Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Saunders Maclane

Quelques théorèmes et problèmes sur le groupe des extensions des groupes abéliens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 23, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A17_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956
-:-:-:-

7 mai 1956

Exposé n° 23

QUELQUES THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LE GROUPE DES EXTENSIONS DES GROUPES ABÉLIENS

par Saunders MACLANE*

* This research was supported in part by the United States Air Force through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command

Tous les groupes que nous considèrerons sont des groupes abéliens, avec addition comme opération.

1.- Constructions élémentaires sur les extensions.

Une extension E des groupes abéliens est une suite exacte de groupes A, B, C, et d'homomorphismes λ, μ, de la forme,

$$E: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\mu} C \longrightarrow 0 \quad . \tag{1.1}$$

La demande que cette suite soit exacte équivaut à la demande que les deux applications induites

$$\lambda_* : A \longrightarrow \lambda A , \quad \mu_* : B/\lambda A \longrightarrow C$$

soient des isomorphismes (isomorphisme = isomorphisme sur). L'extension E de (1.1) s'appelle aussi une extension de A par C . (notez bien que l'utilisation des mots "de" et "par" dans cette phrase n'est pas invariant sous les changements d'auteur)

Soit $E': 0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$ une deuxième extension. Un homomorphisme de E dans E' est donné par un triple (α, β, γ) d'homomorphismes $\alpha : A \longrightarrow A'$, $\beta : B \longrightarrow B'$, $\gamma : C \longrightarrow C'$ de groupes de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} E: & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow \\ E': & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1.2}$$

soit commutatif. Si $A = A'$, $C = C'$, et si $\alpha = I_A$ et $\gamma = I_C$ sont les applications identiques de A (resp. C), un tel homomorphisme s'appelle une équivalence de E à E' . Une telle équivalence $E \simeq E'$ est déterminée par

l'application $\beta : B \longrightarrow B'$, et cette application est nécessairement un isomorphisme. Le symbole E de (1.1) désignera désormais aussi la classe d'équivalence de cette extension (1.1). L'ensemble de toutes les classes d'équivalence des extensions de A par C sera désigné par

$$\text{ext}\ (C\ ,\ A)\ .$$

Les éléments d'un groupe A seront notés a , a_1 , a_2 , etc. ; de même c pour un élément de C. La somme directe A + C est (comme toujours) l'ensemble des paires (a , c) avec l'addition usuelle. Les applications $a \longrightarrow (a\ ,\ 0)$ et $(a\ ,\ c) \longrightarrow c$ sont des homomorphismes, et donnent l'extension appelée triviale :

$$E_0 : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow A+C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad . \tag{1.3}$$

Nous utiliserons trois constructions fondamentales pour les extensions.

1.1.- Pour chaque extension E de la forme (1.1) et pour chaque homomorphisme $\alpha : A \longrightarrow A'$ des groupes, il existe une extension E' de A' par C et un homomorphisme $(\alpha\ ,\ \beta\ ,\ I_C) : E \longrightarrow E'$. La classe de E' est déterminée d'une façon unique ; nous la notons

$$E' = \alpha \vee E \tag{1.4}$$

Démonstration.

Etant donné l'extension E et l'homomorphisme $\alpha : A \longrightarrow A'$, l'application $\sigma : A \longrightarrow A' + B$ définie par $a \longrightarrow (\alpha a\ ,\ -\lambda a)$ est un monomorphisme (mono = noyau zéro). Mettons $B' = (A' + B)/\sigma A$. Les applications $A' \longrightarrow A' + B$ et $A' + B \longrightarrow C$ définies par $a' \longrightarrow (a'\ ,\ 0)$ (resp. (a', b)) $\longrightarrow b$ induisent des homomorphismes

$$\lambda' : A' \longrightarrow B' \quad , \qquad \text{resp.} \quad \mu' : B' \longrightarrow C \ .$$

On peut démontrer sans peine que la suite $E' : 0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ qui en résulte est exacte. L'application $B' \longrightarrow A' + B$ définie par $b \longrightarrow (0\ ,\ b)$ induit un homomorphisme $\beta : B \longrightarrow B'$. On peut démontrer que $(\alpha\ ,\ \beta\ ,\ I_C) : E \longrightarrow E$ est bien un homomorphisme des extensions.

Soit $E'' : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\lambda''} B'' \xrightarrow{\mu''} C \longrightarrow 0$ encore une extension de A' par C telle qu'il existe un homomorphisme $(\alpha\ ,\ \beta''\ ,\ I) : E \longrightarrow E''$. L'application $A' + B \longrightarrow B''$ définie par $(a'\ ,\ b) \longrightarrow \lambda'' a' + \beta'' b$ induit un homomorphisme $\theta : B' \longrightarrow B''$, si $I'_A : A' \longrightarrow A'$ et $I_C : C \longrightarrow C$ désignent les applications identiques, on peut démontrer que $(I'_A\ ,\ \theta\ ,\ I_C)$ est

un homomorphisme $E' \longrightarrow E''$ des extensions. Notons aussi (comme complément à l'unicité) que l'on a la commutativité

$$\beta'' = \theta \circ \beta : B \longrightarrow B'' , \tag{1.5}$$

ce qui veut dire que la paire (E' , β) est unique à l'équivalence θ près. Pour le composé $\alpha' \circ \alpha$ de deux homomorphismes $\alpha : A \longrightarrow A'$ et $\alpha' : A \longrightarrow A''$ on a bien l'équivalence des extensions

$$(\alpha' \circ \alpha) \vee E \simeq \alpha' \vee (\alpha \vee E) \tag{1.6}$$

De plus, $E \simeq E_1$, donne $\alpha \vee E \simeq \alpha \vee E_1$.

1.2.- Pour chaque extension E de la forme (1) et pour chaque homomorphisme $\delta : C'' \longrightarrow C$ il existe une extension E'' de A par C'' et un homomorphisme $(I , \beta , \delta) : E'' \longrightarrow E$. La classe de E'' est déterminée d'une façon unique ; nous la notons

$$E'' = E \vee \delta \quad . \tag{1.7}$$

Démonstration.

Si l'on regarde E comme "fibré" sur la base C , la construction du fibré induit par l'application $\delta : C'' \longrightarrow C$. Etant donné l'extension E et l'application δ , l'application $\rho : B + C'' \longrightarrow C$ définie par $(b , c'') \longrightarrow \mu b - \delta c''$ est un homomorphisme ; notons par B'' son noyau. Les applications $A \longrightarrow B + C''$ et $B'' \longrightarrow C''$ définies par $a \longrightarrow (\lambda a , 0)$ et $(b , c'') \longrightarrow \mu b = \delta c''$ induisent donc des homomorphismes

$$\lambda'' : A \longrightarrow B'' \qquad (\text{resp. } \mu'' : B'' \longrightarrow C'')$$

La suite $E'' : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B'' \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ ainsi définie est exacte, et l'homomorphisme $\beta : B'' \longrightarrow B$ défini par $(b , c'') \longrightarrow b$ donne bien un homomorphisme des extensions $(I , \beta , \delta) : E'' \longrightarrow E$.

Soit E' une autre extension de A par C'' telle qu'il existe un homomorphisme $(I , \beta' , \delta) : E' \longrightarrow E$. L'application $\theta : B' \longrightarrow B''$ définie par $b' \longrightarrow (\beta' b' , \mu' b') \in B''$ donne une équivalence $E' \longrightarrow E''$, qui démontre alors l'unicité de la construction E'' . On a aussi la propriété

$$\beta' \circ \theta = \beta : B'' \longrightarrow B$$

(ce qui veut dire que la paire (E'' , β) est unique à l'isomorphisme θ près).

Pour le composé $\delta \circ \delta'$ de deux homomorphismes on a aussi l'équivalence

$$E \vee (\delta \circ \delta') \simeq (E \vee \delta) \vee \delta' \tag{1.8}$$

De plus, $E \simeq E_1$ implique $E \vee \delta \simeq E_1 \vee \delta$, et l'on a la loi associative

(1.9) $$(\alpha \vee E) \vee \delta \simeq \alpha \vee (E \vee \delta) .$$

1.3.- La troisième construction est la <u>somme directe</u> des extensions. Soient $\lambda : A \longrightarrow B$ et $\lambda_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ deux homomorphismes. Leur somme $\lambda + \lambda_1 : A + A_1 \longrightarrow B + B_1$ est l'application donnée par

$$(\lambda + \lambda_1)(a , a_1) = (\lambda a , \lambda_1 a_1) \quad a \in A , \quad a_1 \in A_1 .$$

Soient E et E_1 deux extensions de la forme (1). Leur somme directe est la suite exacte formée des sommes directes des groupes (resp. des homomorphismes)

$$E + E_1 : 0 \longrightarrow A + A_1 \xrightarrow{\lambda+\lambda_1} B + B_1 \xrightarrow{\mu+\mu_1} C + C_1 \longrightarrow 0 .$$

Si $E \simeq E'$ on a $E + E_1 \simeq E' + E_1$, etc. Si $\delta : C'' \longrightarrow C$ et $\delta_1 : C_1'' \longrightarrow C_1$ sont des homomorphismes, on a une équivalence des extensions

(1.10) $$(E + E_1) \vee (\delta + \delta_1) \simeq E \vee \delta + E_1 \vee \delta_1 ,$$

et de même pour l'opération de l'autre côté.

2.- <u>Le groupe des extensions</u>.

Pour des groupes A et C donnés, ext (C , A) est aussi un groupe. Pour la définition de sa loi de composition, on utilise l'application <u>diagonale</u> de C

(2.1) $$\Delta : C \longrightarrow C + C , \qquad \Delta c = (c , c)$$

et l'application <u>codiagonale</u> de A .

(2.2) $$\nabla : A + A \longrightarrow A \qquad \nabla(a , a_1) = a + a_1$$

Le composé $E \oplus E'$ de deux extensions E , E' de A par C est maintenant défini par la formule

$$E \oplus E' = \nabla \vee (E + E') \vee \Delta ;$$

c'est aussi une extension de A par C , et sa classe d'équivalence est déterminée par les classes de E et de E' .

Avec cette opération $\oplus$ (appelée "produit" de Baer), ext (C , A) devient un groupe abélien. L'élément neutre du groupe est l'extension triviale définie dans (1.3). La loi associative pour l'addition $\oplus$ est une conséquence de la règle (1.10) et de sa duale, et des lois associatives

$$(\Delta + I_C) \circ \Delta = (I_C + \Delta) \circ \Delta : C \longrightarrow C + C + C$$

$$\nabla \circ (\nabla + I_A) = \nabla \circ (I_A + \nabla) : A + A + A \longrightarrow A$$

pour les applications diagonales et codiagonales. La loi commutative résulte des faits que $\sigma \circ \Delta = \Delta$ et $\nabla \circ \sigma = \nabla$, où $\sigma : E + E' \longrightarrow E' + E$ est la symétrie définie pour toute somme directe $E + E'$ par $\sigma(e , e') = (e' , e)$. La classe inverse de E est $\tau \vee E$, où $\tau : A \longrightarrow A'$ est l'application $\tau(a) = -a$.

Il existe aussi une méthode cohomologique pour la définition de ce groupe ext (C , A). Dans chaque extension (1), un <u>représentant</u> d'un élément $c \in C$ est un élément $u = u(c) \in B$ tel que $\mu u = c$. Deux représentants de C différant par un élément de A. Si l'on a des représentants $u(c)$ pour tous les c, il en résulte une table d'addition

$$u(c) + u(c_1) = f(c , c_1) + u(c + c_1)$$

avec un "système de facteurs" $f(c , c_1) \in A$. Ces systèmes satisfont à des identités (sont des cocycles dans un certain complexe) ; la correspondance $E \longrightarrow \{$Classe de cohomologie de f dans ce complexe$\}$ est un isomorphisme.

Pour chaque homomorphisme $\gamma : C' \longrightarrow C$; la correspondance $E \longrightarrow E \vee \gamma$ donne un homomorphisme des groupes

$$\gamma^* : \text{ext } (C , A) \longrightarrow \text{ext } (C' , A') \ ;$$

on a $(\gamma_1 \circ \gamma_2)^* = \gamma_2^* \circ \gamma_1^*$. De même, $\alpha : A \longrightarrow A$ donne la correspondance $E \longrightarrow \alpha \vee E$ qui détermine un homomorphisme

$$\alpha_* : \text{ext } (C , A) \longrightarrow \text{ext } (C , A').$$

On a le résultat que ext (C , A) est un foncteur des groupes A et C, covariant dans A et contravariant dans C.

Ce foncteur est analogue au foncteur hom (C , A) défini comme le groupe de tous les homomorphismes $f : A \longrightarrow C$, avec l'addition $(f + f')(c) = f(c) + f'(c)$.

3.- Les suites exactes.

Ces suites, fondamentales pour les propriétés du foncteur ext, reposent sur le lemme suivant sur l'existence des épimorphismes (épi = homomorphismes <u>sur</u>).

3.1.- <u>Lemme</u>. Pour chaque homomorphisme $\tau : H \longrightarrow K$ de groupes abéliens, il existe un groupe $L \supset H$ et un épimorphisme $\sigma : L \longrightarrow K$ qui coïncide avec τ sur H, et qui a le même noyau que τ.

Diagramme.

Soit M l'image et S le noyau de τ . On a donc

(3.1)
$$\begin{array}{ccccc} & & K & \longrightarrow & K/M \\ & & \cup & & \cup \\ H & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \cup & & \cup & & \\ S & \longrightarrow & 0 & & \\ \cup & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

Le lemme dit, en effet qu'il est possible de compléter ce diagramme par l'adjonction d'un groupe L dans le coin gauche supérieur.

Démonstration.

Si K/M est le groupe cyclique infini Z , on met $L = H + Z$. Si K/M est un groupe cyclique fini, avec une classe $k + M$ d'ordre s comme générateur, on a $sk = m \in M = \tau H$, et il existe donc un élément $h_0 \in H$ avec $\tau h_0 = m$. Pour L on construit alors le groupe engendré par H et un élément u avec $su = h_0$. Si K/M est un groupe arbitraire, il est possible d'engendrer K/M par l'adjonction d'éléments successifs, donnant toujours des extensions cycliques. En appliquant l'induction transfinie, on a donc la construction voulue du groupe L .

Notez bien que cette propriété 3.1 , valable pour les groupes (modules sur l'anneau Z des entiers) n'est pas valable pour les modules sur un anneau arbitraire. Pour cette raison, les suites exactes sont beaucoup plus compliquées pour les extensions des modules arbitraires.

3.2.- Première suite exacte. Pour chaque suite exacte

$$E : \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\rho} S \xrightarrow{\sigma} T \longrightarrow 0$$

de groupes abéliens, et pour chaque groupe A l'on a une suite exacte

(3.2)
$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \hom(T, A) \xrightarrow{\sigma^*} \hom(S, A) \xrightarrow{\rho^*} \hom(R, A) \xrightarrow{\theta} \\ \xrightarrow{\theta} \operatorname{ext}(T, A) \xrightarrow{\sigma^*} \operatorname{ext}(S, A) \xrightarrow{\rho^*} \operatorname{ext}(R, A) \longrightarrow 0 , \end{aligned}$$

où l'application θ est définie pour un élément $f \in \hom(R, A)$ à l'aide de E par l'équation $\theta(f) = f \vee E$.

La démonstration, facile, sera omise ; le point principal est le fait que $\rho^* : \operatorname{ext}(S, A) \longrightarrow \operatorname{ext}(R, A)$ est un épimorphisme, fait qui résulte immédiatement du lemme 3.1 (Pour une extension $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\mu} R \longrightarrow 0$ donnée, appliquez le lemme avec τ remplacé par $\rho \circ \mu$).

Dans ce théorème, l'application θ donne pour chaque $f : R \longrightarrow A$ l' "obstruction" $\theta(f)$ à l'extension de θ à un homomorphisme de S dans A.

3.3.- Deuxième suite exacte. Pour chaque suite exacte

$$F : \quad 0 \longrightarrow G \xrightarrow{\omega} H \xrightarrow{\delta} K \longrightarrow 0$$

des groupes abéliens et pour chaque groupe C, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \hom(C, G) \xrightarrow{\omega_*} \hom(C, H) \xrightarrow{\delta_*} \hom(C, K) \xrightarrow{\varphi}$$
$$\xrightarrow{\varphi} \operatorname{ext}(C, G) \xrightarrow{\omega_*} \operatorname{ext}(C, H) \xrightarrow{\delta_*} \operatorname{ext}(C, K) \longrightarrow 0 .$$

où l'application φ est définie pour un élément $g \in \hom(C, K)$ à l'aide de F, par $\varphi(g) = F \vee g$.

Cette application $\varphi(g)$ donne en effet l'obstruction à un relèvement de l'application $g : C \longrightarrow K$ à un homomorphisme de H dans K. La démonstration, que le dernier δ_* est un épimorphisme, utilise toujours le même lemme 3.1.

En appliquant le fait élémentaire que $\operatorname{ext}(Z, A) = 0$ (toute extension par un groupe cyclique infini est triviale) ces suites exactes démontrent que le foncteur ext est bien, pour des modules sur l'anneau Z des entiers, le même foncteur que le foncteur satellite ext_1^Z, introduit par Cartan-Eilenberg [1].

4.- Le Théorème de Nunke.

Dans sa thèse [7] à Chicago, R.J. Nunke démontrait le théorème suivant

4.1.- Théorème. Si A est un groupe abélien tel que $\hom(A, Z) = 0$ et $\operatorname{ext}(A, Z) = 0$, on a $A = 0$.

Notons que ce théorème en réalité n'utilise pas les structures de groupe de hom et de ext ; une autre formulation sera : si chaque homomorphisme de A dans Z est trivial, et si chaque extension de Z par A est triviale, alors A est lui-même trivial.

Pour la démonstration nous utiliserons le lemme suivant : Posons $T(A) =$ groupe de torsion de A = groupe de tous les éléments d'ordre fini dans A.

4.2.- Lemme. Si $\operatorname{ext}(A, Z) = 0$, alors $T(A) = 0$.

Démonstration.

Soit $a \in A$ un élément d'ordre fini m, soit $Z_m = Z_m(e)$ le groupe

cyclique d'ordre m et de générateur e, et $\lambda : Z_m \longrightarrow A$ l'application définie par $\lambda e = a$. De la suite exacte $0 \longrightarrow Z_m \longrightarrow A \longrightarrow A/\lambda Z_m(e) \longrightarrow 0$ on désuit donc du paragraphe 3 la suite exacte :

$$\text{ext } (A , Z) \xrightarrow{\lambda^*} \text{ext } (Z_m , Z) \longrightarrow 0 .$$

Le groupe "ext" à gauche est bien zéro, par hypothèse. Mais si $m \neq 0$, le groupe "ext" à droite n'est pas zéro ; une extension non-triviale étant donnée par l'application $Z \longrightarrow Z_m$ définie par $1 \longrightarrow e$.

4.3.- Si $\text{ext } (A , Z) = \text{hom } (A , Z) = 0$, A est divisible.

Démonstration.

Par 4.2 l'on a $T(A) = 0$; donc pour chaque entier m l'application $\lambda a \longrightarrow ma$ donne une suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} A \longrightarrow A/mA \longrightarrow 0$. D'après 3.2, $\text{hom } (A , Z) \longrightarrow \text{ext } (A/mA , Z) \longrightarrow \text{ext } (A , Z) \longrightarrow \text{ext } (A , Z) \longrightarrow 0$ est exact. Par hypothèse, le premier et le troisième termes ici sont zéro, donc aussi le deuxième. Par le lemme 4.2 , $T(A/mA) = 0$. Mais chaque élément de A/mA a bien l'ordre fini m. Donc $A = mA$, et A est bien divisible.

On a maintenant A divisible avec $T(A) = 0$. Si $A \neq 0$ il existe donc un monomorphisme du groupe additif Q des nombres rationnels dans A. La suite exacte $0 \longrightarrow Q \longrightarrow A$ donne une suite exacte

$$\text{ext } (A , Z) \longrightarrow \text{ext } (Q , Z) \longrightarrow 0 ,$$

donc $\text{ext } (Q , Z) = 0$.

Mais ce résultat est absurde, parce que l'on peut bien construire une extension non-triviale de Z par Q. En effet, Q est engendré par les $q_n = 1/n$ avec les relations $(n + 1)q_n + 1 = q_n$, $n = 0 , 1 , \ldots ,$. Prenons une extension E engendrée par Z, et par les représentants u_n de q_n avec les relations

$$(n + 1)u_n = u_n - 1 .$$

Si cette extension était triviale, on aurait des représentants $v_n = u_n + k_n$, $k_n \in Z$, de sorte que $(n + 1)v_n = v_n$. Mais cela donne $k_n = 1 + (n + 1)k_{n+1}$ pour tout n, ce qui est impossible.

Le groupe $\text{hom } (A , Z)$ est analogue à un groupe "conjugué" de A.

Problème. Peut-on déterminer le groupe A par la donnée de $\text{hom } (A , Z)$ et de $\text{ext } (A , Z)$?

Pour les groupes A avec un nombre fini de générateurs la réponse est bien affirmative. En effet, chaque tel groupe est la somme directe de groupes cycliques, et l'on a pour la somme directe la règle, facile à démontrer,

$$(4.1) \qquad \text{ext } (A + A_1 , G) \tilde{=} \text{ext } (A , G) + \text{ext } (A_1 , G)$$

Pour un groupe Z cyclique infini, ext $(Z , G) = 0$, mais hom $(Z , G) = G$. Pour un groupe Z_m cyclique fini, hom $(Z_m , Z) = 0$, mais ext $(Z_m , Z) = Z_m$. En effet, on a pour chaque groupe G un isomorphisme

$$(4.2) \qquad \text{ext } (Z_m , G) \tilde{=} G/mG \ .$$

Démonstration.

Dans une extension

$$E : 0 \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow Z_m \longrightarrow 0 \ ,$$

et pour chaque $z \in Z_m$, on peut choisir un représentant $u \in B$. L'application $\varphi : Z_m \longrightarrow G/mG$ définie par $\varphi(z) = mu + mG$ est bien définie ; on vérifie facilement que la correspondance $E \longrightarrow \varphi$ donne l'isomorphisme (4.2) voulu.

Dans les prochaines sections nous donnerons des formules analogues mais plus compliquées pour le groupe ext (T , G) , T étant un groupe de torsion. Comme chaque tel groupe est somme directe de groupes p-primaires, il suffit, d'après (4.1) de prendre T comme groupe de torsion p-primaire (chaque élément a pour ordre une puissance du nombre premier p).

5.- Les extensions localement triviales.

Une extension

$$E : 0 \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

s'appelle localement triviale si pour chaque sous-groupe fini S de T , l'extension $E \vee j$ de G par S formée avec l'injection $j : S \longrightarrow T$ est triviale. Il revient au même de dire qu'il est possible de choisir pour chaque $t \in T$ d'ordre fini un représentant $u \in B$ du même ordre. L'ensemble de toutes les extensions localement triviales de G par T forment un sous-groupe $\text{ext}_f(T , G)$ de ext (T , G) . (cf. Eilenberg-MacLane [2]).

6.- Les suites doubles de groupes.

Dans la théorie des opérations de Bockstein pour les complexes, on est amené à considérer les "suites doubles". Une suite double (A , φ , ψ) de groupes

consiste dans la donnée des groupes A_n et des homomorphismes $\varphi_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ et $\psi_n : A_{n+1} \longrightarrow A_n$, pour $n = 1 , 2 , \dots , .$ Le diagramme est

$$(6.1) \qquad A_1 \underset{\psi_1}{\overset{\varphi_1}{\rightleftarrows}} A_2 \underset{\psi_2}{\overset{\varphi_2}{\rightleftarrows}} A_3 \quad \dots \quad A_n \underset{\psi_n}{\overset{\varphi_n}{\rightleftarrows}} A_{n+1} \quad \dots$$

Un homomorphisme $\alpha : (A , \varphi , \psi) \longrightarrow (A' , \varphi' , \psi')$ d'une telle suite dans une autre suite semblable consiste dans la donnée d'une famille d'homomorphismes $\alpha_n : A_n \longrightarrow A'_n$ tels que

$$(6.2) \qquad \varphi'_n \alpha_n = \alpha_{n+1} \varphi_n$$

$$(6.3) \qquad \alpha_n \psi_n = \psi'_n \alpha_{n+1}$$

Tous les homomorphismes α forment un groupe $\hom ((A , \varphi , \psi) , (A' , \varphi' , \psi'))$

Exemple 1.- Soit T un groupe de torsion p-primaire, pour un nombre p premier. On construit la suite double

$$(T_n , i , \pi) ,$$

où T_n est le sous-groupe de tous les $t \in T$ tels que $p^n t = 0$, $i : T_n \longrightarrow T_{n+1}$ l'application identique, et $\pi : T_{n+1} \longrightarrow T_n$ l'application qui provient de la multiplication par p .

Exemple 2.- Pour chaque groupe G et chaque nombre premier A on a la suite

$$(G/p^n G , \pi , j) ,$$

où $j : G/p^n G \longrightarrow G/p^{n+1} G$ est l'application $g + p^n G \longrightarrow pG + p^{n+1} G$, et où $j : G/p^{n+1} G \longrightarrow G/p^n G$ est bien l'application induite par l'identité.

Exemple 3.- Soit K un complexe de chaines, G un groupe de coefficients. Les groupes d'homologie $H(K , G/p^n G)$ avec les applications π_* , j_* induites forment une suite double qui entre dans l'étude des opérations de Bockstein.

7.- La structure de ext. pour les groupes primaires.

Nous donnons deux théorèmes (cf. [6]) :

7.1.- Théorème. Pour un groupe T p-primaire et un groupe G arbitraire, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{ext}_f(T , G) \longrightarrow \operatorname{ext}(T , G) \xrightarrow{\rho} \hom ((T_n , i , \pi) , (G/p^n G , \pi , j)) \longrightarrow 0$$

La partie essentielle est la définition de l'application ρ, qui fait correspondre à toute extension

(7.1) $$E : 0 \longrightarrow G \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\mu} T \longrightarrow 0$$

une suite $\rho(E) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ d'homomorphismes $\alpha_n : T_n \longrightarrow G/p^nG$. Si $t \in T_n$ a un représentant $u \in B$, alors $p^n u \in \lambda G$. L'on met

$$\alpha_n t = \lambda^{-1} p^n u + p^n G \in G/p^n G .$$

On démontre sans difficulté que cette convention donne un homomorphisme ρ.

Nous ne donnons pas les détails de la démonstration : le point le plus difficile est la démonstration que ρ est un épimorphisme.

Comme cas particulier citons un théorème de Eilenberg-MacLane.

7.2.- Corollaire. Pour un groupe T avec $pT = 0$,

$$\operatorname{ext}(T, G) \overset{\sim}{=} \hom(T, G/pG) .$$

La structure d'un groupe T p-primaire est connue dans le cas d'un groupe T dénombrable (cf. [4]). C'est bien connu qu'on utilise ici les sous-groupes p^nT, et le groupe des éléments de hauteur infinie,

$$p^\omega T = \bigcap_n p^n T$$

et les autres groupes $p^\alpha T$ pour α nombre ordinal. La limite inductive

$$G_\infty = \varprojlim (G/p^nG, \pi)$$

a comme éléments les suites $\{ g_n + p^nG \}$ qui jouissent de la propriété

$$pg_{n+1} \equiv g_n \pmod{p^nG} \qquad n = 1, 2, \dots, .$$

L'addition des suites est l'addition terme par terme. Il existe un homomorphisme naturel $\mathscr{H} : G \longrightarrow G_\infty$ définie par $\mathscr{H} g = \{ g + p^nG \}$. Si $G = Z$, G_∞ est bien le groupe additif des nombres p-adiques.

7.3.- Théorème. Si T est un groupe dénombrable p-primaire et G un groupe arbitraire, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{ext}(p^\omega T, p^\omega G) \xrightarrow{\sigma} \operatorname{ext}_f(T, G) \xrightarrow{\tau} \hom(pT, G_\infty/\mathscr{H}G) \longrightarrow 0 .$$

On note qu'on peut réappliquer le théorème 7.1 au premier terme de cette suite. Avec ce procédé de récursion, on a une sorte de détermination récursive de la structure de $\operatorname{ext}(T, G)$.

Pour la définition de τ , soit E de (7.1) une extension qui est localement triviale. Pour chaque $t \in p^\omega T$ et pour chaque entier n, il existe un élément $s_n \in T$ tel que $t = p^n s_n$. Si u et v_n sont des représentants dans E de t (resp. s_n), on a donc $u - p^n v_n \in \lambda G$, parce que (7.1) est exact. On met

$$(\tau E)(t) = \{ \lambda^{-1}(u - p^n V_n) + G/p^n G \} + \partial \mathcal{C} G \ .$$

On démontre que τ est un homomorphisme, et que le noyau N de τ consiste dans les extensions E de (7.1) avec les propriétés suivantes : (i) E est localement trivial ;

(ii) $\lambda : B \longrightarrow T$ induit un épimorphisme $p^\omega B \longrightarrow p^\omega T$. Pour chaque telle extension E , la suite

$$E^\omega : \ 0 \longrightarrow p^\omega G \longrightarrow p^\omega B \longrightarrow p^\omega T \longrightarrow 0$$

est exacte. La correspondance $E \longrightarrow E^\omega$ donne bien un homomorphisme

$$\sigma^{-1} : N \longrightarrow \text{ext}\ (p^\omega T\ ,\ p^\omega G) \ .$$

Nous ne donnons pas le reste de la démonstration. Notons seulement que la partie essentielle est la démonstration que σ^{-1} et τ sont des épimorphismes, qui utilise toute la structure connue des groupes primaires dénombrables.

Problème. En utilisant les résultats de Koulikoff pour les groupes non-dénombrables, peut-on trouver quelques résultats analogues ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN and S. EILENBERG, Homological Algebra. Princeton University Press, Princeton, à paraître en 1956.

[2] S. EILENBERG and S. MACLANE, Group extensions and homology. Annals of Mathematics, 43 (1942) p. 829-831.

[3] S. EILENBERG and S. MACLANE, On the groups $H(\pi, n)$, II . Annals of Mathematics, 60 (1954) p. 132.

[4] I. KAPLANSKY, Infinite abelian groups, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954.

[5] L. KOULIKOFF, On the theory of abelian groups of arbitrary power. Mat. Sbornik, 16 (1945) p. 129-162 (Russian with English summary)

[6] S. MACLANE, The group of abelian group extensions(abstract). Bull. Amer. math. Soc., 54 (1948) p. 53.

[7] R.J. NUNKE, The extension functor for Dedekind modulus. Thesis, University of Chicago, 1955.
