L. Lesieur

Sur les idéaux irréductibles d'un anneau ou d'un demi-groupe commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. nº 11, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A4_0>

Exposé n° 11

SUR LES IDEAUX IRRÉDUCTIBLES D'UN ANNEAU OU D'UN DEMI-GROUPE COMMUTATIF.

(Exposé de L. LESIEUR, le 24 janvier 1955)

1.- Soit D un demi-groupe commutatif dont l'opération est notée multiplicativement. On a donc :

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad ; \quad \alpha\beta = \beta\alpha \quad .$$

Nous supposons de plus l'existence d'un élément unité. Un idéal a dans D est une partie non vide permise pour l'opération de D, c'est-à-dire vérifiant :

$$\alpha \in a \quad , \quad \xi \in D \text{ entrainent } \xi\alpha \in a \quad .$$

Introduisons une condition de chaine portant sur les idéaux de D qui est, soit la condition de chaine ascendante, soit la condition de chaine descendante affaiblie. Cette dernière exprime que toute suite décroissante minorée est finie ; elle entraine la première dans le cas des idéaux d'un anneau, mais elle en est indépendante dans le cas des idéaux d'un demi-groupe. Cependant les résultats que nous avons en vue sont valables lorsque l'une ou l'autre de ces conditions sont supposées remplies. Les démonstrations sont exposées de manière à retrouver les résultats connus de Gröbner sur les idéaux irréductibles d'un anneau commutatif noethérien [2][1], les résultats spéciaux concernant les idéaux d'un demi-groupe commutatif vérifiant une condition de chaine ou l'autre étant également mentionnés [3]. Les deux cas, celui des idéaux d'un anneau et celui des idéaux d'un demi-groupe, se traitent de la même façon en considérant le treillis des idéaux, que nous appellerons T_A pour un anneau A et T_D pour un demi-groupe D. L'intersection des 2 idéaux a et b de D n'est jamais vide car elle contient toujours le produit ab de ces idéaux, et il n'est pas nécessaire de supposer la présence d'un zéro dans D ni d'inclure la partie vide de D comme idéal. La réunion de 2 idéaux de D est un idéal ; il en résulte que T_D est un treillis distributif multiplicatif ou demi-groupe réticulé. C'est d'ailleurs un sous-demi-groupe réticulé de l'ensemble de tous les

(1) - Voir la bibliographie placée à la fin.

complexes de D qui a été considéré par P. Dubreil dans sa "Contribution à la théorie des demi-groupes" III, [1]. Dans T_D l'intersection est distributive même par rapport à une union infinie, ($\cap$-distributivité générale), et la multiplication des idéaux est distributive par rapport à une union infinie (demi-groupe réticulé complet). Il en résulte que T_D est résidué, c'est-à-dire qu'il existe un élément maximum x dans T_D qui vérifie $ax \subseteq b$, idéal de D qu'on note $b : a$. Enfin, l'idéal $D = e$ est élément maximum de T_D et en même temps élément unité pour la multiplication : T_D est entier.

Le treillis des idéaux d'une anneau n'est pas distributif en général car la réunion de 2 idéaux n'est pas un idéal, mais il est modulaire ; il est en outre $\cap$-continu, en ce sens que l'intersection est distributive par rapport à l'union des éléments d'une chaine. Enfin c'est aussi un demi-groupe réticulé complet entier quand on introduit comme multiplication la formation du produit des idéaux. On a donc la propriété suivante :

<u>Propriété</u> (P) .

T_A <u>et</u> T_D <u>sont des demi-groupes réticulés complets</u>, <u>entiers et commutatifs</u>, <u>satisfaisant soit à la condition de chaine ascendante soit à la condition de chaine descendante affaiblie</u>. <u>Ils sont modulaires et</u> $\cap$-<u>continus</u>.

De plus, T_D satisfait à la propriété supplémentaire :

<u>Propriété</u> (S) - T_D <u>est</u> $\cap$-<u>distributif général</u>.

Un élément $\cap$-irréductible est un élément a pour lequel il n'existe aucune décomposition de la forme

(1) $$a = a_1 \cap a_2 \quad , \quad a_1 \supset a \quad , \quad a_2 \supset a$$

Par exemple un idéal premier est $\cap$-irréductible. Si l'on avait (1), on en déduirait $a_1 \cdot a_2 \subseteq a$, avec $a_1 \not\subseteq a$, $a_2 \not\subseteq a$, ce qui est contraire à la définition de a premier. Nous supposerons donc dans la suite que a n'est pas premier.

Dans les treillis T_A et T_D, les éléments de l'anneau A ou du demi-groupe D interviennent quelquefois, et c'est alors sous la forme des idéaux principaux. L'idéal principal des multiples d'un élément α de A ou de D, que nous désignerons encore par (α) est tel que l'on ait dans le treillis des idéaux :

$$a \subseteq (\alpha) \Longrightarrow \exists\, b \text{ tel que } a = b \cdot (\alpha) \quad .$$

Cette propriété peut être prise pour définition d'un élément principal dans un treillis multiplicatif entier commutatif quelconque. Les treillis T_A et T_D jouissent alors de la propriété suivante ; déjà considérée dans un autre mémoire [4] sous le nom de

<u>Propriété</u> (II) - <u>Tout élément de</u> T <u>est union d'éléments principaux</u> :

D'après le mémoire cité [4], les propriété (P) et (II) entrainent alors que tout élément $\cap$-irréductible est <u>primaire</u> (fort) ; si P premier est radical de q-primaire, il existe donc un exposant entier $\rho \geqslant 2$ tel que $p^{\rho} \subseteq q$. Nous limitons ainsi la recherche des éléments $\cap$-irréductibles à la considération des éléments primaires.

Nous appliquerons encore le résultat suivant établi dans [4] moyennant la 1ère partie de la propriété (P) :

<u>Théorème de structure</u> - <u>Si</u> p <u>est un élément premier minimal</u> $\supseteq a$, <u>il existe un élément</u> p-<u>primaire minimum</u> $\bar{a} \supseteq a$. <u>On a</u> $\bar{a} = a : \ell$, <u>avec</u> $\ell \subseteq p$, <u>et</u> $\bar{a}$ <u>est l'élément maximum parmi les éléments résiduels de la forme</u> $a:x$, <u>où</u> $x \not\subseteq p$.

Ce théorème va nous servir à étudier les éléments p-primaires $\supseteq q$.

2.- Soit S le segment $[q,p]$ du treillis T , c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui vérifient $q \subseteq x \subsetneq p$. Si $a \in S$, p est un élément premier minimal $\supseteq a$ puisque p est premier minimal $\supseteq q$. Le théorème de structure montre donc l'existence d'un élément $\bar{a}$ p-primaire, et l'application $a \rightarrow \bar{a}$ vérifie :

$$\bar{a} \supseteq a \quad ; \quad a \supseteq b \text{ entraine } \bar{a} \supseteq \bar{b} \quad ; \quad \bar{\bar{a}} = \bar{a} \quad .$$

Elle est donc une application de fermeture algébrique du segment S sur l'ensemble $\bar{S}$ des éléments p-primaires de ce segment. Il en résulte que $\bar{S}$ est un sous-demi-treillis complet de S pour l'intersection ; ce n'est pas un sous-treillis de S car l'union de 2 éléments p-primaires n'est pas en général p-primaire. Mais $\bar{S}$ constitue un ensemble ordonné en treillis complet. Nous désignerons les opérations d'union et d'intersection dans $\bar{S}$ par les symboles $\vee$ et $\cap$, celles de S et T étant notées $\cup$ et $\cap$. Si $a_i \in \bar{S}$, on a immédiatement :

$$\vee a_i = \overline{\cup a_i} \qquad (2)$$

<u>Propriété 1</u> - <u>Les résiduels</u> $q:m$ $(m \not\subseteq q)$ <u>sont des éléments de</u> $\bar{S}$.

Soit en effet $a=q:m$, avec $m \not\subseteq q$. On a donc $ma \subseteq q$, d'où $a \subsetneq p$

puisque q est p-primaire. Il en résulte $a \in S$. D'après le théorème de structure, on a $\bar{a} = a:\ell$, avec $\ell \notin p$. On en déduit :

$$\bar{a} = (q:m):\ell = (q:\ell):m = q:m = a \ .$$

<u>Propriété 2</u> - $\bar{S}$ <u>est modulaire et</u> $\cap$-<u>continu</u>.

$\bar{S}_D$ <u>est de plus</u> $\cap$-<u>distributif général</u>.

On s'appuie sur la modularité et l'inter-continuité de S, qui résulte de la propriété (P). On veut démontrer la relation :

$$a \cap (b \vee c) = b \vee (a \cap c) \quad , \quad b \subseteq a \ .$$

Pour cela il suffit d'établir :

$$a \cap (b \vee c) \subseteq b \vee (a \cap c) \quad , \quad b \subseteq a \ .$$

Or on a d'après la relation (2) et le théorème de structure :

$$b \vee c = \overline{b \cup c} = (b \cup c) : \ell \quad , \quad \ell \notin p \ .$$

Comme a est p-primaire, on peut écrire $a = a:\ell$, d'où :

$$a \cap (b \vee c) = (a:\ell) \cap (b \cup c):\ell = [a \cap (b \cup c)]:\ell$$

et puisque S est lui-même modulaire :

$$a \cap (b \vee c) = [b \cup (a \cap c)]:\ell$$

c'est-à-dire, d'après le théorème de structure :

$$a \cap (b \vee c) \subseteq \overline{b \cup (a \cap c)} = b \vee (a \cap c) \ .$$

On démontre exactement de la même façon que l'inter-continuité de S entraine celle de $\bar{S}$ et que l'inter-distributivité générale de S_D entraine celle de $\bar{S}_D$.

La propriété suivante fait intervenir les idéaux principaux de A ou D, c'est-à-dire les éléments principaux du treillis T.

<u>Propriété 3</u> - a <u>étant un idéal principal</u> $\subseteq p$, <u>on a dans</u> $\bar{S}$:

$$\underline{\overline{q \cup a} \succ \overline{q \cup pa}}$$

c'est-à-dire : il n'existe aucun idéal p-primaire entre $q \cup pa$ et $q \cup a$.

D'après le théorème de structure, on peut prendre

$$\overline{q \cup a} = (q \cup a):\ell \quad , \quad \ell \notin p \ .$$

Si q' est primaire tel que :

$$\overline{q \cup pa} \subseteq q' \subseteq \overline{q \cup a}$$

on a

$$q'\ell \subseteq q \cup a \quad , \quad \ell \not\subseteq p$$

d'où :

$$q \subseteq q \cup q'\ell \subseteq q \cup a$$

et, le treillis T étant modulaire :

$$q \cup q'\ell = (q \cup q'\ell) \cap (q \cup a) = q \cup [(q \cup q'\ell) \cap a] \quad .$$

Comme a est principal on peut écrire :

$$[q \cup q'\ell] \cap a = x\, a$$

Supposons $x \not\subseteq p$. On en déduit $xa \subseteq q \cup q'\ell \subseteq q \cup q' \subseteq q'$; d'où q' étant primaire, $a \subseteq q'$. Il en résulte $q \cup a \subseteq q'$ et $\overline{q \cup a} \subseteq q'$, c'est-à-dire

$$q' = \overline{q \cup a} \quad .$$

Supposons $x \subseteq p$. On en déduit $xa \subseteq pa$ et $q \cup q'\ell = q \cup xa \subseteq q \cup pa$, d'où :

$$q'\ell \subseteq q \cup pa \subseteq \overline{q \cup pa} \quad .$$

Comme $\ell \not\subseteq p$ et $\overline{q \cup pa} \in \bar{S}$, on a alors :

$$q' \subseteq \overline{q \cup pa} \quad \text{et} \quad q' = \overline{q \cup pa}$$

<u>Théorème 1</u> - <u>Le treillis</u> $\bar{S}$ <u>est un treillis modulaire de longueur finie. Le treillis</u> $\bar{S}_D$ <u>est un treillis fini</u>.

Considérons d'abord le segment $[q, q:p]$ de $\bar{S}$. Soit donc x un idéal primaire tel que $q \subseteq x \subseteq q:p$. L'idéal x est dans T l'union d'idéaux principaux a_i ; on a donc :

$$x = \cup\, a_i = \cup\,(q \cup a_i) = \vee\,(\overline{q \cup a_i}) \quad .$$

D'après la propriété 3, $\overline{q \cup a_i} \succcurlyeq \overline{q \cup pa_i}$.

Or la relation $a_i \subseteq q:p$ entraine $pa_i \subseteq q$. D'où

$$\overline{q \cup pa_i} = q \quad .$$

On a donc :

$$\overline{q \cup a_i} \succcurlyeq q \quad .$$

ce qui prouve que dans le segment $[q,q:p]$ de $\bar{S}$, tout élément est union de points. Ce segment est alors un treillis géométrique (Leçons sur la théorie des treillis [5], p. 287). Vérifiant une condition de chaine ascendante ou descendante(2), il vérifie l'autre ([5], p. 272) et c'est un treillis de longueur finie.

(2) - La condition de chaîne descendante affaiblie dans T entraine la condition de chaine descendante dans S et dans $\bar{S}$.

On démontre de même que tous les segments de $\bar{S}$ de la forme $[q:p^n, q:p^{n-1}]$ sont des treillis géométriques de longueur finie. Par suite le treillis $\bar{S}$ lui-même possède une chaine maximale de longueur finie allant de q à $p = q:p^{\rho-1}$. C'est donc un treillis modulaire de longueur finie (géométrique ou non). Ceci s'applique à $\bar{S}_A$ et à $\bar{S}_D$. Dans le cas de $\bar{S}_D$, on a en plus la distributivité, qui implique que le treillis $\bar{S}_D$ n'a qu'un nombre fini d'éléments ([6], p. 139). Il n'y a donc qu'un nombre fini d'idéaux p-primaires contenant un idéal p-primaire donné, dans un demi-groupe commutatif D satisfaisant à la condition de chaine ascendante ou à la condition de chaine descendante affaiblie.

3.- Dans un treillis T qui vérifie les propriétés (P) et (II), l'élément q est l'intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles qui sont tous p-primaires et qui appartiennent donc à S. Le rang r de q, ou nombre des éléments qui interviennent dans une décomposition sans éléments superflus, est un invariant de q d'après le théorème de Kurosch-Ore ([5], p. 122). Nous allons déterminer ce nombre r.

<u>Théorème 2</u> - <u>Le rang</u> r <u>de</u> q <u>dans sa décomposition en intersection d'éléments</u> $\cap$-<u>irréductibles est égal à la longueur</u> λ <u>du segment</u> $[q, q:p]$ <u>dans le treillis</u> $\bar{S}$.

Dans le segment $[q, q:p]$, qui est comme on l'a vu au paragraphe précédent un treillis géométrique, l'élément q est l'intersection des λ éléments maximaux m_i

$$q = m_1 \cap m_2 \cap \dots \cap m_\lambda \quad ,$$

qui forment une décomposition de q en éléments $\cap$-irréductibles dans $q:p$, sans éléments superflus. Choisissons, i étant fixé, un élément maximal a_i de S qui vérifie $a_i \cap (q:p) = m_i$. Son existence est assurée même en présence de la condition de chaine descendante affaiblie du fait que $\bar{S}$ vérifie la propriété d'inter-continuité. (L'ensemble des $x \in \bar{S}$ qui vérifient $(q:p) \cap x = m_i$ est inductif et admet un élément maximal d'après le théorème de Zorn). L'élément a_i est $\cap$-irréductible, car la relation $a_i = q_1 \cap q_2$, avec $q_1 \supset a_i$, $q_2 \supset a_i$, entrainerait

$$m_i = q_1 \cap (q:p) \cap q_2 \cap (q:p)$$

d'où, puisque m_i est $\cap$-irréductible dans $q:p$, $m_i = q_1 \cap (q:p)$ ou $m_i = q_2 \cap (q:p)$, ce qui contredirait le choix de a_i maximal.

Considérons l'élément

$$h = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_\lambda \quad .$$

On a

$$(3) \qquad h \cap q:p = (a_1 \cap q:p) \cap \ldots \cap (a_\lambda \cap q:p) = q \quad .$$

et

$$q \subseteq h$$

Supposons qu'on ait $q \subset h$, donc $h \not\subseteq q$. D'après la propriété 1, $q:h$ est p-primaire, donc $(q:h):p \supset q:h$. Or, d'après (3) :

$$q:h = (q:p):h = (q:h):p$$

Il en résulte

$$q = h = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_\lambda \quad .$$

Cette décomposition en intersection de λ éléments a_i $\cap$-irréductibles est non superflue, car si l'on avait

$$a_1 \supseteq a_2 \cap \ldots \cap a_\lambda$$

on en déduirait

$$a_1 \cap (q:p) = m_1 \supseteq m_2 \cap m_3 \cap \ldots \cap m_\lambda \quad ,$$

ce qui est impossible puisque la décomposition de q au moyen des m_i ne possède pas d'éléments superflus. Le rang r de q est bien égal à λ .

Du théorème 2 on déduit immédiatement le suivant, établi par Gröbner dans le cas des idéaux d'un anneau commutatif noethérien :

<u>Théorème 3</u> - <u>Pour que</u> q <u>soit</u> $\cap$-<u>irréductible</u>, <u>il faut et il suffit que</u> q <u>soit primaire et qu'il n'existe aucun élément primaire entre</u> q <u>et</u> $q:p$.

La condition q primaire est un résultat de [4]. La condition $q:p \succ q$ dans $\bar{S}$ est le cas particulier du théorème 2 relatif au cas $r = \lambda = 1$.

La démonstration donnée ici est donc valable pour les idéaux d'un demi-groupe abélien avec élément unité satisfaisant à la condition de chaine ascendante ou <u>descendante affaiblie</u>, et plus généralement pour tout demi-groupe réticulé satisfaisant aux propriétés (P) et (II) mentionnées au paragraphe 1.

<u>Problèmes</u> : 1 - Peut-on se dispenser de l'existence d'un élément unité dans le demi-groupe D , c'est-à-dire supposer T quasi-entier, au lieu d'entier ?

2 - Caractériser les idéaux $\cap$-irréductibles d'un demi-groupe

abélien avec élément unité, ne vérifiant aucune condition de chaine pour les idéaux.

3 - Caractériser les idéaux irréductibles d'un demi-groupe ou d'un anneau non commutatif, 1) avec condition de chaine, 2) sans condition de chaine.

4 - Peut-on, dans la propriété (P), remplacer modulaire par semi-modulaire ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DUBREIL - "Contribution à la théorie des demi-groupes, III". (Bull. Soc. Math. de France, 81, (1953), p. 289-306).

[2] W. GRÖBNER - "Über irreduzible Ideale in kommut. Ringen", (Math. Annalen., 110 (1934), p. 197-222). "Ein irreduz. Kriter. für Primäriideale in kommut. Ringen". (Monat. Math. Osterreich, 55 (1951), p. 138-145).

[3] L. LESIEUR - "Sur les idéaux irréductibles d'un demi-groupe" (Rend. cont. Sémin. Mat. Univers. Padova. 24 (1955), p. 29-37).

[4] L. LESIEUR - "Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaine" (Bull. Soc. Math. de France, 1955).

[5] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT - "Leçons sur la théorie des treillis..." (Paris, Cahiers Scien., 1953).

[6] G. BIRKHOFF - "Lattice Theory" (New-York, revised edition, 1948).