

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

J. PETRESCO

Un théorème de construction pour les relations fondamentales

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 19, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A13_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT

9 avril 1956

(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Exposé n° 19

Année 1955/56

-:-:-:-

UN THÉORÈME DE CONSTRUCTION POUR LES RELATIONS FONDAMENTALES,

par J. PETRESCO.

-:-:-:-

Définir un groupe G avec des générateurs et des relations fondamentales, revient d'après le théorème de Dyck, à :

- a) se donner un groupe libre $[[A]]$ par une base libre : $A = \{a_i\}$;
- b) se donner un sous-groupe normal $N_A[H]$ de $[[A]]$ par une de ses bases, en tant que sous-groupe normal : $H = \{h_k(a_i)\}$;
- c) considérer $[[A]]/N_A[H]$.

L'adaptation des procédés introduits dans [2], permet l'étude des bases H de $N_A[H]$ en étroite analogie avec les bases d'un groupe libre et finalement la construction, à partir d'un système de relations fondamentales concernant le système de générateurs A du groupe G , de tout autre système de relations fondamentales concernant A .

1.- A-groupe libre.

Considérons un groupe K et deux sous-ensembles A et B de ce groupe. Si $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ est une suite où l'on a, soit $r_i \in A \cup A^{-1}$ (ce seront les A-éléments de R), soit $r_i \in B \cup B^{-1}$ (ce seront les B-éléments de R), notons R_A et R_B les sous-suites de R obtenues en supprimant, soit les B-éléments, soit les A-éléments, respectivement. L'ensemble des produits $\bar{R}$ constitue le sous-groupe $[A, B]$; convenons de noter O , la suite vide, et écrivons $\bar{O} = 1$. Le sous-ensemble des $\bar{R}$ avec $\bar{R}_A = 1$ est un sous-groupe de $[A, B]$, que nous appelons le A-groupe engendré par B et notons $N_A[B]$.

1.1.- $N_A[B]$ est le sous-groupe normal engendré par B dans $[A, B]$.

D'après 1.2 de [1], le sous-groupe normal N engendré par B dans $[A, B] = [[A], [B]]$ est l'ensemble des $\prod a_i b_i$ avec $a_i \in [A]$, $b_i \in [B]$,

$\pi a_i = 1$; mais $a_i = \prod_j \alpha_{ij}$, $\alpha_{ij} \in A \cup A^{-1}$ et $b_i = \prod_k \beta_{ik}$, $\beta_{ik} \in B \cup B^{-1}$, de sorte qu'on peut écrire

$$\pi a_i b_i = \prod_i \left(\prod_j \alpha_{ij} \prod_k \beta_{ik} \right) = \bar{R}$$

et l'on a $\bar{R}_A = \prod_i \prod_j \alpha_{ij} = a_i = 1$, donc $\pi a_i b_i \in N_A[B]$, $N \subseteq N_A[B]$.

Réciproquement si $\bar{R} \in N_A[B]$, c'est-à-dire si $\bar{R}_A = 1$, on peut écrire

$$\bar{R} = \pi a_i b_i$$

où $a_i \in A \cup A^{-1} \cup 1 \subseteq [A]$, $b_i \in B \cup B^{-1} \cup 1 \subseteq [B]$, et dans ce cas $\bar{R}_A$ et πa_i ne diffèrent que par un nombre de facteurs égaux à 1 , de sorte que $\pi a_i = \bar{R}_A = 1$, donc $\bar{R} \in N$, $N_A[B] \subseteq N$.

Nous allons appeler A-suite d'éléments de $B \cup B^{-1}$, une suite R avec $\bar{R}_A = 1$; $\bar{R}$ sera, dans ces mêmes conditions, un A-produit et $\bar{R} = 1$, une A-relation entre les éléments de $B \cup B^{-1}$.

Un sous-groupe K^* de K sera dit A-groupe si tout A-produit R d'élément de K^* appartient à K^* .

Supposons maintenant que :

(1) Les ensembles A , A^{-1} , B , B^{-1} sont deux à deux disjoints.

1.2.- Si $\bar{R} = 1$ est une identité entre les éléments de $(A \cup B) \cup (A \cup B)^{-1}$, $\bar{R}_A = 1$ est une identité entre les éléments de $A \cup A^{-1}$.

Soit ρ la segmentation⁽¹⁾ concordante et unitaire qu'admet R . A chaque A-élément r_i de R on peut rattacher de façon univoque $S_\rho(r_i)$; posons, par exemple, $S_\rho(r_i) = S(r_i r_j)$, $S(r_i r_j) - R_B$ est un segment de R_A , et puisque d'après (1), on a $r_i \notin R_B$, $r_j = r_i^{-1} \notin R_B$, c'est un segment de mêmes extrémités que $S(r_i r_j)$. On déduit que $S_\rho(r_i) - R_B$ est, de même que $S_\rho(r_i)$, un segment unitaire, et que l'ensemble des $S_\rho(r_i) - R_B$ avec $r_i \in R_A$, de même que l'ensemble des $S_\rho(r_i)$ dans le cas de la suite R , une segmentation concordante de R_A .

Considérons les propositions :

(α) La A-relation $\bar{R} = 1$ est une identité.

(β) La A-relation $\bar{R} = 1$ est soit telle que $\omega(R) = 2$, soit telle que R contienne un A-segment $S \subset R$ avec $\bar{S} = 1$.

(1) pour les notations et les notions dont la définition n'est pas indiquée se reporter à [2].

On a $(\alpha) \implies (\beta)$, car si $\bar{R} = 1$ est une identité avec $\omega(R) \geq 3$ le cas $\omega(R) = 1$ est exclu par (1), et si r_i est un élément de R différent des extrémités, $S_\rho(r_i) \subset R$, et d'autre part $\bar{S}_\rho(r_i) = 1$ est une identité, donc d'après 1.2, $[S_\rho(r_i)]_A = 1$.

Notons (α_B) , (β_B) les propositions déduites de (α) , (β) en affirmant qu'elles sont valables pour toute A-relation $\bar{R} = 1$ entre les éléments de $B \cup B^{-1}$.

1.3.- On a l'équivalence $(\alpha_B) \iff (\beta_B)$.

Supposons qu'on ait (β_B) et, de plus, (α_B) pour toute A-relation $\bar{R} = 1$ avec $\omega(R) < n$. Si maintenant $\bar{R} = 1$ est une A-relation avec $3 \leq \omega(R) = n$, considérons le A-segment $S \subset R$ avec $\bar{S} = 1$ dont l'existence est assurée par (β_B) ; $\bar{S} = 1$ est une A-relation avec $\omega(S) < n$, donc, d'après l'hypothèse, une identité.

Posons d'autre part $T = R - S$; $\bar{R} = \bar{R}_A = 1$ et $\bar{S} = \bar{S}_A = 1$ entraînent $\bar{T} = \bar{T}_A = 1$, de sorte que $\bar{T} = 1$ est une A-relation avec $\omega(T) = n - \omega(S) < n$, donc également une identité.

Si ρ_S et ρ_T sont les segmentations concordantes et unitaires de S et T respectivement, on voit que les segments de R ayant les mêmes extrémités que ceux appartenant à ρ_S ou ρ_T , constituent une segmentation concordante et unitaire de R , c'est-à-dire que $\bar{R} = 1$ est une identité.

Par ailleurs, une relation $\bar{R} = 1$ avec $\omega(R) = 2$ est nécessairement une identité, de sorte que $(\beta_B) \implies (\alpha_B)$ est démontrée par récurrence.

Si (1) et (α_B) sont valables, on dira que B est un A-système libre, autrement dit :

(AL_α) . B est un A-système libre, si l'on a (1) et si les seules A-relations $\bar{R} = 1$ entre les éléments de $B \cup B^{-1}$ sont les identités.

Si B est un A-système libre, A et B sont des systèmes libres; en effet si $\bar{R} = 1$ est telle que R soit exclusivement constituée, soit de A-éléments, soit de B-éléments, on a

$$\bar{R}_A = \begin{cases} \bar{R} = 1 \\ \bar{0} = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\bar{R} = 1$ est une A-relation, donc d'après (AL_α) , une identité.

Si B est un A -système libre, on dira que $N_A[B]$ est le A -groupe libre engendré par B et on écrira $N_A[B] = N_A[[B]]$. Un sous-groupe N de F est un A -groupe libre s'il existe un sous-ensemble B tel que $N = N_A[[B]]$ et B est dite A -base libre de N .

Un exemple simple de A -groupe libre est le suivant :

Considérons deux ensembles A et B , disjoints, et le groupe libre $K = [[A, B]]$, engendré par les éléments de $A \cup B$: on a (1) et de plus :

(a) B est un A -système libre : en effet, toute relation $\bar{R} = 1$ entre les éléments de $(A \cup B) \cup (A \cup B)^{-1}$, et en particulier toute A -relation, est une identité.

(b) Le sous-groupe normal engendré par B dans K coïncide avec $N_A[[B]]$; en effet, d'après 1.1, ce sous-groupe n'est autre que $N_A[B]$ et, d'après (a) $N_A[B] = N_A[[B]]$.

2.- A -relations irréductibles.

Une A -suite R sera dite A -suite irréductible si $\bar{S} \neq 1$, pour chaque A -segment $S \subset R$; dans ces mêmes conditions, $\bar{R}$ sera un A -produit irréductible et $\bar{R} = 1$ une A -relation irréductible. On déduit de 1.3 :

(AL₃). B est un A -système libre, si l'on a (1) et s'il n'existe pas de A -relation irréductible $\bar{R} = 1$, avec $\omega(R) \geq 3$, entre les éléments de $B \cup B^{-1}$.

2.1.- Pour toute A -suite R , il existe une A -sous-suite irréductible $R^m \subset R$, avec $\bar{R} = \bar{R}^m$.

Supposons que la A -suite ne soit pas irréductible ; on a $\bar{R}_A = 1$ et d'autre part il existe un segment $S^1 \subset R$ avec $\bar{S}^1 = \bar{S}_A^1 = 1$. Si l'on note $R^1 = R - S^1$, on a par conséquent $\bar{R} = \overline{R - S^1} = \bar{R}^1$ et $\bar{R}_A^1 = \overline{R_A - S_A^1} = 1$, cette dernière égalité montrant que R^1 est une A -suite. On peut ainsi construire une chaîne stricte de A -sous-suites de R : $R \supset R^1 \supset \dots$ avec $\bar{R} = \bar{R}^1 = \dots$, qui est finie, puisque R est finie, de sorte que pour un certain m , R^m est nécessairement une A -suite irréductible.

2.2.- Si $N = N_A[[B]]$, tout $1 \neq x \in N$ admet une représentation unique comme A -produit irréductible d'éléments de $B \cup B^{-1}$.

D'après 2.1, il existe une représentation comme A-produit irréductible de x . Si maintenant $1 \neq x = \prod_{i=1}^n r_i = \prod_{j=1}^m s_j$ où $\prod r_i$ et $\prod s_j$ sont des A-produits irréductibles,

$$R = \prod_{i=1}^{m-j+1} r_i = 1$$

est une identité, d'après (AL_α) ; soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet R . Si $S \in \rho$, on a d'après 1.2, $\bar{S} = \bar{S}_A = 1$, donc, puisque $\prod r_i \neq 1$ et $\prod s_j \neq 1$ sont des A-produits irréductibles,

$$S = S(s_{m-j+1}^{-1} r_i).$$

Si l'on fait intervenir la définition des segmentations concordantes, on déduit $m = n$ et $S = S(s_i^{-1} r_i)$, et en définitive, puisque S est unitaire, $s_i = r_i$.

3.- Couverture centrale.

R étant une suite d'éléments de $(A \cup B) \cup (A \cup B)^{-1}$, notons $\omega_B(R)$ le nombre des B-éléments de R ; d'autre part nous disons que R est x-simple si la classe des B-éléments r_i tels que $r_i = x^{\pm 1}$ se réduit à un seul B-élément de R .

Si maintenant $N = N_A[[B]]$ et si $x = \bar{R}$ est la représentation comme A-produit irréductible de $1 \neq x \in N$, nous appelons B-longueur $\lambda_B(x)$ de x , le nombre $\omega_B(R)$; on pose $\lambda_B(1) = 0$ et on a évidemment $\lambda_B(x) = \lambda_B(x^{-1})$; si R est un A-produit quelconque d'éléments de $B \cup B^{-1}$, on a d'après 2.1, $\lambda_B(\bar{R}) \leq \omega_B(R)$.

Si $\lambda_B(x) = 2m + 1$, le $m + 1$ -ème B-élément de R est dit B-centre de x ; si $\lambda_B(x) = 2m$, le m -ème B-élément de R est dit B-centre à gauche et le $m + 1$ -ème, B-centre à droite, de x . Le segment de R ayant comme extrémités le B-centre de x , est dit segment central $S_C(x)$ de x .

Si $\omega[S_C(x)] = 2\mu + 1$, le $\mu + 1$ -ème élément de $S_C(x)$ est appelé centre de x ; si $\omega[S_C(x)] = 2\mu$, le μ -ème élément de $S_C(x)$ est dit centre à gauche et le $\mu + 1$ -ème élément, centre à droite de x .

$\omega[S_C(x)] = 1$ correspond au cas où le B-centre, le segment central et le centre se confondent en un seul élément de R ; $\omega[S_C(x)] = 2$ correspond à celui où les B-centres coïncident avec les centres et le segment central se réduit à ceux-ci; si $\omega[S_C(x)] \geq 3$, tout élément de $S_C(x)$ différant des extrémités est un A-élément, et en particulier il en est ainsi des centres de x .

Nous appelons longueur $\lambda(x)$ de x le couple de nombres :

$$\lambda(x) = \{ \lambda_B(x), \omega[S_C(x)] \};$$

on pose par définition $\lambda(1) = \lambda_B(1) = 0$. La relation $<$ entre les longueurs, définie par $0 = \lambda(1) < \lambda(x)$, pour tout $x \neq 1$, et par :

$$\lambda(x) < \lambda(y) \iff \begin{cases} \text{soit à } \lambda_B(x) < \lambda_B(y) \\ \text{soit, si } \lambda_B(x) = \lambda_B(y), \text{ à } \omega[S_C(x)] < \omega[S_C(y)], \end{cases}$$

est une relation de bon ordre.

Considérons par ailleurs un A-produit $\bar{R} = r_1 r_2 \dots r_n$ d'éléments $\neq 1$ de $N = N_A[[B]]$ et soit

$$r_i = \prod_j s_{ij}$$

la représentation de $r_i \in N$ comme A-produit irréductible d'éléments de $B \cup B^{-1}$. Notons $L(R) = \max \{ \lambda(r_i) \}$ et

$$\bar{R}^* = \prod_i \prod_j s_{ij}$$

où l'on écrit r_i à la place de $\prod_j s_{ij}$ si r_i est un A-élément de R . Si de plus $\bar{R}^*$ admet une segmentation concordante et unitaire ρ , nous appelons couverture centrale $\mathcal{C}_\rho(r_i)$ de $r_i \in N$, le segment minimum de $\rho \cup \bar{R}^*$ contenant les centres de r_i .

On a $(\prod_j s_{ij})_A = 1$, pour tout r_i qui n'est pas A-élément de R , de sorte que :

$$(2) \quad S_A(r_h r_k) = (\prod_{h \leq i \leq k} r_i)_A = \prod_{h \leq i \leq k} (\prod_j s_{ij})_A = S_A(s_{h1} s_{k, 2_k})$$

Soit enfin $\bar{R} = 1$ une A-relation irréductible entre les éléments de $N = N_A[[B]]$ et $\omega(R) \geq 3$; d'après (AL_α) , $\bar{R}^* = 1$ est une A-identité; soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet $\bar{R}^*$.

3.1.- Si $r_i, r_k \in N$, on a :

$$r_i = r_k^{\pm 1}, \mathcal{C}_\rho(r_i) = \mathcal{C}_\rho(r_k) \implies i = k.$$

Supposons $i < k$, $r_i = r_k^{\pm 1}$, $\mathcal{C}_\rho(r_i) = \mathcal{C}_\rho(r_k) = \mathcal{C}$; deux cas sont à distinguer :

1) $\omega[S_C(r_i)] = \omega[S_C(r_k)] = 2\mu + 1$. Le centre s_{ic} de r_i appartient à $\mathcal{C}$

donc $S_p(s_{ic}) \subseteq \mathcal{C}$, et puisque $\mathcal{C}$ est minimum dans $\rho \cup R^*$ à contenir s_{ic} , $S_p(s_{ic}) = \mathcal{C}$; de façon analogue on a pour le centre s_{kc} de r_k , $S_p(s_{kc}) = \mathcal{C}$; on conclut

$$\mathcal{C} = S(s_{ic} s_{kc}) .$$

Si $r_i = r_k$, on a, d'une part d'après 2.2, $s_{ic} = s_{kc}$, d'autre part puisque $\mathcal{C}$ est unitaire, $s_{ic} = s_{kc}^{-1}$; ceci contredit (1).

Si $r_i = r_k^{-1}$, la représentation comme A-produit irréductible de r_i est d'après 2.2

$$r_i = s_{k, \ell_k}^{-1} \cdots s_{k, c+1}^{-1} \cdot s_{kc}^{-1} \cdot s_{k, c-1}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1}$$

de sorte que son centre est s_{kc}^{-1} et comme $\mathcal{C} \in \rho$ entraîne $\bar{\mathcal{C}} = 1$, on déduit

$$\bar{S}(r_i r_k) = s_{k, \ell_k}^{-1} \cdots s_{k, c+1}^{-1} \cdot \bar{\mathcal{C}} \cdot s_{k, c+1} \cdots s_{k, \ell_k} = 1$$

$$\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = s_{k1} \cdots s_{kc} \cdot \bar{\mathcal{C}} \cdot s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = 1$$

Par ailleurs $\bar{\mathcal{C}} = 1$ est une identité, donc d'après 1.2, $\bar{\mathcal{C}}_A = 1$; en tenant compte de (2) on a par conséquent

$$\begin{aligned} \bar{S}_A(r_i r_k) &= \bar{S}_A(s_{i1} s_{k, \ell_k}) = (s_{k, \ell_k}^{-1} \cdots s_{k, c+1}^{-1})_A \cdot \bar{\mathcal{C}}_A \cdot (s_{k, c+1} \cdots s_{k, \ell_k})_A = \\ &= (s_{k, c+1} \cdots s_{k, \ell_k})_A^{-1} (s_{k, c+1} \cdots s_{k, \ell_k})_A = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_A(r_{i+1} r_{k-1}) &= \bar{S}_A(s_{i+1, 1} s_{k-1, \ell_{k-1}}) = (s_{k1} \cdots s_{kc})_A \cdot \bar{\mathcal{C}}_A \cdot (s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1})_A = \\ &= (s_{k1} \cdots s_{kc})_A (s_{k1} \cdots s_{kc})_A^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $S(r_i r_k)$ et $S(r_{i+1} r_{k-1})$ sont des A-segments de R tels que $\bar{S}(r_i r_k) = \bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = 1$; de plus, $\omega(R) \geq 3$, entraîne soit $S(r_i r_k) \neq 0, R$, soit $S(r_{i+1} r_{k-1}) \neq 0, R$. Ceci contredit l'hypothèse que $\bar{R} = 1$ est une A-relation irréductible.

2) $\omega[S_C(r_i)] = \omega[S_C(r_k)] = 2\mu$. Soit s_{ic} , $s_{i, c+1}$ et s_{kc} , $s_{k, c+1}$ les centres de r_i et r_k respectivement et considérons le segment $S = S(s_{i, c+1} s_{kc})$; $\mathcal{C}_\rho(r_i) = \mathcal{C}_\rho(r_k)$ entraîne

$$s \in S \implies S_\rho(s) \subseteq S .$$

Il s'ensuit que l'ensemble de $S_\rho(s)$ avec $s \in S$ constitue une segmentation de S , qui est, de même que ρ , concordante et unitaire. On conclut que $\bar{S} = 1$ est une identité.

Si $r_i = r_k$, la représentation comme A-produit irréductible de r_i est :

$$r_i = s_{k1} \cdots s_{kc} s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k}$$

de sorte que les centres de r_i sont s_{kc} et $s_{k,c+1}$ et par conséquent en tenant compte de $\bar{S} = 1$

$$S(r_i r_{k-1}) = s_{k1} \cdots s_{kc} \cdot \bar{S} \cdot s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = 1.$$

D'autre part, d'après 1.2, $\bar{S}_A = 1$; on déduit en tenant compte de (2)

$$\bar{S}_A(r_i r_{k-1}) = \bar{S}_A(s_{i1} s_{k-1,\ell_{k-1}}) = (s_{k1} \cdots s_{kc})_A \cdot \bar{S}_A \cdot (s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1})_A = 1.$$

$S(r_i r_{k-1})$ est donc un A-segment de R et on a évidemment $S(r_i r_{k-1}) \neq 0, R$, ce qui est contradictoire.

Si $r_i = r_k^{-1}$, la représentation comme A-produit irréductible de r_i est :

$$r_i = s_{k,\ell_k}^{-1} \cdots s_{k,c+1}^{-1} s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1}$$

de sorte que les centres de r_i sont $s_{k,c+1}^{-1}$ et s_{kc}^{-1} et par conséquent

$$\bar{S}(r_i r_k) = s_{k,\ell_k}^{-1} \cdots s_{k,c+1}^{-1} \cdot \bar{S} \cdot s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k} = 1$$

$$S(r_{i+1} r_{k-1}) = s_{k1} \cdots s_{kc} \cdot \bar{S} \cdot s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = 1$$

et comme plus haut, en tenant compte de (2) et $\bar{S}_A = 1$,

$$\bar{S}_A(r_i r_k) = (s_{k,\ell_k}^{-1} \cdots s_{k,c+1}^{-1})_A (s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k})_A = 1$$

$$\bar{S}_A(r_{i+1} r_{k-1}) = (s_{k1} \cdots s_{kc})_A (s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1})_A = 1,$$

ce qui est contradictoire.

4.- Lemmes sur les A-relations irréductibles.

Considérons toujours la A-relation irréductible $\bar{R} = 1$ avec $\omega(R) \geq 3$.

4.1.- Il existe, pour tout élément $r_\alpha \in R$ avec $\lambda(r_\alpha) = L(R)$, une A-suite S , formée à partir de R , r_α -simple et telle que $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}^*$ des couvertures centrales correspondant aux éléments $r \in R$ avec $r = r_\alpha^{\pm 1}$; soit $\mathcal{C}_p(r_\beta)$, $r_\beta = r_\alpha^{\pm 1}$ un segment minimal appartenant à $\mathcal{P}^*$.

Si $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = R^*$, R est r_α -simple ; si en effet $r_\gamma = r_\alpha^{\pm 1}$,
 $\mathcal{C}_\rho(r_\gamma) \subseteq R^* = \mathcal{C}_\rho(r_\beta)$, et puisque $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$ est minimal dans ρ^* ,
 $\mathcal{C}_\rho(r_\gamma) = \mathcal{C}_\rho(r_\beta)$, donc d'après 3.1, $\gamma = \beta$. Par ailleurs $\lambda(\bar{R}) =$
 $= 0 < \lambda(r_\alpha)$, de sorte qu'on peut prendre $S = R$.

Si d'autre part $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) \neq R^*$, posons $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = S(s_{i,j+1} s_{kh}) \in \rho$;
 $\bar{S}(s_{i,j+1} s_{kh}) = 1$ est une identité et $s_{i,j+1} s_{kh} = 1$.

I.- $r_\gamma = r_\beta^{\pm 1}$, $i < \gamma < k \implies \gamma = \beta$.

Si en effet $i < \gamma < k$, les centres de r_γ appartiennent à $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$
donc puisque celui-ci est minimal dans ρ^* , $\mathcal{C}_\rho(r_\gamma) = \mathcal{C}_\rho(r_\beta)$; si de plus
 $r_\gamma = r_\beta^{\pm 1}$, d'après 3.1, $\gamma = \beta$.

Deux cas sont à distinguer :

a) $s_{i,j+1}$ et s_{kh} sont des B-éléments ; on peut distinguer quatre sous-cas :

a.1) Un B-centre de r_i et un B-centre de r_k , $\notin S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

Dans ce cas $r_\beta \notin S(r_{i+1} r_{k-1})$ et d'après I, $S(r_{i+1} r_{k-1})$ est r_α -simple. On a d'autre part

$$\begin{aligned} \bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) &= s_{i,\ell_i}^{-1} \cdots s_{i,j+1}^{-1} \cdot \bar{S}(s_{i,j+1} s_{kh}) \cdot s_{kh}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = \\ &= s_{i,\ell_i}^{-1} \cdots s_{i,j+2}^{-1} s_{k,h-1}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^* \end{aligned}$$

et en tenant compte de (2) et $\bar{S}_A(s_{i,j+1} s_{kh}) = 1$

$$\bar{S}_A(r_{i+1} r_{k-1}) = \bar{S}_A^*.$$

On peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_{i+1} r_{k-1})$. S est en effet une A-suite,
car $\bar{S}_A = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}_A^* = 1$, r_α -simple, au même titre que $S(r_{i+1} r_{k-1})$.

D'autre part

$$\begin{aligned} 2[\lambda_B(s_{i,\ell_i}^{-1} \cdots s_{i,j+1}^{-1})] &\leq \lambda_B(r_i) \leq \lambda_B(r_\alpha) \\ 2[\lambda_B(s_{kh}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1})] &\leq \lambda_B(r_k) \leq \lambda_B(r_\alpha) \end{aligned}$$

d'où, puisque $s_{i,j+1}$ et s_{kh} sont des B-éléments :

$$2\lambda_B(\bar{S}^*) \leq \lambda_B(r_\alpha) - 2 + \lambda_B(r_\alpha) - 2 = 2[\lambda_B(r_\alpha) - 2]$$

et par conséquent

$$\lambda_B(\bar{S}) \leq \omega_B[(\bar{S}_A^*)^{-1}] + \lambda_B[\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1})] = 0 + \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_\alpha).$$

En définitive, on a également $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

a.2) Les B-centres de $r_i \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$, et un B-centre de $r_k \notin S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

Dans ce cas $r_\beta \in S(r_i r_{k-1})$. On montre comme dans I, que $r_i = r_\beta^{\pm 1}$ entraîne $i = \beta$, de sorte qu'en tenant compte de I, on conclut que $S(r_i r_{k-1})$ est r_α -simple et on a par ailleurs

$$\bar{S}(r_i r_{k-1}) = s_{i1} \dots s_{ij} s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^*, \quad \bar{S}_A(r_i r_{k-1}) = \bar{S}_A^*$$

On peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot S(r_i r_{k-1})$, car on voit comme dans a.1) qu'il s'agit d'un A-produit r_α -simple et d'autre part

$$2[\lambda_B(s_{i1} \dots s_{ij})] < \lambda(r_i) \leq \lambda(r_\alpha)$$

$$2[\lambda_B(s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}^{-1})] \leq \lambda(r_k) \leq \lambda(r_\alpha)$$

d'où

$$\lambda_B(\bar{S}) \leq \omega_B[(\bar{S}_A^*)^{-1}] + \lambda_B[\bar{S}(r_i r_{k-1})] = \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha)$$

et en définitive $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

a.3) Un B-centre de $r_i \notin S(s_{i,j+1} s_{kh})$ et les B-centres de $r_k \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

Ce cas est symétrique à a.2) et on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot S(r_{i+1} r_k)$ ou $\bar{S}^* = s_{i,\ell_i}^{-1} \dots s_{i,j+1}^{-1} s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k}$.

a.4) Les B-centres de r_i et les B-centres de r_k , $\in S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

En tenant compte de I, on montre comme dans a.2) et a.3) que $S(r_i r_k)$ est r_α -simple et par ailleurs

$$\bar{S}(r_i r_k) = s_{i1} \dots s_{ij} s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k} = \bar{S}^*, \quad \bar{S}_A(r_i r_k) = \bar{S}_A^*$$

On peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot S(r_i r_k)$, puisqu'il s'agit d'un A-produit r_α -simple et que d'autre part

$$2[\lambda_B(s_{i1} \dots s_{ij})] < \lambda(r_i) \leq \lambda(r_\alpha)$$

$$2[\lambda_B(s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k})] < \lambda(r_k) \leq \lambda(r_\alpha)$$

d'où

$$\lambda_B(\bar{S}) \leq \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha)$$

et en définitive $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

b) $s_{i,j+1}$ et s_{kh} sont des A-éléments ; on distingue également quatre cas :

b.1) Un centre de r_i et un centre de r_k , $\notin S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

On voit comme dans a.1) que $S(r_{i+1} r_{k-1})$ est r_α -simple et

$$\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = s_{i,\ell_i}^{-1} \dots s_{i,j+2}^{-1} s_{k,h-1}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^*, \quad \bar{S}_A(r_{i+1} r_{k-1}) = \bar{S}_A^*$$

de sorte que $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_{i+1} r_{k-1})$ est un A-produit r_α -simple.

Si $s_{i,j+1} \notin S_c(r_i)$, les B-centres de $r_i \notin S(s_{i,j+1} s_{kh})$, donc

$$2[\lambda_B(s_{i,\ell_i}^{-1} \dots s_{i,j+1}^{-1})] < \lambda_B(r_i) \leq \lambda_B(r_\alpha)$$

et puisque d'autre part $2[\lambda_B(s_{kh} \dots s_{k1})] \leq \lambda_B(r_\alpha)$, on a

$$\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha).$$

Si $s_{k,h} \notin S_c(r_k)$, on déduit de façon symétrique la même relation ci-dessus.

Si $s_{i,j+1} \in S_c(r_i)$, $s_{kh} \in S_c(r_k)$, notons $s_{i,jm}$, $s_{i,jm+1}$ et $s_{k,hm}$, $s_{k,hm+1}$ les B-centres de r_i et r_k , respectivement ; si on a, soit $\lambda_B(r_i) < \lambda_B(r_\alpha)$, soit $\lambda_B(r_k) < \lambda_B(r_\alpha)$, il est clair que $\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha)$; la même relation est valable si $\lambda_B(r_i) = \lambda_B(r_k) = \lambda_B(r_\alpha)$ et si S^* admet un A-segment T avec $\bar{T} = 1$ et contenant des B-éléments.

Si maintenant $\lambda_B(r_i) = \lambda_B(r_k) = \lambda_B(r_\alpha)$ et si les A-segments T avec $\bar{T} = 1$ de R^B , ne contiennent que des A-éléments, le fait que $\prod_j s_{ih}$ sont de A-produits irréductibles pour tout i , entraîne

$$T \subset \{s_{i,jm+1}^{-1}, \dots, s_{i,j+2}^{-1}, s_{k,h-1}^{-1}, \dots, s_{k,hm}^{-1}\} = S_c^*$$

de sorte que la représentation comme A-produit irréductible de $\bar{S}^*$ est telle que $\lambda_B(\bar{S}) = \lambda_B(\bar{S}^*) = \lambda_B(r_\alpha)$ et

$$S_c(\bar{S}^*) \subseteq S_c^*.$$

Mais alors

$$2[\omega(s_{i,jm+1}^{-1}, \dots, s_{i,j+1}^{-1})] \leq \omega[S_c(r_i)] \leq \omega[S_c(r_\alpha)]$$

$$2[\omega(s_{kh}^{-1}, \dots, s_{k,jm}^{-1})] \leq \omega[S_c(r_k)] \leq \omega[S_c(r_\alpha)]$$

d'où

$$2\omega(S_c^*) \leq 2\{\omega[S_c(r_\alpha)] - 2\}$$

et en définitive

$$\omega[S_c(S)] = \omega\{S_c[\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1})]\} = \omega[S_c(\bar{S}^*)] \leq \omega(S_c^*) < \omega[S_c(r_\alpha)].$$

On a ainsi, dans tous les cas, $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

b.2) Les centres de $r_i \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$ et un centre de $r_k \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

On montre de façon analogue à b.1) que $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_i r_{k-1})$, où $\bar{S}^* = s_{i1} \dots s_{ij} s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}$, est un A-produit r_α -simple, et que l'on a soit $\lambda_B(\bar{S}) = \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_\alpha)$, soit, si $\lambda_B(\bar{S}) = \lambda_B(\bar{S}^*) = \lambda(r_\alpha)$, $\omega[S_c(\bar{S})] = \omega[S_c(\bar{S}^*)] < \omega[S_c(r_\alpha)]$, donc $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

b.3) Un centre de $r_i \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$ et les centres de $r_k \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

Ce cas est symétrique à b.2) et l'on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_{i+1} r_k)$ où $\bar{S}^* = s_{i,\ell_i}^{-1} \dots s_{i,j+1}^{-1} s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k}$.

b.4) Les centres de r_i et les centres de $r_k \in S(s_{i,j+1} s_{kh})$.

On montre que $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_i r_k)$ où $\bar{S}^* = s_{i1} \dots s_{ij} s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k}$ est un A-produit r_α -simple tel que $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

Considérons maintenant un A-produit irréductible R avec $\omega(R) \geq 3$ et soit $b \in B \cup B^{-1}$.

4.2.- Si $\bar{R} = b$, il existe pour tout $r_\alpha \in R$ avec $\lambda(r_\alpha) = L(R)$, une A-suite S d'éléments de R , r_α -simple, et telle que $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

Considérons la A-relation $b^{-1}\bar{R} = 1$, irréductible, en même temps que la A-suite R et par conséquent telle que $\lambda_B(r_i) \geq 2$. Soit $r_i = \prod_j s_{ij}$ la représentation comme A-produit irréductible de r_i et considérons l'identité

$$b^{-1}\bar{R}^* = b^{-1} \prod_i \prod_j s_{ij} = 1$$

ainsi que la segmentation concordante et unitaire ρ , qu'admet $\{b^{-1}, R^*\}$.

Soit comme dans 4.1, ρ^* l'ensemble des couvertures centrales correspondant aux $r \in \{b^{-1}, R^*\}$ avec $r = r_\alpha^{\pm 1}$ et $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$, $r_\beta = r_\alpha^{\pm 1}$, un segment minimal appartenant à ρ^* .

Si $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = S(s_{i,j+1} s_{kh})$, on peut construire comme dans 4.1 une A-suite S satisfaisant aux conditions de 4.2.

Si $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = \{b^{-1}, R^*\}$ on voit comme dans 4.1 que $\{b^{-1}, R\}$, donc R , est r_α -simple et d'autre part $\lambda_B(\bar{R}) = \lambda_B(b) = 1 < 2 \leq \lambda_B(r_\alpha)$, donc $\lambda(\bar{R}) < \lambda(r_\alpha)$.

Il reste à étudier le cas $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = S(b^{-1} s_{kh})$.

Si $r_\beta \in S(r_1 r_{k-1})$, on voit comme dans le cas a.1) de 4.1 que $S(r_1 r_{k-1})$ est r_α -simple. D'autre part en tenant compte de $\bar{S}(b^{-1}s_{kh}) = 1$, $b^{-1}s_{kh} = 1$ (2) et $\bar{S}_A(b^{-1}s_{kh}) = 1$ on a

$$\bar{S}(r_1 r_{k-1}) = b \bar{S}(b^{-1}s_{kh})s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = s_{k,h-1}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^*$$

$$\bar{S}_A(r_1 r_{k-1}) = \bar{S}_A^*$$

et puisque s_{kh} est un B-élément

$$\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_k) \leq \lambda_B(r_\alpha),$$

de sorte qu'on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_1 r_{k-1})$.

Si $\beta = k$, on voit comme dans le cas a.3) de 4.1 que $S(r_1 r_k)$ est r_α -simple, et

$$\bar{S}(r_1 r_k) = b \bar{S}(b^{-1}s_{kh}) a_{k,h+1} \dots a_{k,\ell_k} = b a_{k,h+1} \dots a_{k,\ell_k} = \bar{S}^*$$

$$\bar{S}_A(r_1 r_k) = \bar{S}_A^* ;$$

d'autre part $\lambda(r_k) \geq 2$ et le fait que $\bar{S}(b^{-1}s_{kh})$ contient les B-centres de r_k entraînent

$$\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_k) \leq \lambda(r_\alpha),$$

de sorte qu'on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_1 r_k)$.

5.- Groupe de Nielson d'un A-groupe libre.

Si $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ est une m-suite de variables $v_j \in N = N_A[[B]]$, considérons la m-suite $\varphi V = \{\varphi v_1, \dots, \varphi v_m\}$ définie par :

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi v_j = v_j ; j \neq j_0 \\ \varphi v_{j_0} = \bar{S}(v_{j_0} ; v_j, a) \end{cases}$$

où $\bar{S}(v_{j_0} ; v_j, a)$ est un A-produit v_{j_0} -simple d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$.

On voit que

$$(4) \quad v_{j_0} = P(\varphi v_{j_0} ; \varphi v_j, a)$$

où P est un A-produit φv_{j_0} -simple d'éléments de la forme $(\varphi v_j)^{\pm 1}$ et par conséquent

$$(5) \quad N_A[V] = N_A[\varphi V].$$

Supposons maintenant que N admette un système de A-générateurs fini et soit $\mathfrak{X}_m(N)$ l'ensemble des m-suites X de A-générateurs de N . Le changement

de variable (3) détermine une application $X \longrightarrow \varphi X$ de $\mathcal{X}_m(N)$ sur lui-même, d'après (4) et (5), que nous appelons transformation A-simple. D'après (4), l'ensemble $\mathcal{X}_m(N)$ des produits φ de transformations A-simples φ est un groupe, que nous appelons le groupe de Nielsen (d'ordre m) du A-groupe libre N .

On voit facilement que $\mathcal{X}_m(N)$ peut-être également défini comme l'ensemble des produits de transformations φ de l'une des formes

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi v_j = v_j ; j \neq j_0 \\ \varphi v_{j_0} = \begin{cases} v_{j_0}^{\pm 1} \\ (v_{j_0}^{\pm 1} v_j^{\pm 1})^{\pm 1} \\ a v_{j_0}^{\pm 1} a^{-1}, a \in A \cup A^{-1} \end{cases} \end{array} \right.$$

Notons X_0 l'ensemble des éléments de N qui figurent dans la suite X et d'autre part soit :

$$\lambda(X) = \{ \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m) \}.$$

Considérons la relation $<$ entre m -suites définie par :

$$\lambda(X) < \lambda(Y) \iff \lambda(x_j) \leq \lambda(y_j) \text{ et pour un certain } j_0, \lambda(x_{j_0}) < \lambda(y_{j_0}).$$

On déduit de 4.2.

5.1.- Si $X \in \mathcal{X}_m(N)$ et $B \cup B^{-1} \not\subseteq X_0 \cup X_0^{-1}$, il existe une transformation A-simple φ de $\mathcal{X}_m(N)$ telle que $\lambda(\varphi X) < \lambda(X)$.

Puisque toute chaîne descendante $\lambda(X_1) > \lambda(X_2) > \dots$ est finie on déduit de 5.1 :

5.2.- Pour toute m -suite $X \in \mathcal{X}_m(N)$, il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{X}_m(N)$ telle que $B \cup B^{-1} \subseteq (\varphi X)_0 \cup (\varphi X)_0^{-1}$.

Par conséquent :

Si $c(B)$ est le nombre des éléments d'une A-base libre B de N ,
 $c(B) \leq m$.

Si nous notons :

$$B_m = \left\{ \underbrace{b_1, \dots, b_{c(B)}}_m, 1, \dots, 1 \right\},$$

on voit, comme dans 8.4 de [2] que

5.3.- Pour toute m-suite $X \in \mathcal{X}_m(N)$ avec $B \cup B^{-1} \subseteq X_0 \cup X_0^{-1}$, il existe
une transformation $\psi \in \mathcal{Y}_m(N)$ telle que $\psi X = B_m$.

Finalement, d'après 5.2 et 5.3 :

5.4.- $\mathcal{Y}_m(N)$ est un groupe transitif de transformation de $\mathcal{X}_m(N)$.

6.- Construction des relations fondamentales.

Considérons maintenant un groupe G engendré par une suite
 $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ de générateurs et défini par une suite de relations fondamentales :

$$(H) \quad h_1(a_i) = 1, \dots, h_k(a_i) = 1, \dots, h_r(a_i) = 1,$$

autrement dit le groupe quotient du groupe libre $[[A]]$ par le sous-groupe normal $N_A[H]$, où $H = \{h_1(a_i), \dots, h_r(a_i)\}$. Si l'on considère la suite d'éléments $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ et le A-groupe libre $N_A[[B]]$, l'application de $N_A[[B]]$ sur $N_A[H]$, définie par

$$a_i \longrightarrow a_i, \quad b_k \longrightarrow h_k(a_i)$$

est un homomorphisme, dont le noyau est l'ensemble U des A-produits $\bar{R}(b_k)$ d'éléments de $B \cup B^{-1}$ tels que $\bar{R}[h_k(a_i)] = 1$, et $N_A[H]$ est isomorphe à $N_A[[B]]/U$, d'où :

6.1.- Un sous-groupe normal d'un groupe libre $[[A]]$ est isomorphe au groupe
quotient d'un A-groupe libre par un de ses sous-A-groupes normaux.

Identifions : $N_A[H] = N_A[[B]]/U$ et considérons une m-suite quelconque

$$(F) \quad f_1(a_i) = 1, \dots, f_j(a_i) = 1, \dots, f_m(a_i) = 1$$

de relations fondamentales concernant la suite de générateurs A du groupe G , autrement dit, soit $F = \{f_1(a_i), \dots, f_m(a_i)\}$ une m-suite de A-générateurs de $N_A[H] = N_A[[B]]/U$.

Si $F^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ est une m-suite de représentants (appartenant à $N_A[[B]]$) pris dans chaque classe $f_j(a_i)$, on déduit de $N_A[F] = N_A[H]$ et du fait que U est sous-A-groupe normal dans $N_A[[B]]$

$$b_k U = h_k(a_i) = \bar{R}_k[f_j(a_i), a_i] = \bar{R}_k[f_j^* U, a_i] = \bar{R}_k(f_j^*, a_i) \cdot U$$

où $\bar{R}_k[f_j(a_i), a_i]$ est un A-produit d'éléments de $F \cup F^{-1}$, donc

$$b_k = \bar{R}_k(f_j^*, a_i) \cdot u_k, \quad u_k \in U$$

et en définitive

$$N_A[[B]] = N_A[f_1^*, \dots, f_m^*, u_1, \dots, u_n].$$

En utilisant maintenant 5.4, on montre comme dans 1.2 de [3] que le groupe de Nielsen d'ordre $m+r$ relatif à $N_A[F]$ est transitif sur l'ensemble des $m+r$ -suites de A -générateurs de la forme

$$\{ \underbrace{x_1, \dots, x_m, 1, \dots, 1}_{m+r} \},$$

autrement dit :

6.2.- Toute m -suite de relations fondamentales concernant la n -suite A de générateurs de G , s'obtient de :

$$(F_{m+r}) \quad f_1(a_1) = 1, \dots, f_m(a_m) = 1, \underbrace{1 = 1, \dots, 1 = 1}_r$$

par une succession de transformations (3) effectuées sur les premiers membres des relations (F_{m+r}) .

BIBLIOGRAPHIE

- J. PETRESCO : [1] - Sur les commutateurs, Séminaire Châtelet-Dubreil, 1953/54, et Math. Z., 61, 1954, p. 348-356.
- [2] - Sur les groupes libres, Séminaire P. Dubreil, 1954/55, exposé n° 21 et 23.
- [3] - Systèmes minimaux de relations fondamentales dans les groupes de rang fini, Séminaire Dubreil-Pisot, 1955/56, exposé n° 1.
-