap U_j$, (x, f) et $(x, g_{ij}(x)f)$ sont identifiés dans E_γ . Or $h(x, g_{ij}(x)f) = (x, g_i^{-1}(x) g_{ij}(x)f) = (x, g'_{ij}(x) g_j^{-1}(x).f)$ est identifié à $(x, g_j^{-1}(x)f)$ dans $E_{\gamma'}$, h définit donc un homéomorphisme $E_\gamma \longrightarrow E_{\gamma'}$. Il est immédiat de montrer que c'est un isomorphisme des structures fibrées.

E est donc déterminé à une isomorphie près par la classe de cohomologie de γ dans $H^1(U, G)$. D'autre part, si $U < V$ et r_V^U la projection associée, $r_V^U \gamma$ et γ définissent le même fibré d'après la convention de (2.2), d'où la proposition.

Tous les fibrés définis par la même classe $\xi \in H^1(B, G)$ sont dits associés à ξ .

3.2.- Le cas où G n'est pas effectif.

Le sous-ensemble $H \subset G$ des éléments h qui laissent fixe tous les points de F ($hf = f \quad f \in F$) est un sous-groupe fermé invariant dans G et G/H est un groupe topologique qui opère effectivement sur F .

Si G est de Lie, G/H aussi. Si G est complexe de Lie G/H aussi. On a donc des applications naturelles :

$$\begin{aligned} t : H^1(B, G_c) &\longrightarrow H^1(B, G/H_c) \\ t : H^1(B, G_d) &\longrightarrow H^1(B, G/H_d) \\ t : H^1(B, G_{\infty}) &\longrightarrow H^1(B, G/H_{\infty}) \end{aligned}$$

Si $\xi \in H^1(B, G)$ on dira par abus de langage que les fibrés associés à $t\xi$ sont associés à ξ .

3.3.- Les espaces fibrés principaux.

Si $F = G$, G opérant sur G par translation à gauche, on dit que E est un espace fibré principal.

La proposition 3.1 montre que dans chaque classe $\xi \in H^1(B, G)$ il y a un et un seul espace fibré principal de groupe G .

PROPOSITION 3.3.- Si $p : E \longrightarrow B$ est un espace fibré principal de groupe G , G opère effectivement à droite sur E .

En effet, si (U, h_U) est une carte admissible, on définit un produit par G dans $U \times G$ par

$$(x, g).g_1 = (x, gg_1) \quad , \quad g, g_1 \in G, x \in U$$

et l'on pose

$$(h_U(x, g)).g_1 = h_U(x, gg_1)$$

cette application est indépendante des cartes choisies car si $x \in U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} (x, g) &\text{ est identifié à } (x, g_{ij}g) \\ \text{et } (x, gg_1) &\text{ " " " } (x, g_{ij}gg_1) \end{aligned}$$

3.4.- Opérations élémentaires sur les fibrés.

a) image inverse. Soit $\bar{f} : B \longrightarrow B'$ une application continue (resp. différentiable, resp. holomorphe). $\bar{f}$ induit une application naturelle $\bar{f}^* : H^1(B', G) \longrightarrow H^1(B, G)$ si $\xi \in H^1(B', G)$, $\bar{f}^*(\xi)$ définit une classe de fibrés sur B , l'image inverse par $\bar{f}$ de la classe de fibrés ξ .

Soit E' un fibré associé à ξ . On construit facilement un fibré associé à $\bar{f}^*(\xi)$, soit E (noté $\bar{f}^*E'$). E est le sous-espace de $E' \times B$ des points (z', x) tels que $\pi'(z') = \bar{f}(x)$ ($x \in B, z' \in E'$). La projection $p : E \longrightarrow B$ est alors $p(z', x) = x$. On vérifie sans peine que, si l'on pose $f(z', x) = z'$, l'application $f : E \longrightarrow E'$ induit un homomorphisme d'espaces fibrés.

b) Soit $p : E \longrightarrow B$ un espace fibré principal de groupe G , et F un espace sur lequel G opère (pas obligatoirement effectivement Cf. 3.2). Nous

allons construire un espace fibré E' sur B de fibre F , groupe structural G , noté $E \times_G F$: on identifie $(z, f) \in E \times F$ et $(z.g^{-1}, g.f)$ (ne pas oublier que G opère à gauche sur F et à droite sur E) $E \times_G F$ et E sont associés à une même classe de $H^1(B, G)$.

4.- Exemples d'espaces fibrés.

Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe fermé, G/H l'espace des classes à gauche et $p : G \longrightarrow G/H$ la projection canonique. On dira que $p : G \longrightarrow G/H$ admet une section locale, s'il existe un voisinage U de $p(e)$ ($e = \text{él. neutre de } G$) et une application (continue resp. différentiable, resp. holomorphe) $f : U \longrightarrow G$ telle que $p \circ f = \text{identité de } U$.

Si G est un groupe de Lie, il existe toujours une section locale différentiable. Si G est un groupe de Lie complexe et si le sous-groupe fermé H est aussi un groupe de Lie complexe, il existe toujours une section locale différentiable.

PROPOSITION 4.- S'il existe une section locale $p : G \longrightarrow G/H$ est un espace fibré principal de base G/H , projection p , fibre et groupe H l'espace fibré est différentiable si G est de Lie, analytique complexe si G et H sont des groupes de Lie complexes.

PROPOSITION 4bis.- S'il existe une section locale pour le sous-groupe $K \subset G$, $p : G/K \longrightarrow G/H$ est un espace fibré de base G/H , projection p , fibre H/K groupe H/K_0 , K_0 étant le plus grand sous-groupe de K invariant dans H . ($K \subset H$ sont deux sous-groupes fermés de G).

Si G est de Lie, l'espace fibré est différentiable, si G est un groupe de Lie complexe de même que H et K , il est analytique complexe.

DÉMONSTRATION.- (de la proposition 4)

Soit f la section locale associée à l'ouvert U de $p(e)$. G opère à gauche sur G/H de manière naturelle (notée $g.x$) et $\{g.U\}$ est un recouvrement ouvert de G/H quand g parcourt G . Soit $\varphi_g : gU \times H \longrightarrow p^{-1}(gU)$ l'application $(x, h) \longrightarrow g.f(g^{-1}.x).h$ ($g^{-1}.x \in U$ on peut donc lui appliquer f). On fait ensuite le produit dans G . On a bien $p \circ \varphi_g(x, h) = x$ puisque

$$p(gf(g^{-1}x)h) = p(gf(g^{-1}x)) = gp(f(g^{-1}x)) = gg^{-1}x = x$$

φ_g est continue (resp. différentiable, resp. holomorphe) car f l'est par

hypothèse de même que le produit dans G .

φ_g est biunivoque car $gf(g^{-1}x)h = gf(g^{-1}x')h' \implies$ (en appliquant p aux deux membres) $x = x'$ et par conséquent $h = h'$.

φ_g est sur car si $\gamma \in p^{-1}(gU)$, posons $x = p(\gamma) \in gU$; puisque $gf(g^{-1}x)$ et γ ont même image par p , il existe $h \in H$ tel que $\gamma = g.f(g^{-1}x).h$, et l'on a bien $\varphi_g(x, h) = \gamma$. Nous avons en fait exhibé l'application inverse de φ_g , soit $h_g : p^{-1}(gU) \longrightarrow gU \times H$ qui est par construction continue (resp. différentiable, resp. holomorphe).

Enfin soit $x \in gU \cap g'U$

$$h_{g'}^{-1}(x, h) = h_g^{-1}(g.f(g^{-1}x).h) = (x, h')$$

avec $h' = f^{-1}(g^{-1}x) g'^{-1} gf(g^{-1}x)h$. On montre immédiatement que

$$f^{-1}(g^{-1}x) g'^{-1} gf(g^{-1}x) \in \Gamma(gU \cap g'U, H) \text{ est un cocycle, C.Q.F.D.}$$

APPLICATIONS.

a) Variétés de Stiefel : on a les structures fibrées

$$O(n) \longrightarrow O(n)/O(p), \quad U(n) \longrightarrow U(n)/U(p)$$

b) grassmanniennes

$$O(n+p)/O(p) \longrightarrow O(n+p)/O(n) \times O(p)$$

est fibré principale de groupe $O(n)$

$$U(n+p)/U(p) \longrightarrow U(n+p)/U(n) \times U(p)$$

est fibré principal de groupe $U(n)$.

Ces fibrations joueront un grand rôle dans la suite.

5.- Sections des fibrés.

On appelle section d'un fibré $p : E \longrightarrow B$ une application $f : B \longrightarrow E$ continue (resp. différentiable, resp. holomorphe) telle que $pf = \text{identité}$.

PROPOSITION 5.1.- Un espace fibré principal de groupe G est équivalent au fibré trivial si et seulement si il admet une section.

a) Supposons que $f : B \longrightarrow E$ soit une section. Si $x \in U_i$, $f(x) \in p^{-1}(U_i)$ donc $h_i(f(x))$ est défini et on peut écrire $h_i(f(x)) = (x, g_i(x))$ où $g_i \in \Gamma(U_i, G)$. Si $x \in U_i \cap U_j$, on a $g_i^{-1}(x) g_{ij}(x) g_j(x) = e$ ($e = \text{unité de } G$) en effet $h_i h_j^{-1}(x, g_j(x)) = (x, g_{ij}(x) g_j(x))$ et

$h_j^{-1}(x, g_j(x)) = f(x)$ entraîne $h_i h_j^{-1}(x, g_j(x)) = h_i(f(x)) = (x, g_i(x))$
le cocycle g_{ij} est donc cohomologue au cocycle unité.

b) Supposons maintenant qu'il existe $g_i \in \Gamma(U_i, G)$ tel que

$$g_i^{-1}(x) g_{ij}(x) g_j(x) = e$$

posons $f_i(x) = h_i^{-1}(x, g_i(x))$ pour $x \in U_i$. Si $x \in U_i \cap U_j$ $f_j(x) =$
 $= h_j^{-1}(x, g_j(x))$ et par conséquent $f_i(x) = h_i^{-1}(x, g_{ij}(x) g_j(x)) =$
 $= h_j^{-1}(x, g_j(x)) = f_j(x)$. Les f_i définissent donc une application $f :$
 $B \longrightarrow E$ qui est une section puisque $p \circ f_i = p h_i^{-1}(x, g_i(x)) = x$.

COROLLAIRE.— Un espace fibré de groupe G est équivalent au fibré trivial si et seulement si l'espace fibré principal associé admet une section.

En effet la propriété d'être équivalent à un fibré trivial est une propriété qui ne dépend que du cocycle g_{ij} .

5.2.— Réduction du groupe structural.

Soit $\xi \in H^1(B, G)$, E un fibré associé à ξ de fibre F et H un sous-groupe fermé de G . (si G est un groupe de Lie complexe, on suppose en plus que H est aussi un groupe de Lie complexe). Soit $h : H \longrightarrow G$ l'injection et $h^* : H^1(B, H) \longrightarrow H^1(B, G)$ l'application correspondante des ensembles de cohomologie. S'il existe $\check{\xi} \in H^1(B, H)$ tel que $h^* \check{\xi} = \xi$, on dit que l'on peut réduire le groupe structural G de E (ou ξ) au sous-groupe H .

Supposons maintenant que E soit un fibré principal de groupe G . Soit E/H l'espace quotient obtenu en identifiant z et $z.g$ ($z \in E, g \in H$) et $\sigma : E \longrightarrow E/H$ la projection canonique. On voit immédiatement que E est un espace fibré principal de base E/H , groupe H , dont on désigne la classe dans $H^1(E/H, H)$ par $\check{\xi}$.

PROPOSITION 5.2.— Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & E/H \\ & \searrow p & \swarrow \rho \\ & B & \end{array}$$

(ρ est l'application induite par σ , et p la projection $E \longrightarrow B$)
 $E/H \longrightarrow B$ et $E \longrightarrow B$ sont tous deux associés à ξ le premier a pour fibre G/H , le deuxième G .

Si h^* désigne l'application $H^1(E/H, H) \longrightarrow H^1(E/H, G)$ on a
$$h^* \check{\xi} = \rho^* \xi$$

(on suppose que H a une section locale dans G Cf. paragraphe 4). La première partie de la démonstration est une généralisation de ce qui a été fait au paragraphe 4. (Cf. Steenrod, Topologie of fibre bundle Princeton n° 14, paragraphe 9.6, p. 45).

Démontrons $h^* \check{\xi} = \rho^* \xi$ (c'est-à-dire $\rho^* \xi$ est un fibré de base E/H dont on peut réduire le groupe structural à H).

On peut obtenir un fibré de la classe $\rho^* \xi$ de la manière suivante : soit W le sous-ensemble des points de $(E/H) \times E$ tels que $\rho(z') = \rho(z)$ ($z' \in E/H, z \in E$). $W \longrightarrow E/H$ est le fibré cherché. Soit d'autre part $W' = E \times_H G$ le fibré de fibre G obtenu par la construction du paragraphe 3.4.b à partir du fibré $\sigma : E \longrightarrow E/H$. W' est associé à $h^* \check{\xi}$. Explicitement, W' est l'espace quotient de $E \times G$ obtenu en identifiant (z, g) et $(z.h, h^{-1}g)$ ($z \in E, g \in G, h \in H$). W et W' sont isomorphes ; en effet si (z, g) est un représentant d'un élément de W' , $(\sigma(z), z.g)$ est un élément de W indépendant du choix du représentant. On définit ainsi un homomorphisme $W' \longrightarrow W$ dont on montre immédiatement qu'il est un isomorphisme.

THÉORÈME 5.2.- La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse réduire à H le groupe structural des fibrés associés à $\xi \in H^1(B, G)$ est que l'espace fibré associé $\rho : E/H \longrightarrow B$ (mêmes notations que ci-dessus) ait une section s . Posons $\eta = s^*(\check{\xi})$. η représente un fibré sur B de groupe H et $h^* \eta = \xi$. Il existe des cartes admissibles pour le fibré $E, \{U_i \times G\}$ ($\{U_i\}$ est un recouvrement de B) telles que $g_{ij}(x) \in H$ si $x \in U_i \cap U_j$ le cocycle g_{ij} représentant ξ si l'on considère $g_{ij}(x)$ comme appartenant à G , représentant η si l'on considère $g_{ij}(x)$ comme appartenant à H . Enfin si $x \in U_i, s(x) = (x, \sigma(e))$ où $e = \text{él. unité de } G$. (pour la démonstration voir Steenrod paragraphe 9.4).

5.3.- Cas d'existence de sections.

La réduction du groupe structural est une opération importante, lorsqu'elle est possible. Ce qui précède nous montre donc l'intérêt qu'il y a à savoir reconnaître si un fibré possède ou non des sections. Dans ce qui suit nous supposons que B est une variété différentiable C^∞ dénombrable à l'infini (c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles compacts).

On démontre alors le théorème suivant. (Steenrod paragraphe 12)

THÉORÈME 5.3.- Soit $p : E \longrightarrow B$ un espace fibré associé à $\xi \in H^1(B, G_c)$ dont la fibre F est contractible (exposé 14, paragraphe 2.3) ; il existe alors une section continue.

On démontre d'autre part que si $\xi \in H^1(B, G_d)$, l'existence d'une section continue entraîne celle d'une section différentiable C^∞ . Le théorème 5.3 est donc valable si l'on remplace continu par différentiable (Steenrod paragraphe 6.7).

THÉORÈME 5.4.- (Cartan, Mostow, Iwasawa) Soit G un groupe de Lie connexe et H un sous-groupe compact maximal de G . Alors $G = H.K$ ou K est isomorphe à un espace euclidien. Donc :

THÉORÈME 5.5.- Tout espace fibré de groupe G connexe peut être réduit à un espace fibré de groupe H , où H est un sous-groupe compact maximal de G .

En effet le fibré associé de fibre G/H admet une section différentiable d'après 5.3 et 5.4.

En d'autres termes $H^1(B, G_d) \approx H^1(B, H_d)$
