Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. GUÉRINDON

Théorie des idéaux. VI. Généralisation additive de la théorie des idéaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. nº 14, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A6_0>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 14

THÉORIE DES IDÉAUX .VI.

GÉNÉRALISATION ADDITIVE DE LA THÉORIE DES IDÉAUX

(Exposé de J.GUÉRINDON, le 14 février 1955)

-:-:-:-

Le caractère additif d'un grand nombre de théorèmes relatifs aux anneaux, principalement à leurs décomposition, sous l'hypothèse de la condition maximale, a été souligné notamment par E. Noether et Krull.

On va donner dans cet exposé les éléments de la généralisation aux A-modules unitaires neothériens de la théorie faite à ce séminaire (15 novembre 1954, en abrégé (AN)) suivant l'exposé de Grundy (A generalization of additive ideal theory, Proc. of Cambridge Ph. Soc., vol 38, 1942, p. 242). Ce mémoire de Grundy contient des compléments relatifs au cas où A n'a pas d'élément unité et $\mathfrak{M}$ est quelconque, ainsi que l'étude des modules quotients et des extensions et contractions de modules. On pourra prendre l'extension du théorème d'intersection de Krull dans la "Commutative Algebra" de P. Samuel, citée par (C.A.). Certains résultats s'étendent aussi aux groupes quelconques à opérateurs, dont nous commencerons à étudier quelques propriétés, ainsi qu'à certains groupoïdes à opérateurs où l'on peut défihir une double résiduation.

1.- On utilisera les résultats classiques suivants sur les groupes à opérateurs, notés multiplicativement pour plus de généralité. On voit comme dans (AN), avec l'aide de l'axiane du choix, qu'un groupe abélien à opérateurs G , satisfait pour ses sous-groupes [(1)] à la condition maximale pour l'inclusion ordinaire, si et seulement si chaque sous-groupe est engendré, relativement aux opérateurs, par un nombre fini d'éléments de G . On a alors le :

<u>Théorème 1</u> : <u>Si</u> g <u>est un sous-groupe stable de</u> G , G <u>satisfait à la condition maximale si et seulement si les groupes à opérateurs</u> g <u>et</u> G/g <u>y satisfont</u>.

---

(1) - Van der Waerden. Moderne algebra. 2e édition. ch. VI.

Les sous-groupes considérés sont, dans ce qui suit, les sous-groupes permis pour le domaine fermé d'opérateurs. Parmi eux il y aura des sous-groupes invariants (normaux, distingués) au sens des groupes sans opérateur.

La proposition directe est évidente en utilisant une base finie par exemple. Si réciproquement g et G/g sont noethériens, soit h un sous-groupe de G. On a par hypothèse :

$$g \cap h = (a_1 , \ldots, a_r) \quad ; \quad a_1 , \ldots, a_r \in G .$$

D'après le premier théorème d'isomorphisme on a :

$h/g \cap h \cong gh/g$ qui est noethérien comme sous-groupe de G/g.

Donc il existe en G des $a_{r+1} , \ldots, a_s$ tels que :

$$h = (a_{r+1} , \ldots, a_s , g \cap h) .$$

Finalement on a : $h = (a_1 , \ldots, a_r , a_{r+1} , \ldots, a_s)$ et G est noethérien d'après la remarque préliminaire. On en déduit alors le :

<u>Théorème 2</u> : <u>Soit</u> $g_1 , \ldots, g_n$ <u>un ensemble de sous-groupes à opérateurs, stables en</u> G, <u>alors</u> :

a) <u>si les</u> ng_i <u>sont noethériens</u>, $g_1 g_2 \ldots g_n$ <u>l'est également</u> ;

b) <u>si les</u> n <u>facteurs</u> G/g_i <u>sont noethériens</u>, <u>il en est de même du facteur</u> $G/g_1 \cap \ldots \cap g_n$.

Pour obtenir a) on raisonne par récurrence. Si $g_1 g_2 \ldots g_i$ est noethérien, on écrit

$$g_1 g_2 \ldots g_i / g_1 g_2 \ldots g_i \cap g_{i+1} \simeq g_1 g_2 \ldots g_{i+1} / g_{i+1} .$$

Le premier membre est noethérien comme facteur de $g_1 \ldots g_i$, donc le second l'est et $g_1 \ldots g_{i+1}$ est noethérien d'après le théorème 1.

Pour b) on suppose que $G/g_1 \cap \ldots \cap g_i$ soit noéthérien et on étudie $G/g_1 \cap \ldots \cap g_i \cap g_{i+1}$, d'après le théorème 1, appliqué à ce dernier groupe, il suffit d'écrire que $g_{i+1}/g_1 \cap \ldots \cap g_i \cap g_{i+1}$ est noethérien. Or cela résulte de l'isomorphisme :

$$g_{i+1}.(g_1 \cap \ldots \cap g_i)/g_1 \cap \ldots \cap g_i \cong g_{i+1}/g_1 \cap \ldots \cap g_i \cap g_{i+1} \quad ,$$

le premier nombre étant noethérien comme sous-groupe de $G/g_1 \cap \ldots \cap g_i$ est noethérien ; il en est de même du second. C.Q.F.D.

2.- On considérera un A-module unitaire $\mathfrak{M}$ sur un anneau commutatif (avec élément unité, opérateur unité sur $\mathfrak{M}$), qu'on appellera module ambiant [(2)].

(2) - Les opérateurs éléments de A opèreront sur $\mathfrak{M}$ sans distinction de coté dans cet exposé. Il existe une généralisation par E. Noether dans le cas de modules gauches (cf. E. Noether, Hyperkomplexe grossen und Darstellung theorie. Math. Zeit. 30, 1929, p. 641-692).

En plus des règles usuelles on introduira deux sortes de résiduels d'un sous-module $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ est sous-module de $\mathfrak{N}$ et I un idéal (quelconque) de A on définit[3] :

---

(3) – Les notions précédentes de la théorie de la résiduation peuvent s'étendre, au moyen d'une construction due à Mr P. Dubreil, à certains groupoïdes ordonnés, satisfaisant aux hypothèses générales suivantes. Soit deux groupoïdes (au sens de Ore) D et Δ partiellement ordonnés tels que pour tout couple $\alpha \in \Delta$ et $a \in D$ soit défini le produit αa en D. D sera dit résidué à gauche par rapport au domaine d'opérateurs Δ si quelque soit $a, b \in D$ il existe un maximum (noté $b \cdot\!\cdot a$) des α tels que $\alpha a \subseteq b$ et si quelque soit $b \in D$ et $\mu \in \Delta$ il existe un maximum (noté $b \,.\!\cdot \mu$) des $m \in D$ tels que $\mu m \subseteq b$. En supposant l'isotonie de la loi de composition par rapport aux deux relations d'ordre, toutes deux notées $\subseteq$, on a les lois :

$$b \subseteq b_1 \Longrightarrow b \cdot\!\cdot a \subseteq b_1 \cdot\!\cdot a \quad \text{et} \quad b \,.\!\cdot \alpha \subseteq b_1 \,.\!\cdot \alpha$$

$$a \subseteq a' \Longrightarrow b \cdot\!\cdot a' \subseteq b \cdot\!\cdot a$$

$$\alpha \subseteq \alpha' \Longrightarrow b \,.\!\cdot \alpha' \subseteq b \,.\!\cdot \alpha$$

$$b \cdot\!\cdot a = b \cdot\!\cdot [b \,.\!\cdot (b \cdot\!\cdot a)] \quad ; \quad b \,.\!\cdot \alpha = b \,.\!\cdot [b \cdot\!\cdot (b \,.\!\cdot \alpha)]$$

$$\xi \in \Delta \ \text{et} \ \xi = b \cdot\!\cdot (b \,.\!\cdot \xi) \Longrightarrow \exists\, a \in D \ \text{tel que} \ \xi = b \cdot\!\cdot a .$$

L'introduction des lois d'associativité mixtes :

$$\alpha'(\alpha a) = (\alpha'\alpha)a \quad \text{et} \quad \alpha(a'a) = (\alpha a')a$$

entraine : $$(b \,.\!\cdot \alpha) \,.\!\cdot \alpha' = b \,.\!\cdot (\alpha\alpha') \quad \text{et} \quad (b \cdot\!\cdot a) \cdot\!\cdot a' = b \cdot\!\cdot (a'a)$$

et, sous réserve de l'existence des symboles employés, on obtient :

$$\left(\bigcap_{b \in B} b\right) .\!\cdot \alpha = \bigcap_{b \in B} b \,.\!\cdot \alpha \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{b \in B} b\right) \cdot\!\cdot a = \bigcap_{b \in B} (b \cdot\!\cdot a)$$

Enfin la loi de distributivité $\alpha . \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} a = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} \alpha a$ entraine : $b \cdot\!\cdot \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} a = \bigcap_{a \in \mathfrak{a}} b \cdot\!\cdot a$ lorsque le second membre existe et la loi : $\left(\bigcup_{\alpha \in \Phi}\right) x = \bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha x$ entraine $b \,.\!\cdot \left(\bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} (b \,.\!\cdot \alpha)$ dès que le deuxième membre a un sens.

$$\mathfrak{N} : \mathfrak{N}_1 = \{ x \in A \ , \ x\,\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N} \}$$

$$\mathfrak{N} : I = \{ m \in \mathfrak{M} \ , \ Im \subseteq \mathfrak{N} \}$$

on a alors les règles usuelles, qui généralisent celles de (AN) :

$$I(J\mathfrak{N}) = (IJ)\mathfrak{N}$$

$$I(\mathfrak{N}+\mathfrak{N}') = I\mathfrak{N} + I\mathfrak{N}' \quad , \quad (I+I')\mathfrak{N} = I\mathfrak{N} + I'\mathfrak{N}$$

$$\begin{cases} (\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_r) : \mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_1 : \mathfrak{N}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{N}_r : \mathfrak{N}) \\ (\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_r) : I = (\mathfrak{N}_1 : I) \cap \ldots \cap (\mathfrak{N}_r : I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{N} : (\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r) = (\mathfrak{N} : \mathfrak{N}_1) \cap \ldots \cap (\mathfrak{N} : \mathfrak{N}_r) \\ \mathfrak{N} : (I_1, \ldots, I_r) = (\mathfrak{N} : I_1) \cap \ldots \cap (\mathfrak{N} : I_r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mathfrak{N} : \mathfrak{N}') : I = \mathfrak{N} : (I\mathfrak{N}') = (\mathfrak{N} : I) : \mathfrak{N}' \\ (\mathfrak{N} : I) : J = (\mathfrak{N} : IJ) = (\mathfrak{N} : J) : I \end{cases}$$

Désignant par 0 le sous-module de $\mathfrak{M}$ réduit à zéro on appellera a-module tout résiduel $0 : I$ (annihilateur de l'idéal I) et a-idéal tout résiduel $0 : \mathfrak{N}$ (annihilateur du sous-module $\mathfrak{N}$). Ces notions sont relatives à un module ambiant fixé. L'annihilateur $U = 0 : \mathfrak{M}$ jouera un rôle important car visiblement $\mathfrak{M}$ est aussi un $A/U = A'$-module, d'annihilateur nul cette fois. Deux éléments a_1 , a_2 de A induisent les mêmes endomorphismes $m \to a_1 m$ et $m \to a_2 m$ si et seulement si $a_1 \equiv a_2 \ (U)$. Deux éléments distincts de A' induiront donc des endomorphismes distincts. Remarquons que pour tout $m \in \mathfrak{M}$, $A/0 : Am$ est isomorphe comme A-module à Am .

On voit comme pour les idéaux que $0 : (0 : \mathfrak{N}) \supseteq \mathfrak{N}$ avec égalité si et seulement si $\mathfrak{N}$ est un a-module et que $0 : (0 : I) \supseteq I$ avec égalité si et seulement si I est un a-idéal. Il y a alors correspondance biunivoque entre les a-modules $\mathfrak{N}$ et les a-idéaux I selon les formules :

$$0 : \mathfrak{N} = I \quad \text{et} \quad 0 : I = \mathfrak{N} \ .$$

<u>Théorème 3</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est noethérien</u>, <u>l'anneau</u> $A' = A/0 : \mathfrak{M}$ <u>l'est également</u>.

On a en effet $\mathfrak{M} = A\,m_1 + \ldots + A\,m_p$ et comme pour tout i on a $A/0 : A\,m_i \cong A\,m_i$ qui est noethérien, le premier membre est noethérien en tant que A-module et comme on a :

$$U = 0 : \mathfrak{M} = \bigcap_i 0 : A\,m_i$$

le A-module A/U est noethérien d'après le théorème 2, b), donc l'est en tant qu'anneau A' .

<u>Théorème 4</u> : <u>Pour que le</u> A-<u>module</u> $\mathfrak{M}$ <u>soit noethérien il faut et il suffit qu'il ait une base finie et que</u> $A' = A/0 : \mathfrak{M}$ <u>soit noethérien</u>. La nécessité découle du théorème 3. Si réciproquement A' est noethérien et $\mathfrak{M} = A\,m_1 + \dots + A\,m_p$. Chaque $A\,m_i$ étant isomorphe à $A/0 : A\,m_i$ est noethérien car $0 : A\,m_i \supseteq 0 : \mathfrak{M}$ pour tout i . On applique alors le théorème 2.a). Ce résultat s'étend aisément au cas où A n'a pas d'élément unité. Un cas important est celui où A est principal.

<u>Exemple</u> : Un groupe G , abélien additif étant considéré comme un C-module (C anneau des entiers relatifs) sera un C-module noethérien si et seulement s'il est de type fini.

<u>Ombres et extensions</u> : Soit $\mathfrak{N}$ un sous-module du module ambiant $\mathfrak{M}$. On appelera <u>ombre de</u> $\mathfrak{N}$ l'idéal $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Soit I un idéal de A , on appellera <u>extension de</u> I le module $I\mathfrak{M}$ qui sera par définition un e-module.

Pour un idéal I et un module $\mathfrak{N}$ donné $(I \subseteq A\ ,\ \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M})$ on a $(\mathfrak{N} : \mathfrak{M}).\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ et $I\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \supseteq I$. Il y a égalité si et seulement si $\mathfrak{N}$ est un e-module, et pour la seconde égalité de même si et seulement si I est une ombre. Il y a alors correspondance biunivoque entre les ombres et les e-modules au moyen des formules :

$$\mathfrak{N} : \mathfrak{M} = I \quad , \quad I\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \quad ,$$

I étant le plus grand idéal dont l'extension est $\mathfrak{N}$ et, $\mathfrak{N}$ le plus petit module dont l'ombre est I . La correspondance précédente redonne en particulier dans une extension d'anneau (avec élément 1) celle des extensions et contractions d'idéaux.

<u>Théorème 5</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est un</u> A-<u>module</u>, <u>somme de</u> k <u>modules monogènes et si</u> I <u>est un diviseur de</u> 0 :

$$\text{a)}\quad J\mathfrak{M} \subseteq I\mathfrak{M} \quad \text{entraine} \quad J^k \subseteq I$$

$$\text{b)}\quad \mathfrak{M} = I\mathfrak{M} \quad \text{entraine} \quad I = A$$

Pour a) on utilise la méthode du déterminant (cf. exposé n° 3). On a $\mathfrak{M} = A\alpha_1 + \dots + A\alpha_k$. Soit k éléments quelconques de J , on a, pour des $b_{ij} \in I$:

$$a_i \alpha_i = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, \alpha_j \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

d'où $\Delta \alpha_i = 0$ pour tout i , posant $\Delta = \text{dét}(b_{ij} - \delta_{ij}\, a_i)$,

(δij symbole de Tronecker). On a donc $\Delta \mathfrak{M} = 0$ et $\Delta \subseteq 0 : \mathfrak{M} \subseteq I$ or $\Delta = u + (-1)^k a_1 a_2 \dots a_k$ avec $u \in I$, donc $a_1 a_2 \dots a_k \in I$. Pour b) on écrit $\mathfrak{M} = A \mathfrak{M}$ et on applique a). Le résultat s'étend au cas où A n'a pas d'élément unité en plongeant A dans un anneau avec élément unité.

Corollaire : Si le A-module $\mathfrak{M}$ a une base finie, tout diviseur premier de $0 : \mathfrak{M}$ est une ombre.

En effet de $\mathfrak{M}(p\,\mathfrak{M} : \mathfrak{M}) \subseteq p\,\mathfrak{M}$ et $p\,\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \supseteq p \supseteq 0 : \mathfrak{M}$, on déduit $p \supseteq (p, \mathfrak{M} : \mathfrak{M})^k$ donc $p = p\,\mathfrak{M} : \mathfrak{M}$ et p est une ombre. Ceci s'étend aisément à tout idéal semi-premier contenant $0 : \mathfrak{M}$.

3.- Modules premiers et primaires.

On ne suppose pas $\mathfrak{M}$ nécessairement noethérien. Pour remédier à l'absence de multiplication en $\mathfrak{M}$ on définira les notions de module premier, primaire au moyen des ombres.

Définition : Un sous-module $\mathfrak{N}$ est dit primaire en $\mathfrak{M}$ si

$$b\alpha \in \mathfrak{N} \quad , \quad b \in A_1, \alpha \notin \mathfrak{N} \Longrightarrow b^r \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M} \quad \text{pour un } r .$$

Il est dit premier si on a la même implication avec $r = 1$.

Théorème 6 : L'ombre d'un module primaire (resp. premier) est un idéal primaire (resp. premier) (Réciproque fausse, voir paragraphe 8, fin).

Si $\mathfrak{N}$ est primaire, $ab \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$, $a \notin \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ entraine que pour un $\alpha \in \mathfrak{M}$ $a\alpha \notin \mathfrak{N}$, et comme $ab\alpha \in \mathfrak{N}$, on a $b^r \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ donc $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ est primaire. Si en plus $r = 1$, $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ est premier.

Le radical p et l'éventuel exposant de $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ s'appellent le radical et l'exposant de $\mathfrak{N}$ (en $\mathfrak{M}$). On dira que $\mathfrak{N}$ est p-primaire. On a alors les :

Proposition 1 : Un module primaire est premier si et seulement si son ombre est un idéal premier (mais l'ombre d'un module non primaire peut être première).

Proposition 2 : Si $\mathfrak{M}_1$ est p-primaire et $I \notin p$, on a $\mathfrak{M}_1 : I = \mathfrak{M}_1$.

Proposition 3 : Si l'idéal p et le module $\mathfrak{N}$ ont les propriétés :

a) $b\alpha \in \mathfrak{N}$, $\alpha \notin \mathfrak{N} \Longrightarrow b \in p$

b) $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} \subseteq p$

c) $b \in p \Longrightarrow b^r \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ pour un r

alors p est premier et $\mathfrak{N}$ est p-primaire.

Proposition 4 : Si $\mathfrak{N}$ est p-primaire et $I \notin \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} : I$ est p-primaire.

<u>Proposition 5</u> : L'intersection d'un nombre fini de modules p-primaires est p-primaire. L'intersection d'un nombre fini de modules primaires de radicaux différents et dont aucun ne contient l'intersection des autres n'est pas primaire.

<u>Proposition 6</u> : L'intersection d'un nombre fini de modules p-premiers est un module p-premier.

La première et la dernière proposition sont immédiates. Les autres démonstrations sont analogues à celles des propriétés correspondantes des idéaux.

4.- <u>Décomposition dans les modules noethériens</u>.

<u>Définition</u> : Un module est dit <u>réductible</u> s'il est l'intersection de deux modules strictement plus grands, irréductible au cas contraire.

<u>Théorème 7</u> : <u>Un sous-module d'un module noethérien est l'intersection d'un nombre fini de modules irréductibles</u>. <u>Un module irréductible est primaire</u>.(4)

<u>Définition</u> : Une intersection de modules primaires est dite <u>normale</u> si aucun module ne contient l'intersection des autres modules et si les radicaux sont différents.

<u>Théorème 8</u> : <u>Un sous-module d'un module noethérien peut être représenté par une intersection normale de modules primaires. Le nombre de ces modules primaires et leurs radicaux sont déterminés</u>.

Les démonstrations pourront être transcrites facilement de (AN) ou prises en Grundy, ou encore dans la "Commutative algebra" de P. Samuel. On a alors

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$$

avec $\mathfrak{N}_i$ module p_i-primaire, n minimum et les p_i étant des premiers différents, contenant $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ donc $0 : \mathfrak{M}$. Les p_i sont donc des ombres.

<u>Notation</u> : Etant donnés un module $\mathfrak{N}$ et un idéal I on désignera par $\mathfrak{N}_{[I]}$ le maximum des modules de la suite :

$$\mathfrak{N} : I \quad , \quad \mathfrak{N} : I^2 , \ldots , \mathfrak{N} \; : I^h , \ldots$$

(4) - La réciproque est fausse : voir l'étude complète de la réciproque pour les demi-groupes et les anneaux dans l'exposé de L. Lesieur, à ce même séminaire (le 7 février 1955). Le théorème de Grobner s'étend aussi aux A-modules.

(on a $\mathfrak{M} : I^{k+1} = \mathfrak{M} : I^k$ pour un k , $\mathfrak{M}$ étant noethérien). Si on a une décomposition $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_n$; alors : $\mathfrak{M} : I^h = \mathfrak{M}_1 : I^h \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_n : I^h$ pour tout $h \geqslant 0$. On a alors :

$$\mathfrak{M}_{[I]} = \mathfrak{M}_{1[I]} \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{n[I]} \quad .$$

alors avec les notations de la proposition 2, l'inclusion $I \subseteq p$ entraine $\mathfrak{M}_{[I]} = \mathfrak{M}$; on est alors conduit au :

<u>Théorème 9</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est un module</u>, <u>et</u> I <u>un idéal contenu en</u> $p_{m+1}, \ldots, p_n$ <u>mais non en</u> $p_1 , p_2 , \ldots, p_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ on a

$$\mathfrak{M}_{[I]} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_m$$

<u>Corollaire</u> : $\mathfrak{M} : I \neq \mathfrak{M}$ <u>équivaut à</u> $I \subseteq p_k$ <u>pour un</u> k . D'après la proposition 2, il suffit de voir que $I \subseteq p_k$ pour un k entraine $\mathfrak{M} : I \neq \mathfrak{M}$. On aura alors $\mathfrak{M}_{[I]} \neq \mathfrak{M}$ car la décomposition donnée de $\mathfrak{M}$ est normale donc on ne peut avoir $\mathfrak{M} : I = \mathfrak{M}$.

Il est à noter que ce théorème 9 et son corollaire ne sont pas vrais dans le cas général, car on a utilisé le fait que les $\mathfrak{M}_i : \mathfrak{M}$ sont <u>primaires forts</u> $(p_i^{\alpha_i} \subseteq \mathfrak{M}_i : \mathfrak{M})$.

5.- <u>Composants isolés d'un module</u> $\mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_n$ est une décomposition normale de $\mathfrak{M}$, toute intersection obtenue en supprimant un nombre fini $< n$ de $\mathfrak{M}_k$ est appelée <u>composant</u> de $\mathfrak{M}$. Il sera dit <u>isolé</u> si l'ensemble des (p_i) associés aux $\mathfrak{M}_i$ restants est isolé au sens déjà donné en (AN). On a alors le :

<u>Théorème 10</u> : <u>Un module</u> $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$ <u>est un composant isolé de</u> $\mathfrak{M}$ <u>si et seulement s'il existe un idéal</u> I <u>tel que</u> $\mathfrak{M}_{[I]} = \mathfrak{M}'$.

En effet si $p_1 , \ldots, p_m$ est un sous-ensemble isolé de $p_1 , p_2 , \ldots, p_m , \ldots, p_n$ on prend $I = p_{m+1} \ldots p_n$. On a $I \subseteq p_{m+1} , \ldots , p_n$ et pas en $p_1 , \ldots, p_n$ ($I \subseteq p_1$ par exemple entrainerait par exemple $p_1 \supseteq p_{m+1}$ donc p_{m+1} serait un des $p_1 , \ldots, p_n$) et on applique le théorème 9. Inversement si pour un I on a $\mathfrak{M}_{[I]} \neq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_{[I]}$ est un composant isolé car si $I \nsubseteq p_1 , \ldots, p_n$ et $I \subseteq p_{m+1}, \ldots, p_n$ aucun p_{m+k} n'est contenu en un $p_{m-k'}$ $(k,k' > 0)$ donc $\{p_1 , \ldots, p_n\}$ est isolé(5).

(5)- Ce théorème permet d'étendre aux A-modules le théorème de structure, sous la forme précise donnée dans l'exposé n° 13 de ce séminaire (L. Lesieur, Sur les idéaux irréductibles).

<u>Théorème 11</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$ <u>et</u> $\mathfrak{N}'_1 \cap \mathfrak{N}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_n$ <u>sont deux décompositions normales de</u> $\mathfrak{N}$ <u>et si</u> $\mathfrak{N}_1$ <u>et</u> $\mathfrak{N}'_1$ <u>ont le même radical on a</u> $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$ (<u>théorème d'échange</u>). Supposons que p_1 , p_2 ,..., p_m soient des multiples de p_1 et pas p_{m+1} , ..., p_n ; alors les ensembles $\{p_1 , \ldots, p_m\}$ et $\{p_2 , \ldots, p_n\}$ sont isolés donc on a :

$$\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_m \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_m$$

donc $\mathfrak{N}'_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}'_1 \cap \mathfrak{N}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_m$ et donc :

$$\mathfrak{N}'_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_m \quad \text{d'où le théorème.}$$

<u>Corollaire</u> : <u>Si</u> p_1 ,..., p_u <u>sont les idéaux premiers de</u> $\mathfrak{N}$ <u>et si pour tout</u> i <u>il existe une décomposition normale telle que le composant attaché à</u> p_i <u>soit</u> $\mathfrak{N}^*_i$ <u>alors on a</u> $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^*_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}^*_n$ <u>et la décomposition est normale</u> (on applique n fois le théorème 11).

Un mode général de définition des composants isolés sera donné dans le paragraphe 7.

6.- <u>Etude des idéaux premiers attachés à un module</u>.

<u>Définition</u> : Le radical $R(\mathfrak{N})$ est l'ensemble des $u \in A$ tels que pour un entier $k > 0$ on ait $u^k \in \mathfrak{N} : \mathfrak{N}$. C'est donc le radical (nilpotent) de l'ombre de $\mathfrak{N}$.

On voit immédiatement que l'on a $R(\mathfrak{N}) = p_1 \cap p_2 \cap \ldots \cap p_n$ et que $R(\mathfrak{N}) \supseteq U = 0 : \mathfrak{M}$.

<u>Théorème 12</u> : <u>Une puissance du radical de</u> $\mathfrak{N}$ <u>est contenue dans l'ombre de</u> $\mathfrak{N}$, (faux si $\mathfrak{M}$ non noethérien en général)(6).

On considère $R(\mathfrak{N})/U$ comme un idéal de l'anneau noethérien $A' = A/U$ (théorème 3). Il existera en $R(\mathfrak{N})$ des r_1 , ..., r tels que $R(\mathfrak{N}) = A_{r_1} + \ldots + A_{r\ell}$ (mod U) et donc des entiers s_1 , ..., s_ℓ tels que $r_1^{s_1} \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$, ..., $r_\ell^{s_\ell} \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. On pose $s = s_1 + \ldots + s_\ell$ et on prend un produit $a = b_1 b_2 \ldots b_s$ de s éléments de $R(\mathfrak{N})$. On a, modulo U et sur chaque $i \leqslant s$:

$$b_i \equiv \sum_{j=1}^{k} Cij\, r_j \ , \quad (C_{ij} \in A)$$

donc a est congru à combinaison linéaire sur A de monômes en (r_j) de degré s . Pour chaque monôme μ le degré d'un des r_j dépasse le s_j correspondant et donc $\mu \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Donc

---

(6)- Cf. (C.A.), Ch. IV, th. 5.

$R^s(\mathfrak{N}) \equiv \mathfrak{N} : \mathfrak{M} \pmod{U}$, donc, puisque $U \subseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$, $R^s(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$.

Définition : Etant donné un idéal premier P et un module $\mathfrak{N}$, on appelle P-composant de $\mathfrak{N}$, l'ensemble $\mathfrak{N}_1$ des $x \in \mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{N} : Ax \not\subseteq P$. On démontre (4) que E est un module contenant $\mathfrak{N}$ et que, $\mathfrak{N}$ étant noethérien, on a $\mathfrak{N} : \mathfrak{N}_1 \not\subseteq P$. P est dit diviseur premier de $\mathfrak{N}$ si en plus $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}_1$. On a alors, en plus du corollaire du théorème 9, le

Théorème 13 : Soit $p_1 , \ldots, p_n$ les idéaux premiers attachés au sous-module $\mathfrak{N}$ du A-module noethérien $\mathfrak{M}$, (p_i) la famille de ceux qui sont minimaux parmi eux, (P_j) celle de ceux qui sont maximaux parmi eux, alors on a les propriétés :

a) Chaque $p_1 , \ldots, p_n$ est un diviseur premier et tout diviseur premier contient l'un d'eux. Les (p_i) sont les diviseurs premiers minimaux de $\mathfrak{N}$, le composant associé étant le $\mathfrak{N}_i$ associé dans toute décomposition normale de $\mathfrak{N}$.

b) Les (p_j) sont les éléments maximaux de la famille des idéaux L tels que $\mathfrak{N} : L \neq \mathfrak{N}$.

Lemme : Les diviseurs premiers sont tous les idéaux premiers contenant $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. En effet si $\mathfrak{N}_P$, P-composant de $\mathfrak{N}$, est différent de $\mathfrak{M}$ on a pour un $x_0 \in \mathfrak{M}$ $\mathfrak{N} : A\, x_0 \subseteq P$ donc $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} : A\, x_0 \subseteq P$.

Inversement si P premier est tel que $P \supseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$, si on avait pour tout $x \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} : A\, x \not\subseteq P$, prenant une base $(x_1 , \ldots, x_r)$ de $\mathfrak{N}$ on aurait $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} = \mathfrak{N} : A\, x_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N} : A\, x_r \subseteq P$ donc $P \supseteq \mathfrak{N} : A\, x_1$ par exemple d'où contradiction. Remarquons que tout diviseur premier est une ombre.

Démonstration du théorème 13 (C.A. Th. 7, Ch. IV) :

a) On écrit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 : \mathfrak{M} \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n : \mathfrak{M}$ et on applique le lemme précédent et la définition du radical des $\mathfrak{N}_1 , \ldots, \mathfrak{N}_n$. Pour un p_i , on applique le théorème sur les composants isolés.

b) On remarque que $\mathfrak{N} : L \neq \mathfrak{N}$ équivaut à $L \subseteq p_1 \cup p_2 \cup \ldots \cup p_n$ (Corollaire du théorème 9) donc $L \subseteq p_j$ pour un j , et que tous les p_j sont des idéaux L particuliers.

On étudiera les idéaux premiers essentiels de l'ombre de $\mathfrak{N}$ au paragraphe 8.

7.- Sur une autre définition des composants isolés :

Soit H un ensemble non vide et multiplicativement fermé d'idéaux H_λ

tous à base finie en A [7]. Prenons par exemple un ensemble multiplicativement fermé S d'éléments de A et les idéaux principaux qu'ils engendrent. L'ensemble $\mathfrak{N}_H$ (noté $\mathfrak{N}_S$ pour l'exemple précédent) des $x \in \mathfrak{M}$ tels que $H_\lambda x \subseteq \mathfrak{N}$ pour un λ est un A-module, H étant fermé. C'est l'union ensembliste des modules $\mathfrak{N} : H_\lambda$. On trouve comme autre cas particulier les $\mathfrak{N}_{[I]}$ définis au paragraphe 4.

Propriété 1 : $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}'$ entraîne $\mathfrak{N}_H \supseteq \mathfrak{N}'_H$.

Propriété 2 : Si $\mathfrak{N}$ est p-primaire, $\mathfrak{N}_H = \mathfrak{N}$ si pour tout λ on a : $H_\lambda \not\subseteq p$ et $\mathfrak{N}_H = \mathfrak{M}$ si pour un λ on a $H_\lambda \subseteq p$.

On applique le corollaire du théorème 9 pour la première proposition. Pour la seconde en supposant $H_\lambda \subseteq p$; H_λ ayant une base finie, on montre comme pour le théorème 12 que pour un n_λ on a $H_\lambda^{n_\lambda} \subseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ donc $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} : H_\lambda^{n_\lambda}$ et $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_H$. On en déduit la :

Propriété 3 : Si $\mathfrak{M}$ est noethérien et $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_p$, la décomposition étant normale, $\mathfrak{N}_H$ est l'intersection des $\mathfrak{N}_i$ dont les radicaux ne contiennent aucun idéal de la famille H.

Ceci montre que $\mathfrak{N}_H$ est un composant isolé au sens du paragraphe 5. On voit comme pour les idéaux (cf. AN) que le complément S d'un idéal premier P redonne le P-composant de $\mathfrak{N}$. Par ailleurs à tout composant isolé on peut associer un ensemble S, on le voit comme pour les idéaux.

8.- Relation entre un module et son ombre.

Soit $\mathfrak{M}$ un A-module noethérien et une décomposition normale :

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n \quad ,$$

les radicaux $p_i = \operatorname{rad} \mathfrak{N}_i$ sont déterminés par $\mathfrak{N}$ donné. L'ombre de $\mathfrak{N}$ s'écrit, d'une manière non réduite en général :

$$\mathfrak{N} : \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 : \mathfrak{M} \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n : \mathfrak{M}$$

"Les idéaux premiers essentiels de $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ sont certains des idéaux $p_1, \ldots, p_n$. Les idéaux premiers minimaux de $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ sont les mêmes que ceux de $\mathfrak{N}$". On raisonne en $A/0 : \mathfrak{M}$ qui est noethérien, chaque $p_1, \ldots, p_n$ contenant par ailleurs $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ et on utilise le théorème 13.

---

(7) - Lorsque $\mathfrak{M}$ est noethérien, en le considérant comme un $A/0 : \mathfrak{M}$-module, on évite cette restriction. La définition générale s'appliqué à un A-module quelconque. Lorsque $0 : \mathfrak{M} = (0)$, $\mathfrak{M}$ est dit normal, dans la terminologie Bourbaki.

Au sujet des composants isolés attachés à un ensemble H d'idéaux, défini au paragraphe 7 on remarque que :

$$\mathfrak{N}_H : \mathfrak{M} = (\mathfrak{N} : \mathfrak{M})_H \quad \text{pour tout} \quad \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$$

"Les composants isolés de $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ sont les ombres de tous les composants isolés de $\mathfrak{N}$. A deux composants isolés distincts sont attachés des ombres distinctes".

En fait le passage de $\mathfrak{N}$ à $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ peut faire perdre un idéal premier essentiel non minimal. Prenons pour $\mathfrak{M}$ le module engendré par 2 éléments σ_1, σ_2 supposés linéairement indépendants sur A supposé noethérien et sans diviseur de zéro. On a $\mathfrak{M} = A\sigma_1 \oplus A\sigma_2$ et soit I un idéal non trivial de A (supposé non corps).

Alors en prenant $\mathfrak{N} = I\sigma_1$ on a $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} = (0)$ qui est premier tandis que $\mathfrak{N}$ n'est pas primaire en général.

9.- Décomposition canonique d'un module.

On va définir les décompositions directes et doublement directes d'un module et en déduire une décomposition unique (que nous appelerons canonique) d'un module noethérien. Cela généralisera un résultat connu pour les idéaux (cf. Van der Waerden, Moderne algebra, 2e édition, tome II, section 89).

Définition : L'intersection $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s$ est dite "directe" en $\mathfrak{M}$ si $\mathfrak{N}_1 + (\mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s) = \ldots = \mathfrak{N}_s + (\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_{s-1}) = \mathfrak{M}$.

Théorème 14 : L'intersection $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s$ est directe si et seulement si les congruences simultanées :

$$\text{(C)} \qquad \alpha \equiv \alpha_i \ (\mathfrak{N}_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, s .$$

ont une solution pour tout choix des α_i en $\mathfrak{M}$.

Si la décomposition est directe et des α_i sont donnés on peut trouver des $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ tels que $\gamma_1 \equiv \alpha_1 (\mathfrak{N}_1)$ et $\gamma_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{N}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_s)$ etc... Alors $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_s$ est une solution.

Inversement soit β un élément de $\mathfrak{M}$ on peut trouver des $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ tels que $\gamma_1 \equiv \beta\,(\mathfrak{N}_1)$, $\gamma_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{N}_{j, j\neq 1})$ et de même pour $\mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_s$ par permutation circulaire, donc l'intersection est directe.

Corollaire : Si deux représentations directes de $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_s$$

<u>sont telles que</u> $\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{N}'_i$ <u>pour tout</u> i , <u>elles sont identiques</u> $(\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}'_i)$.

En effet si par exemple il existait un $\alpha_1 \in \mathfrak{N}'_1 - \mathfrak{N}_1$. Prenant une solution α_0 des congruences $\alpha \equiv \alpha_1(\mathfrak{N}_1)$, $\alpha \equiv 0(\mathfrak{N}_2)$, ..., $\alpha \equiv 0(\mathfrak{N}_s)$ on a $\alpha - \alpha_1 \in \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}'_1$, $\alpha \in \mathfrak{N}'_1$ donc $\alpha \in \mathfrak{N}'_1 \cap \mathfrak{N}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_s = \mathfrak{N}$, et donc $\alpha \in \mathfrak{N}_1$, ce qui contredit $\alpha_1 \notin \mathfrak{N}_1$.

<u>Définition</u> : Une intersection $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s$ est dite <u>doublement directe</u> en $\mathfrak{M}$ si l'intersection des ombres $\mathfrak{N}_i : \mathfrak{M}$ est directe en A . On voit aussitôt qu'elle est directe. Les deux notions coïncident dans un anneau.

<u>Définitions</u> : Deux idéaux I et J sont <u>disjoints</u> (en A) si $I + J = A$, I et le module $\mathfrak{N}$ sont disjoints (en $\mathfrak{M}$) si I et $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ sont disjoints. Deux modules sont disjoints (en $\mathfrak{M}$) si leurs ombres le sont en A .

Si I et $\mathfrak{N}$ sont disjoints on a $\mathfrak{N} : I = \mathfrak{N}$, en effet :

$$\mathfrak{N} : I = \mathfrak{N} : (I + \mathfrak{N} : \mathfrak{M}) = \mathfrak{N} : A = \mathfrak{N} ,$$

et de plus $I\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont disjoints car $I\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \supseteq I$.

Deux modules primaires sont disjoints si et seulement si leurs radicaux le sont (c'est déjà connu pour les idéaux, appliquer alors le théorème 6).

<u>Théorème 15</u> : <u>Les intersections</u> $\mathfrak{N}_1 \cap \ldots\ldots \mathfrak{N}_s$ <u>et</u> $\mathfrak{N}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_t$ <u>sont disjoints si et seulement si pour tout</u> i <u>et tout</u> j <u>les modules</u> $\mathfrak{N}_i$ <u>et</u> $\mathfrak{N}'_j$ <u>sont disjoints</u>.

En passant aux ombres il suffit de démontrer le théorème pour des idéaux. Cela résulte du fait que si I est disjoint de U et de V il est disjoint de UV donc de $U \cap V$.

<u>Corollaire</u> : <u>L'intersection</u> $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$ <u>est doublement directe si et seulement si les</u> $\mathfrak{N}_i$ <u>sont disjoints deux à deux</u>. On applique ce qui précède à $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$, etc...

<u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est noethérien</u> et si $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_n$ est une décomposition primaire (non nécessairement normale) cette dernière est doublement directe si et seulemeht si les radicaux des $\mathfrak{N}_i$ sont disjoints deux à deux.

<u>Théorème 16</u> : Etant donnés deux modules $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ disjoints en $\mathfrak{M}$, supposé noethérien, une décomposition normale de $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ est obtenue en prenant pour composants primaires de $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ les modules qui apparaissent dans deux décompositions normales arbitraires de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$.

La décomposition envisagée a ses idéaux premiers différents par hypothèse.

Reste à voir que l'on n'a aucun élément superflu. Cela résulte du

Corollaire du théorème 14 : On aurait deux représentations doublement directes $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_2'$ avec $\mathfrak{N}_1' \subseteq \mathfrak{N}_2'$.

Les décompositions doublement directes d'un module $\mathfrak{N}$ fixé correspondant donc biunivoquement aux arrangements des idéaux premiers de $\mathfrak{N}$ en sous-ensembles (d'ailleurs isolés) tels que deux idéaux de sous-ensembles différents soient disjoints.

Parmi ces arrangements il y en aura un et un seul qui ne sera pas susceptible de raffinement en un plus grand nombre de sous-ensembles. L'intersection des modules d'un tel sous-ensemble sera appelé <u>composant canonique</u> de $\mathfrak{N}$: il est déterminé d'après la théorie des composants isolés et ne saurait être représenté par l'intersection doublement directe de modules différents de $\mathfrak{N}$. On a obtenu le :

<u>Théorème 17</u> : <u>Tout module $\mathfrak{N}$ est représentable comme intersection finie doublement directe de modules $\mathfrak{N}_i$ dont aucun n'est lui-même intersection finie doublement directe de modules différents de $\mathfrak{N}$. Les $\mathfrak{N}_i$ sont déterminés et font partie de toute décomposition doublement directe de $\mathfrak{N}$</u> .