

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

J. PETRESCO

Systèmes minimaux de relations fondamentales dans les groupes de rang fini

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 1, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES MINIMAUX DE RELATIONS FONDAMENTALESDANS LES GROUPES DE RANG FINI,

par J. PETRESCO.

-:-:-

Deux groupes étant définis par deux systèmes de générateurs et deux systèmes de relations fondamentales, le problème se pose de reconnaître s'ils sont isomorphes ou non : c'est ce que Kurosch [4] appelle le problème de l'isomorphie. Il s'agit en fait de développer une théorie des relations fondamentales, autrement dit une théorie des systèmes d'équations en une seule opération. Les résultats connus dans cette direction se réduisent à un théorème de Lévi [1] et à un théorème réciproque de Magnus [3], traitant de groupes libres et de systèmes minimaux de relations fondamentales. Nous nous proposons de généraliser la relation de Lévi-Magnus, aux groupes quelconques de rang fini.

1.- Construction des suites de générateurs.

Considérons un groupe G de rang fini, c'est-à-dire un groupe admettant une suite finie $\bar{A} = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ de générateurs. Soit d'autre part F , le groupe libre engendré par n éléments et notons $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ la suite de ses générateurs. D'après le théorème de Dyck, il existe un sous-groupe normal N de F tel que G soit isomorphe à F/N ; c'est l'ensemble des éléments de F qui correspondent à l'unité $1 \in G$ dans l'homomorphisme de G sur F établi par l'application $\bar{a}_i \rightarrow a_i$, $1 \leq i \leq n$. Pratiquons l'identification $G = F/N$, en posant $\bar{a}_i = a_i N$, et si $a \in F$, notons $\bar{a}$ la classe $aN \in G$.

1.1.- Si $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ est une m -suite de générateurs de G , et $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ une m -suite de représentants $x_j \in \bar{x}_j$, $1 \leq j \leq m$, il existe une n -suite $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ d'éléments de N , telle que

$$F = [X, \alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Si $G = [\bar{X}]$, $\bar{a}_i \in G$ entraîne

$$a_i N = \bar{a}_i = f(\bar{x}_j) = f(x_j N) = f(x_j) N, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où $f(\bar{x}_j)$ est un produit d'éléments de la forme $x_j^{\pm 1}$ de sorte que

$$a_i = f(x_j) \cdot \alpha_i, \quad \alpha_i \in N,$$

et en définitive $F = [a_1, \dots, a_u] = [x_1, \dots, x_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Si $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ est une m -suite de variables $v_j \in G$, considérons la m -suite $\varphi V = \{\varphi v_1, \dots, \varphi v_m\}$, définie par :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi v_j = v_j & ; j \neq j_0 \\ \varphi v_{j_0} = S_1(v_j) \cdot v_{j_0}^\varepsilon \cdot S_2(v_j), & \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$$

où $S_1(v_j)$ et $S_2(v_j)$ sont deux produits d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$ avec $j \neq j_0$. On a évidemment

$$(2) \quad [V] = [\varphi V]$$

car

$$(3) \quad v_{j_0} = [S_1^{-1}(v_j) \cdot \varphi v_{j_0} \cdot S_2^{-1}(v_j)]^\varepsilon = P_1(v_j) \cdot (\varphi v_{j_0})^\varepsilon \cdot P_2(v_j) = \\ = P_1(\varphi v_j) \cdot (\varphi v_{j_0})^\varepsilon \cdot P_2(\varphi v_j)$$

où $P_1(v_j)$ et $P_2(v_j)$ sont également des produits d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$ avec $j \neq j_0$.

Soit maintenant $\mathcal{G}_m(G)$ l'ensemble des m -suites $\bar{X}$ de générateurs de G . A chaque $\bar{X}$ on peut faire correspondre la m -suite $\varphi \bar{X}$, qui s'obtient à partir de φV en remplaçant v_j par $\bar{x}_j$, pour tout j ; d'après (2), $\varphi \bar{X}$ est également une m -suite de générateurs de G . La correspondance $\bar{X} \rightarrow \varphi \bar{X}$, détermine donc une application φ de $\mathcal{G}_m(G)$ dans lui-même, que nous appelons transformation simple. (3) implique qu'il s'agit en fait de transformations de $\mathcal{G}_m(G)$ sur lui-même et que l'inverse d'une transformation simple est une transformation simple. En définitive, l'ensemble $\mathcal{G}_m(G)$ des produits φ de transformations simples φ est un groupe que nous appelons groupe de Nielsen d'ordre m attaché à G .

Nous avons démontré dans un exposé précédent [5] que, dans le cas où G est un groupe libre, $\mathcal{G}_m(G)$ est transitif sur $\mathcal{G}_m(G)$.

Dans le cas d'un groupe quelconque G de rang fini, considérons l'ensemble $\mathcal{G}_{m+n}^1(G)$ des $(m+n)$ -suites de la forme

$$\bar{X}^1 = \{\bar{X}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_n\}$$

où $\bar{X}$ est une m -suite de générateurs de G .

1.2.- Le groupe de Nielsen $\mathcal{N}_{m+n}^1(G)$ est transitif sur $\mathcal{N}_{m+n}^1(G)$.

Considérons deux $(m+n)$ -suites de $\mathcal{N}_{m+n}^1(G)$, soit

$$\bar{X}^1 = \{\bar{X}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_n\}, \quad \bar{Y}^1 = \{\bar{Y}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{1}}_n\}$$

avec $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{N}_m(G)$. Si X et Y sont deux m -suites (d'éléments de F) composées avec des représentants $x_j \in \bar{x}_j$ et $y_j \in \bar{y}_j$ des classes appartenant à $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ respectivement, on peut, d'après 1.1, déterminer

$\alpha_i \in N$ et $\beta_i \in N$ ($1 \leq i \leq n$), tels que

$$F = [X, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = [Y, \beta_1, \dots, \beta_n].$$

Le groupe de Nielsen $\mathcal{N}_{m+n}(F)$ étant transitif sur l'ensemble $\mathcal{N}_{m+n}(F)$ des $(m+n)$ -suites de générateurs de F , il existe donc une transformation

$\psi \in \mathcal{N}_{m+n}(F)$ telle que

$$(4) \quad \psi \{X, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{Y, \beta_1, \dots, \beta_n\}.$$

Si maintenant φ est une transformation simple $\in \mathcal{N}_{m+n}(F)$, c'est-à-dire une transformation de $\mathcal{N}_{m+n}(F)$ définie par (1), où les variables $v_j \in F$ et $1 \leq j \leq m+n$, considérons la transformation $\bar{\varphi}$ de $\mathcal{N}_{m+n}(G)$, définie par (1) où l'on a remplacé v_j par $\bar{v}_j \in G$ et qui est évidemment une transformation simple $\in \mathcal{N}_{m+n}(G)$. On a

$$\bar{\varphi} \bar{v}_j = \bar{v}_j = \overline{\varphi v_j}, \quad j \neq j_0$$

$$\bar{\varphi} \bar{v}_{j_0} = S_1(\bar{v}_j) \cdot \bar{v}_{j_0}^{\epsilon} \cdot S_2(\bar{v}_j) = \overline{S_1(v_j) \cdot v_{j_0}^{\epsilon} \cdot S_2(v_j)} = \overline{\varphi v_{j_0}}$$

c'est-à-dire, pour tout j ,

$$(5') \quad \bar{\varphi} \bar{v}_j = \overline{\varphi v_j}.$$

Plus généralement, on peut attacher à chaque $\psi = \varphi_r \dots \varphi_1 \in \mathcal{N}_{m+n}(F)$, la transformation $\bar{\psi} = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_1 \in \mathcal{N}_{m+n}(G)$ et l'on a d'après (5'),

$$(5) \quad \bar{\psi} \bar{v}_j = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_1 \bar{v}_j = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_2 \overline{\varphi_1 v_j} = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_3 \overline{\varphi_2 \varphi_1 v_j} = \overline{\varphi_r \dots \varphi_1 v_j} = \overline{\psi v_j}.$$

On a par conséquent, en appliquant (5), dans le cas de $\bar{\psi} \in \mathcal{N}_{m+n}(G)$ attachée à la transformation $\psi \in \mathcal{N}_{m+n}(F)$ de (4)

$$\bar{\psi} \bar{x}_j = \overline{\psi x_j} = \bar{y}_j, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$\bar{\psi} \bar{1} = \bar{\psi} \bar{\alpha}_i = \overline{\psi \alpha_i} = \bar{\beta}_i = \bar{1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

et en définitive $\bar{\psi} \bar{X}^1 = \bar{Y}^1$.

On peut, en utilisant 1.2, construire à partir d'une suite de générateurs de G , toute autre suite de générateurs.

L'utilisation de la représentation de G comme groupe quotient F/N de F est nécessaire uniquement pour la démonstration de 1.2, de sorte que désormais nous pourrions noter les éléments de G par $a, x, y, v, \dots$ au lieu de $\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \dots$ et de même les suites d'éléments par $A, X, Y, V, \dots$

2.- Transformation des relations par le groupe de Nielsen.

2.1- $V = \{v_j\}$, $1 \leq j \leq m$, étant une m -suite de variables appartenant à G et $\psi \in \mathcal{G}_m(G)$, on peut associer à chaque j un produit $f_j(v_k)$, $1 \leq k \leq m$, d'éléments de la forme v_k^{+1} tel que

$$\psi v_j = f_j(v_k) .$$

Si ψ est une transformation simple on a évidemment, d'après (1),

$$\psi v_j = f'_j(v_h) , \quad 1 \leq h \leq m .$$

D'autre part si la propriété est valable pour tout produit de r transformations simple et si nous considérons $\psi = \psi_{r+1} \psi_r \dots \psi_1$, on a d'après l'hypothèse

$$\psi_r \dots \psi_1 v_h = f''_h(v_k) , \quad 1 \leq k \leq m ,$$

et par conséquent

$$\psi v_j = \psi_{r+1} \cdot \psi_r \dots \psi_1 v_j = f'_j(\psi_r \dots \psi_1 v_h) = f'_j[f''_h(v_k)] = f_j(v_k) .$$

Notons $f_j^{-1}(v_k)$ le produit associé à ψ^{-1} et à chaque j , tel que

$$\psi^{-1} v_j = f_j^{-1}(v_k) .$$

Si maintenant $R(v_j)$, $1 \leq j \leq m$, est un produit d'éléments de la forme v_j^{+1} , nous appelons transformé par ψ de $R(v_j)$, le produit d'éléments de la forme $(\psi v_j)^{+1}$, suivant :

$$[R(v_j)]^\psi = R[f_j^{-1}(\psi v_k)] ;$$

on a

$$R(v_j) = R(\psi^{-1} \psi v_j) = R[f_j^{-1}(\psi v_k)] = [R(v_j)]^\psi .$$

donc

$$(6) \quad R(v_j) = 1 \iff [R(v_j)]^\psi = 1 ,$$

c'est-à-dire qu'une relation entre les éléments de V se transforme en une relation entre les éléments de ψV , qui lui est équivalente.

2.2.- Si $R_t(v_j) = 1$, $1 \leq t \leq s$, est un système de relations fondamentales pour V , $[R_t(v_j)]^\Psi = 1$ est un système de relations fondamentales pour ΨV ; si $R_t(v_j) = 1$ est minimal, $[R_t(v_j)]^\Psi = 1$ est également minimal.

a) D'après (6), si $R(\Psi v_j) = 1$ est une relation entre les éléments de ΨV , $[R(\Psi v_j)]^\Psi = 1$ est une relation entre les éléments de V et si $R_t(v_j) = 1$ est un système de relations fondamentales pour V

$$R_t(v_j) = 1 \longrightarrow [R(\Psi v_j)]^\Psi = 1,$$

mais alors, toujours d'après (6)

$$[R_t(v_j)]^\Psi = 1 \longrightarrow R(\Psi v_j) = 1.$$

b) Si $R_t(\Psi v_j) = 1$, $1 \leq t' \leq s'$, $s' < s$ est un système de relations fondamentales pour ΨV , $[R_t(\Psi v_j)]^\Psi = 1$ est d'après a), un système de relations fondamentales pour V , ce qui contredit l'hypothèse que $R_t(v_j) = 1$, $1 \leq t \leq s$, est minimal.

3.- Systèmes minimaux de relations.

X étant une m -suite de générateurs de G , notons $\rho(X) = m$, et soit $\sigma(X)$ le nombre des relations d'un système de relations fondamentales pour X . Considérons

$$X^1 = \{X, \underbrace{1, \dots, 1}_n\} \in \mathcal{G}_{m+n}^1(G)$$

autrement dit la $(m+n)$ -suite de générateurs de G :

$$X^1 = \{X, \xi_1, \dots, \xi_n\} \text{ avec les relations } \xi_1 = 1, \dots, \xi_n = 1.$$

Si $R_t(x_j) = 1$, $1 \leq t \leq \sigma(X)$, est un système minimal de relations fondamentales pour X ,

$$R_t(x_j), 1 \leq t \leq \sigma(X); \xi_i = 1, 1 \leq i \leq n,$$

est un système minimal de relations fondamentales pour X^1 .

Si maintenant $\Psi \in \mathcal{G}_{m+n}^1(G)$

$$(7) \quad [R_t(x_j)]^\Psi = 1, (\xi_i)^\Psi = 1$$

constitue, d'après 2.2, un système minimal de relations fondamentales pour ΨX^1 . Supposons que Ψ soit telle que

$$\Psi \xi_i = 1, 1 \leq i \leq n;$$

ΨX est alors une m -suite de générateurs de G . Soit $R'_t(\Psi x_j) = 1$, $1 \leq t' \leq \sigma(\Psi X)$ un système minimal de relations fondamentales pour ΨX . Il s'ensuit que

$$R'_t(\Psi x_j) = 1, \Psi \xi_i = 1$$

est un système minimal de relations fondamentales pour ψX^1 et comme il en est de même pour (7), on déduit $\sigma(X) + n = \sigma(\psi X) + n$, et par conséquent

$$(8) \quad \sigma(\psi X) = \sigma(X)$$

3.1.- Le nombre $\sigma(X)$ est le même pour toute m-suite de générateurs de G

Si en effet $Y^1 = \{Y, 1, \dots, 1\}$ est une suite quelconque de $\mathcal{G}_{m+n}^1(G)$, il existe d'après 1.2, $\psi \in \mathcal{G}_{m+n}^1(G)$ telle que $\psi X^1 = Y^1$, et puisque $\psi \xi_i = 1$, $1 \leq i \leq n$, on a d'après (8), $\sigma(Y) = \sigma(\psi X) = \sigma(X)$.

Soit maintenant $r(G)$ le rang de G , c'est-à-dire le nombre d'éléments d'une suite minimale de générateurs de G , soit $A = \{a_1, \dots, a_{r(G)}\}$ et $s(G)$, le nombre de relations d'un système minimal de relations fondamentales pour A , qui d'après 3.1, est le même quelle que soit la $r(G)$ -suite de générateurs de G .

3.2.- Quelle que soit la suite X de générateurs de G on a

$$\rho(X) - \sigma(X) = r(G) - s(G).$$

Considérons en effet la $\rho(X)$ -suite

$$A_{\rho(X)} = \{a_1, \dots, a_{r(G)}, \xi_{r(G)+1}, \dots, \xi_{\rho(X)}\}$$

de générateurs de G , avec $\xi_{r(G)+1} = 1, \dots, \xi_{\rho(X)} = 1$. Si $R_t(a_j) = 1$, $1 \leq j \leq s(G)$, est un système minimal de relations fondamentales pour A ,

$$R_t(a_j) = 1, \xi_{r(G)+1} = 1, \dots, \xi_{\rho(X)} = 1$$

est un système minimal de relations fondamentales pour $A_{\rho(X)}$ de sorte qu'en appliquant 3.1 on a

$$\sigma(X) = s(G) + \rho(X) - r(G),$$

d'où 3.2.

Si $\sigma(X)$ est infini, 3.2 reste valable, car on sait que dans ce cas, G ne peut pas être défini avec un système fini de relations fondamentales. B.H. Neumann [2] a donné un exemple de groupe de cette espèce.

Dire que G est libre équivaut à poser $s(G) = 0$, de sorte qu'on déduit comme cas particulier de 3.2 :

Théorème de Levi [1]. Si G est un groupe libre, on a pour toute suite de générateurs X , $\rho(X) - \sigma(X) = r(G)$.

Théorème de Magnus [3]. Si pour une certaine suite de générateurs X , on a $\rho(X) - \sigma(X) = r(G)$, G est un groupe libre.

Références.

- [1] . F. LEVI, Math. Z., 37 (1933) , p. 315-318.
 - [2] . B.H. NEUMANN, J. London math. Soc., 12 (1937) , p. 120-127.
 - [3] . W. MAGNUS, Monatsh. Math. Phys., 47 (1939) , p. 307-313.
 - [4] . A.G. KUROSCH, Gruppentheorie, Berlin 1953.
 - [5] . J. PETRESCO, Séminaire P. Dubreil 1954/55, exposé n° 23.
-