Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Gabriel Thierrin

Demi-groupes réductifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 10, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956
-:-:-:-

23 janvier 1956

Exposé n° 10

DEMI-GROUPES RÉDUCTIFS

par Gabriel THIERRIN.

-:-:-:-

Nous nous proposons d'étendre aux demi-groupes réductifs certains résultats de P. Dubreil ([4]) et R. Croisot ([1], [2], [3]) concernant les automorphismes intérieurs des semi-groupes.

1.- Demi-groupes réductifs.

Un demi-groupe est un ensemble dans lequel est défini une opération univoque associative. Un semi-groupe est un demi-groupe vérifiant la règle de simplification des deux côtés. Un demi-groupe D est réductif à droite si la relation $ax = bx$ pour tout $x \in D$ entraine $a = b$. Par exemple, les demi-groupes possédant un élément-unité à droite, les semi-groupes sont des demi-groupes réductifs à droite. Tout demi-groupe D réductif à droite est isomorphe au demi-groupe des translations à gauche de D, en faisant correspondre à l'élément $a \in D$ la translation à gauche γ_a définie par $\gamma_a(x) = ax$.

Un complexe H de D (sous-ensemble non vide de D) est réducteur à droite si la relation $ah = bh$ pour tout $h \in H$ entraîne $a = b$. Tout complexe contenant H est aussi réducteur à droite. En particulier, la réunion de complexes réducteurs à droite est un complexe réducteur à droite. S'il en existe, les complexes réducteurs à droite de D formés d'un seul élément sont les éléments simplifiables à droite de D. Si H et K sont des complexes réducteurs à droite, le produit HK (ensemble des produits hk, où $h \in H$, $k \in K$) est un complexe réducteur à droite. En effet, si $ahk = bhk$ pour tout $h \in H$ et tout $k \in K$, on a $ah = bh$ pour tout $h \in H$ et $a = b$. Il en résulte que l'ensemble des complexes réducteurs à droite d'un demi-groupe réductif à droite est un demi-groupe pour la multiplication des complexes. Si le produit MN des complexes M et N est réducteur à droite, le complexe M est réducteur à droite. En effet de $am = bm$ pour tout $m \in M$ suit $amn = bmn$ pour tout $n \in N$ et $a = b$.

Proposition 1. Si α est un automorphisme du demi-groupe D, le complexe H est réducteur à droite si et seulement si $\alpha(H)$ est réducteur à droite.

Si H est réducteur à droite et si $a\alpha(h) = b\alpha(h)$ pour tout $h \in H$, il existe c et d tels que l'on ait $a = \alpha(c)$, $b = \alpha(d)$ et $\alpha(ch) = \alpha(dh)$. D'où $ch = dh$ pour tout $h \in H$, $c = d$ et $a = b$.

Inversement, si $\alpha(H)$ est réducteur à droite et si $ah = bh$ pour tout $h \in H$, on a $\alpha(ah) = \alpha(a)\alpha(h) = \alpha(bh) = \alpha(b)\alpha(h)$. D'où $\alpha(a) = \alpha(b)$ et $a = b$.

On définit d'une manière symétrique un demi-groupe réductif à gauche, un complexe réducteur à gauche.

Un demi-groupe réductif D est un demi-groupe réductif à droite et à gauche. Par exemple, les demi-groupes possédant un élément-unité, les semi-groupes sont des demi-groupes réductifs. Un complexe réducteur est un complexe réducteur à droite et à gauche. Tout complexe contenant un complexe réducteur est aussi réducteur. S'il en existe, les complexes réducteurs formés d'un seul élément sont les éléments simplifiables de D. Si le produit MN de deux complexes est réducteur, le complexe M est réducteur à droite et le complexe N réducteur à gauche. Le produit de deux complexes réducteurs est réducteur. Donc

Proposition 2. L'ensemble des complexes réducteurs d'un demi-groupe réductif D est un demi-groupe pour la multiplication des complexes.

Dans la suite, nous désignerons par $\mathcal{E}$ le demi-groupe des complexes réducteurs de D.

Un complexe H de D est r-intérieur, s'il est réducteur et si pour tout $a \in D$ il existe b, $c \in D$ tels que l'on ait $ha = bh$ et $ah = hc$ pour tout $h \in H$. Les éléments b et c ainsi définis sont uniques, puisque H est réducteur. Tout complexe r-intérieur est contenu dans l'intérieur de D, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in D$ tels que $xD = Dx$. Nous désignerons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des complexes r-intérieurs de D et nous l'appellerons le r-intérieur de D.

Théorème 1. - S'il n'est pas vide, le r-intérieur $\mathcal{F}$ du demi-groupe réductif D est un sous-demi-groupe unitaire du demi-groupe $\mathcal{E}$ des complexes réducteurs de D. Pour tout couple H, $K \in \mathcal{F}$, il existe un couple H_1, $K_1 \in \mathcal{F}$ tels que l'on ait $HK = KH_1 = K_1H$.

Rappelons qu'un sous-demi-groupe S d'un demi-groupe T est unitaire à droite dans T si les relations $xs \in S$, $s \in S$, $x \in T$ entraînent $x \in S$. Un sous-demi-groupe est unitaire dans T s'il est unitaire des deux côtés.

Soient alors $H \in \mathcal{F}$, $K \in \mathcal{F}$. Le complexe HK est réducteur. Si $a \in D$, il existe b et c tels que l'on ait $ka = bk$ pour tout $k \in K$ et $hb = ch$ pour tout $h \in H$. D'où $hka = hbk = chk$ pour tout $hk \in HK$. On montre de même qu'il existe d vérifiant $ahk = hkd$ pour tout $hk \in HK$. Donc $HK \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{E}$.

Soit $MN \in \mathcal{F}$, avec $M \in \mathcal{E}$, $N \in \mathcal{F}$. Il existe b_1 et c_1 tels que l'on ait $amn = mnb_1$ et $nb_1 = c_1n$ pour tout $m \in M$, $n \in N$. D'où $amn = mc_1n$ et, puisque N est réducteur, $am = mc_1$ pour tout $m \in M$. D'autre part, il existe b_2 et c_2 tels que l'on ait $an = nb_2$ et $mnb_2 = c_2mn$ pour tout $m \in M$, $n \in N$. D'où $man = mnb_2 = c_2mn$ et $ma = c_2m$ pour tout $m \in M$. Donc $M \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est unitaire à droite. On montre de même que $\mathcal{F}$ est unitaire à gauche.

Soit H_1 l'ensemble des éléments h_1 de D pour lesquels il existe $h \in H$ vérifiant $hk = kh_1$ pour tout $k \in K$. On a $HK = KH_1$ et KH_1 est réducteur. Donc H_1 est réducteur à gauche. Soit $ah_1 = bh_1$ pour tout $h_1 \in H_1$. On a, pour tout $k \in K$, $kah_1 = kbh_1$ et il existe a' et b' tels que $ka = a'k$, $kb = b'k$. D'où $a'kh_1 = b'kh_1$, $a' = b'$, $ka = kb$ et $a = b$. Donc H_1 est réducteur. Comme $KH_1 \in \mathcal{F}$, $K \in \mathcal{F}$ et $H_1 \in \mathcal{E}$, on a $H_1 \in \mathcal{F}$. On montre de même l'existence de $K_1 \in \mathcal{F}$ tel que l'on ait $HK = K_1H$.

Si le centre Z de D (ensemble des éléments de D permutables avec chaque élément de D) n'est pas vide, l'ensemble $\mathcal{G}$ des complexes réducteurs contenus dans Z est, s'il n'est pas vide, un sous-demi-groupe de $\mathcal{F}$. L'ensemble $\mathcal{G}$ sera appelé le <u>r-centre</u> de D.

<u>Proposition 3</u>. <u>Si α est un automorphisme de D, le complexe H est r-intérieur si et seulement si $\alpha(H)$ est r-intérieur.</u>

Si H est r-intérieur, $\alpha(H)$ est réducteur d'après la proposition 1 et la proposition symétrique. Si $a \in D$, il existe a' tel que $a = \alpha(a')$ et b et c tels que $ha' = bh$ et $a'h = hc$ pour tout $h \in H$. D'où
$\alpha(ha') = \alpha(h)a = \alpha(bh) = \alpha(b)\alpha(h)$, $\alpha(a'h) = a\alpha(h) = \alpha(hc) = \alpha(h)\alpha(c)$
pour tout $\alpha(h) \in \alpha(H)$. Donc $\alpha(H)$ est r-intérieur.

Inversement, si $\alpha(H)$ est r-intérieur, H est réducteur. Il existe b'

et c' tels que $\alpha(h)\alpha(a) = b'\alpha(h)$ et $\alpha(a)\alpha(h) = \alpha(h)c'$ pour tout $h \in H$. Si $b' = \alpha(b)$ et $c' = \alpha(c)$, on a $\alpha(ha) = \alpha(bh)$ et $\alpha(ah) = \alpha(hc)$. D'où $ha = bh$ et $ah = hc$ pour tout $h \in H$ et H est r-intérieur.

2.- Automorphismes intérieurs.

Soit D un demi-groupe réductif dont le r-intérieur $\mathcal{F}$ n'est pas vide, et soit $H \in \mathcal{F}$. La correspondance $a \longrightarrow b$ définie par $ha = bh$ pour tout $h \in H$ est une application biunivoque de D sur D. C'est de plus un automorphisme de D. En effet, si $a' \longrightarrow b'$, on a $ha' = b'h$ pour tout $h \in H$. D'où $haa' = bha' = bb'h$ pour tout $h \in H$. Nous désignerons par α_H cet automorphisme et nous dirons que c'est un <u>automorphisme intérieur de première catégorie</u>. L'application inverse $b \longrightarrow a$ définie par $bh = ha$ pour tout $h \in H$ est aussi un automorphisme de D que nous appellerons <u>automorphisme intérieur de deuxième catégorie</u> et que nous désignerons par β_H.

La notion d'automorphisme intérieur de première ou deuxième catégorie dans un demi-groupe réductif D coïncide, lorsque D est un semi-groupe, avec la notion d'automorphisme intérieur de première ou deuxième catégorie introduite par P. Dubreil ([4], ch. II) dans cette catégorie de demi-groupes. Lorsque D est un groupe, on retrouve la notion classique d'automorphisme intérieur.

Rappelons quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite. Soit T un demi-groupe quelconque. Une équivalence R de T est régulière à droite si la relation $a \equiv b\ (R)$ entraîne $ax \equiv bx\ (R)$ pour tout $x \in T$. Une équivalence S de T est simplifiable à droite si la relation $ay \equiv by\ (S)$ entraîne $a \equiv b\ (S)$. On a les définitions symétriques. Si V est un complexe quelconque de T, on désigne par $V.\!\cdot a$ l'ensemble des éléments x de T tels que $ax \in V$ et par $V\cdot\!.a$ l'ensemble des éléments y de T tels que $ya \in V$. Au complexe V on peut associer l'équivalence principale à droite R_V et l'équivalence principale à gauche ${}_VR$ définies respectivement par
$a \equiv b\ (R_V) \Longleftrightarrow V.\!\cdot a = V.\!\cdot b$, $a \equiv b\ ({}_VR) \Longleftrightarrow V\cdot\!.a = V\cdot\!.b$.
Les équivalences R_V et ${}_VR$ sont respectivement régulière à droite et régulière à gauche. Le complexe V est net à droite dans T, si $V.\!\cdot a \neq \emptyset$ pour tout $a \in T$. Il est net, s'il est net à droite et à gauche. Le complexe V est fort dans T, si $V.\!\cdot a \cap V.\!\cdot b \neq \emptyset$ entraîne $V.\!\cdot a = V.\!\cdot b$. Il est équirésiduel dans T si $V.\!\cdot a = \emptyset$ entraîne $V\cdot\!. a = \emptyset$ et inversement.
Le complexe V est réversible, si, quels que soient $a, b \in V$, il existe $x, y, z, t \in V$ vérifiant $ax = by$, $za = tb$.

Désignons par I_1 l'ensemble des automorphismes intérieurs de première catégorie et par I_2 l'ensemble des automorphismes intérieurs de deuxième catégorie de D.

Théorème 2. L'ensemble I_1 des automorphismes intérieurs de première catégorie de D est un semi-groupe homomorphe au r-intérieur $\mathcal{F}$ de D. L'équivalence régulière Σ définie par cet homomorphisme est simplifiable et, s'il n'est pas vide, le r-centre $\mathcal{G}$ de D est une classe mod Σ.

L'ensemble I_1 est sous-ensemble du groupe A des automorphismes de D. Si $\alpha_H \in I_1$ et $\alpha_K \in I_1$, on a $\alpha_H \alpha_K = \alpha_{HK}$. Par conséquent I_1 est un sous-demi-groupe de A ; comme A est un groupe, I_1 vérifie la règle de simplification, c'est donc un semi-groupe. En faisant correspondre à $H \in \mathcal{F}$ l'automorphisme $\alpha_H \in I_1$, nous voyons que I_1 est homomorphe à $\mathcal{F}$.

L'équivalence Σ est simplifiable, puisque I_1 est un semi-groupe. S'il n'est pas vide, le r-centre $\mathcal{G}$ est une classe mod Σ, car à tout $G \in \mathcal{G}$ correspond l'automorphisme identique, et inversement tout complexe r-intérieur engendrant l'automorphisme identique est un élément de $\mathcal{G}$.

Théorème 3. Le semi-groupe I_1 est un groupe si et seulement si $I_1 = I_2$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le r-centre $\mathcal{G}$ soit non vide et net dans $\mathcal{F}$. L'équivalence Σ coïncide alors avec l'équivalence principale à droite $R_{\mathcal{G}}$ définie dans $\mathcal{F}$ et on a l'isomorphisme $I_1 \simeq \mathcal{F}/R_{\mathcal{G}}$.

La première partie découle du fait que I_2 est l'ensemble des automorphismes inverses de ceux de I_1.

Si I_1 est un groupe, le r-centre $\mathcal{G}$ n'est pas vide et $\mathcal{G}$ est la classe-unité de l'équivalence Σ. Donc $\mathcal{G}$ est net dans $\mathcal{F}$. Comme Σ est régulière et simplifiable, on a, d'après un théorème de P. Dubreil ([4], th. 21), $\Sigma = R_{\mathcal{G}}$ et $I_1 \simeq \mathcal{F}/R_{\mathcal{G}}$.

Inversement, si $\mathcal{G}$ n'est pas vide, $\mathcal{G}$ est une classe mod Σ et un sous-demi-groupe de $\mathcal{F}$. Donc l'élément e de I_1 correspondant à cette classe est idempotent et par suite est élément-unité de I_1, car dans un semi-groupe un élément idempotent est toujours l'élément-unité. Si de plus $\mathcal{G}$ est net dans $\mathcal{F}$, l'élément e est net dans I_1 qui est alors un groupe.

Théorème 4. Tout demi-groupe T peut être plongé dans un demi-groupe réductif D tel que tout automorphisme de T soit induit sur T par un automorphisme intérieur de première catégorie de D.

Associons à T le demi-groupe T^* défini de la façon suivante : si T possède un élément-unité, $T = T^*$; sinon, T^* s'obtient à partir de T en lui adjoignant un élément-unité. Désignons par e l'élément-unité de T^*. Le demi-groupe T^* est réductif et isomorphe au demi-groupe Θ des translations à gauche de T^*. Soit A le groupe des automorphismes de T^*. Les demi-groupes A et Θ sont des sous-demi-groupes du demi-groupe P des applications de T^* dans lui-même. Désignons par D le sous-demi-groupe de P engendré par A et Θ. Le demi-groupe D est réductif, puisqu'il contient un élément-unité, l'automorphisme identique ε. Si $\alpha \in A$ et $\theta \in \Theta$, il existe $\theta' \in \Theta$ tel que l'on ait $\theta\alpha = \alpha\theta'$. En effet, si θ est la translation à gauche correspondant à $t \in T^*$, si $t = \alpha(t')$ et si θ' est la translation à gauche correspondant à t', on a $\theta\alpha(x) = t\alpha(x) = \alpha(t'x) = \alpha\theta'(x)$.

Comme $\varepsilon \in A \cap \Theta$, il résulte de ce qui précède que tout élément de D est de la forme $\alpha\theta$. Dans le demi-groupe D, les éléments α de A sont simplifiables, donc sont des complexes réducteurs de D. Ces éléments appartiennent de plus au r-intérieur de D. En effet, on a, si $\delta \in D$

$$\alpha . \delta = \alpha\delta\alpha^{-1} . \alpha \ , \qquad \delta . \alpha = \alpha . \alpha^{-1}\delta\alpha$$

Identifions maintenant dans le demi-groupe D les éléments de Θ avec les éléments correspondants de T^*. Les demi-groupes T et T^* sont plongés dans le demi-groupe réductif D. L'automorphisme α de T^* est induit sur T^* par l'automorphisme intérieur α_α de première catégorie de D défini par

$$\alpha_\alpha(\delta) = \delta' \longleftrightarrow \alpha\delta = \delta'\alpha$$

Si $T^* = T$, le théorème est démontré ; si $T \subset T^*$, le théorème découle du fait que tout automorphisme de T est induit sur T par un automorphisme de T^*.

3.- Relations de conjugaison et d'équiconjugaison.

Ces relations, introduites dans les semi-groupes par R. Croisot ([3]) peuvent être aussi définies dans les demi-groupes réductifs.

Nous considérons toujours un demi-groupe réductif D dont le **r-intérieur** $\mathcal{F}$ n'est pas vide. Un complexe Y de D est dit <u>conjugué à droite</u> d'un complexe X , s'il existe $H \in \mathcal{F}$ tel que l'on ait $\alpha_H(X) = Y$. Nous avons alors $\beta_H(Y) = X$ et X est dit <u>conjugué à gauche</u> de Y . Le r-normalisateur d'un complexe X est l'ensemble des éléments H de $\mathcal{F}$ tels que $\alpha_H(X) = X$. Nous le désignerons par $\mathcal{N}_X$. Si le r-centre $\mathcal{G}$ n'est pas vide, on a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{N}_X$.

Nous appelons <u>relation de conjugaison</u> la relation suivante définie dans D et notée $\mathcal{C}$:

$$a \,\mathcal{C}\, b \longleftrightarrow b \text{ est conjugué à droite de } a .$$

<u>Proposition 4</u>. <u>La relation $\mathcal{C}$ est transitive</u>.

Soient $a \,\mathcal{C}\, b$ et $b \,\mathcal{C}\, c$. Il existe H , $K \in \mathcal{F}$ tels que $\alpha_H(a) = b$, $\alpha_K(b) = c$. D'où $\alpha_{KH}(a) = \alpha_K \alpha_H(a) = c$.

Pour $a \in D$, on a $a \,\mathcal{C}\, a$ si et seulement si $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$. C'est immédiat. Donc

<u>Proposition 5</u>. <u>La relation $\mathcal{C}$ est une relation de préordre si et seulement si $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$ pour tout</u> $a \in D$.

C'est le cas en particulier lorsque le r-centre n'est pas vide.

<u>Théorème 5</u>. <u>Pour que $\mathcal{C}$ soit une relation d'équivalence, il faut et il suffit que le r-normalisateur $\mathcal{N}_a$ de a soit non vide et net à gauche dans $\mathcal{F}$ pour tout</u> $a \in D$.

Si $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence, $\mathcal{C}$ est réflexive et on a $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$ pour tout $a \in D$. Si $H \in \mathcal{F}$ et si $b = \alpha_H(a)$, on a $a \,\mathcal{C}\, b$ et $b \,\mathcal{C}\, a$. Il existe $K \in \mathcal{F}$ tel que $a = \alpha_K(b)$. D'où $\alpha_{KH}(a) = \alpha_K \alpha_H(a) = \alpha_K(b) = a$. Donc $KH \in \mathcal{N}_a$ qui est net à gauche.

Inversement, soit $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$ et net à gauche pour tout $a \in D$. D'après la proposition 5, la relation $\mathcal{C}$ est réflexive et transitive. Il faut montrer qu'elle est symétrique. Soit $a \,\mathcal{C}\, b$; il existe H , $K \in \mathcal{F}$ tels que $\alpha_H(a) = b$, c'est-à-dire $ha = bh$ pour tout $h \in H$, et $KH \in \mathcal{N}_a$, c'est-à-dire $kha = akh$ pour tout $h \in H$ et $k \in K$. D'où $kbh = akh$ et $kb = ak$ pour tout $k \in K$. Donc $\alpha_K(b) = a$ et $b \,\mathcal{C}\, a$.

La relation $\mathcal{C}$ est une équivalence en particulier lorsque le r-centre $\mathcal{G}$ n'est pas vide et est net à gauche dans $\mathcal{F}$.

La relation ρ_X d'équiconjugaison à droite du complexe X de D est définie dans le r-intérieur $\mathcal{F}$ par

$$H \ \rho_X \ K \Longleftrightarrow \alpha_H (X) = \alpha_K (X) \ .$$

Cette relation ρ_X est évidemment une équivalence.

Théorème 6. L'équivalence ρ_X est régulière à gauche et simplifiable à gauche. Les classes de $\mathcal{F}$ mod ρ_X correspondent biunivoquement aux différents complexes conjugués à droite de X .

Si $H \equiv K(\rho_X)$, on a $\alpha_H(X) = \alpha_K(X)$. Si $M \in \mathcal{F}$, on a alors $\alpha_M \alpha_H(X) = \alpha_{MH}(X) = \alpha_M \alpha_K(X) = \alpha_{MK}(X)$ et $MH \equiv MK(\rho_X)$.

Si $MH \equiv MK(\rho_X)$, on a $\alpha_{MH}(X) = \alpha_{MK}(X)$. D'où $\alpha_M \alpha_H(X) = \alpha_M \alpha_K(X)$, $\alpha_H(X) = \alpha_K(X)$ et $H \equiv K(\rho_X)$.

Au complexe Y conjugué à droite de X faisons correspondre la classe de $\mathcal{F}$ mod ρ_X constitué des éléments H de $\mathcal{F}$ tels que $\alpha_H(X) = Y$. Nous définissons ainsi une application biunivoque.

Théorème 7. S'il n'est pas vide, le r-normalisateur $\mathcal{H}_X$ du complexe X est un sous-demi-groupe unitaire et réversible de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{E}$. De plus, $\mathcal{H}_X$ est fort et équirésiduel dans $\mathcal{F}$; c'est une classe mod ρ_X et l'on a

$$\rho_X \subsetneq \mathcal{H}_X{}^R$$

où $\mathcal{H}_X{}^R$ est l'équivalence principale à gauche associée à $\mathcal{H}_X$. Si en outre $\mathcal{H}_X$ est net à gauche dans $\mathcal{F}$, on a

$$\rho_X = \mathcal{H}_X{}^R \ .$$

Soient H , $K \in \mathcal{H}_X$. De $\alpha_H(X) = X$ et $\alpha_K(X) = X$ suit $\alpha_{HK}(X) = \alpha_H \alpha_K(X) = \alpha_H(X) = X$. Donc $HK \in \mathcal{H}_X$ et $\mathcal{H}_X$ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{F}$.

Si $TH \in \mathcal{H}_X$ avec $T \in \mathcal{F}$, on a $\alpha_{TH}(X) = X = \alpha_T \alpha_H(X) = \alpha_T(X)$. Donc $T \in \mathcal{H}_X$. Si $HV \in \mathcal{H}_X$ avec $V \in \mathcal{F}$, on a $\alpha_{HV}(X) = X = \alpha_H \alpha_V(X)$, ce qui exige $\alpha_V(X) = X$ et $V \in \mathcal{H}_X$. Par conséquent, $\mathcal{H}_X$ est unitaire dans $\mathcal{F}$, et aussi dans $\mathcal{E}$, puisque $\mathcal{F}$ est unitaire dans $\mathcal{E}$ (th. 1).

D'après le théorème 1, il existe H_1 , $K_1 \in \mathcal{F}$ tels que $HK = KH_1 = K_1 H$. Mais $KH_1 = K_1 H \in \mathcal{H}_X$. D'où, puisque $\mathcal{H}_X$ est unitaire dans $\mathcal{F}$, $H_1 \in \mathcal{H}_X$, $K_1 \in \mathcal{H}_X$ et $\mathcal{H}_X$ est réversible.

Soit $\mathcal{H}_X \cdot\!\!\cdot\, T = \emptyset$ avec $T \in \mathcal{F}$. Si $V \in \mathcal{H}_X \cdot\!\!\cdot\, T$, on a $VT \in \mathcal{H}_X$. Il existe $V_1 \in \mathcal{F}$ tel que $VT = TV_1 \in \mathcal{H}_X$ et $V_1 \in \mathcal{H}_X \cdot\!\cdot\, T$, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{H}_X \cdot\!\cdot\, T = \emptyset$. On démontre de même l'inverse. Par conséquent, $\mathcal{H}_X$ est équirésiduel dans $\mathcal{F}$.

Le r-normalisateur $\mathcal{H}_X$ est évidemment une classe mod ρ_X. Comme ρ_X est régulière a gauche et simplifiable à gauche, on a, d'après un théorème de P. Dubreil ([4], th. 21), $\rho_X \subseteq \mathcal{H}_X^R$ et $\mathcal{H}_X$ est fort dans $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{H}_X$ est net à gauche, l'égalité $\rho_X = \mathcal{H}_X^R$ découle du même théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CROISOT , Holomorphies d'un semi-groupe. C.R. Acad. Sc., 227, 1948, p. 1134-1136.

[2] R. CROISOT , Autre généralisation de l'holomorphie dans un semi-groupe C.R. Acad. Sc., 227, 1948, p. 1194-1196.

[3] R. CROISOT , Automorphismes intérieurs d'un semi-groupe. Bull. Soc. Math. France, 82, 1954, p. 161-194.

[4] P. DUBREIL , Contribution à la théorie des demi-groupes, Mém. Acad. Sc. Inst. France, 63, 1941, p. 1-52.