

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

M. JAFFARD

Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 27, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A13_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55

-:-:-

Exposé n° 27

SUR LES GROUPE RÉTICULÉS ASSOCIÉS A UN GROUPE ORDONNÉ.

(Exposé de M. JAFFARD, le 23 mai 1955).

-:-:-

Par groupe ordonné, nous entendrons dans tout cet exposé un groupe abélien muni d'une structure d'ordre (en général partiel) compatible avec sa structure de groupe.

Etant donné un groupe ordonné G , un des problèmes essentiels de la théorie de la divisibilité est de déterminer quand et comment on peut le considérer comme un sous-groupe d'un produit direct ordonné $\prod_{i \in I} G_i$, tous les G_i étant des groupes totalement ordonnés. Lorsque G est plongé dans un tel produit direct ordonné, on dit que l'on a obtenu une réalisation de G .

Pour obtenir une telle réalisation, on a avantage à procéder en deux temps : 1) On plonge G dans un groupe réticulé Γ .

2) On cherche une réalisation de Γ .

Le deuxième problème qui peut donc s'énoncer "quand et comment peut-on réaliser un groupe réticulé G comme un sous-groupe d'un produit direct ordonné $\prod_{i \in I} G_i$ de groupes totalement ordonnés" a été étudié en détail : Lorenzen [7] a montré que tout groupe réticulé Γ peut être considéré comme un sous-groupe propre d'un tel produit direct (rappelons qu'un sous-groupe réticulé H d'un groupe réticulé G est dit propre ou coréticulé, si les opérations inf et sup sont les mêmes dans H et dans G). Nous avons montré [3] comment, dans certains cas, les groupes G_i peuvent être déterminés de manière unique et [5] quels sont les groupes réticulés tels que l'on puisse prendre pour I un ensemble fini d'indices.

Nous nous intéresserons ici au problème 1) en cherchant à déterminer le plus exactement possible tous les groupes réticulés dans lesquels on peut plonger G .

Lorenzen a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que

l'on puisse plonger le groupe ordonné G dans un groupe réticulé est que G soit semi-clos, c'est-à-dire que pour tout $x \in G$ la relation $x^n \geq 1$ (n étant un entier > 0) entraîne $x \geq 1$.

Supposons que G soit plongé dans un groupe réticulé Γ . Comme toute intersection de sous-groupes propres de Γ est encore un sous-groupe propre de Γ , on voit qu'il existera un sous-groupe propre Λ de Γ contenant G et tel que tout sous-groupe propre de Γ contenant G contienne Λ . Λ peut être caractérisé par la propriété intrinsèque suivante : tout sous-groupe propre de Λ contenant G est confondu avec Λ . Un tel groupe réticulé contenant G sera dit groupe de Lorenzen attaché à G . Ces groupes de Lorenzen sont les seuls qui vont nous intéresser par la suite.

Théorème 1 : Un groupe réticulé Λ contenant G est groupe de Lorenzen de G si et si seulement tout élément de Λ est de la forme :

$$\frac{\inf(x_1, \dots, x_n)}{\inf(y_1, \dots, y_m)} \quad \text{avec} \quad x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in G.$$

Supposons que G soit contenu dans le groupe réticulé Γ . On voit que tout élément de cette forme appartient nécessairement au groupe de Lorenzen de G défini par Λ . Soit Λ l'ensemble de ces éléments. Λ est nécessairement un sous-groupe de Γ car (les symboles X et Y désignant des sous-ensembles finis de G) on a :

$$\frac{\inf X_1}{\inf Y_1} \cdot \frac{\inf X_2}{\inf Y_2} = \frac{\inf (X_1 X_2)}{\inf (Y_1 Y_2)}$$

C'est un sous-groupe ^{propre} de Γ car, en réduisant préalablement au même dénominateur) on voit que :

$$\inf \left(\frac{\inf X_1}{\inf Y}, \frac{\inf X_2}{\inf Y} \right) = \frac{\inf (X_1 \cup X_2)}{\inf Y}. \quad \text{D'où le théorème.}$$

Λ étant un groupe de Lorenzen de G , on peut définir une application $X \longrightarrow X_r$ de l'ensemble des parties finies de G dans l'ensemble des parties de G de la manière suivante :

$$x \in X_r \iff \{ x \geq \inf X \text{ (dans } \Lambda) \}$$

On voit alors que X et Y étant deux sous-ensembles finis de G on a les relations suivantes :

$$(1) \quad X \subset X_r$$

$$(2) \quad X \subset Y_r \text{ entraîne } X_r \subset Y_r$$

$$(3) \quad (a)_r = a G_+ = (a)$$

$$(4) \quad a X_r = (a X)_r$$

G_+ désignant l'ensemble des éléments de G qui sont ≥ 1 .

X_r est dit le r -idéal engendré par X .

Plus généralement on dit que l'on a défini sur le groupe ordonné G un système d'idéaux finis si on s'est donné une application $X \longrightarrow X_r$ de l'ensemble des parties finies de G dans l'ensemble des parties de G vérifiant les relations 1) à 4). On montre alors que sur l'ensemble des idéaux ainsi définis (r -idéaux) on peut définir un produit en posant :

$$X_r \cdot Y_r = (X Y)_r$$

On dit que le groupe G vérifie la propriété $r - \gamma$ si par rapport à ce produit les r -idéaux forment un semi-groupe, c'est-à-dire si :

$$(5) \quad X_r \times Y_r = X_r \times Y'_r \longrightarrow Y_r = Y'_r$$

Λ étant un groupe de Lorenzen de G , définissant sur G le système des r -idéaux, on voit que G vérifie $r - \gamma$. En outre on peut identifier Λ au groupe des quotients associé au semi-groupe des r -idéaux en identifiant tout élément

$$\frac{\inf (x_1, \dots, x_n)}{\inf (y_1, \dots, y_m)} \quad \text{de } \Lambda \text{ à l'élément } \frac{(x_1, \dots, x_n)_r}{(y_1, \dots, y_m)_r}$$

de ce groupe des quotients. En particulier, on identifie aussi l'élément x de G à l'idéal principal $(x) = x G_+$. On voit alors que la relation d'ordre défini sur Γ peut être encore définie par :

$$(6) \quad \frac{X_r}{Y_r} \geq 1 \iff Y_r \supset X_r.$$

Réciproquement supposons que l'on se donne sur G un système de r -idéaux finis formant un semi-groupe, c'est-à-dire tel que G vérifie la propriété $r - \gamma$. On peut considérer le groupe des quotients Λ de ce semi-groupe comme un groupe réticulé en le munissant de la structure d'ordre définie par la relation (6). En identifiant chaque élément x de G à l'idéal principal (x) , on voit que G est un sous-groupe ordonné de Λ et comme tout élément $\frac{X_r}{Y_r}$ de Λ est alors de la forme $\frac{\inf X}{\inf Y}$, Λ est groupe de Lorenzen de G en vertu du théorème 1.

D'où :

Théorème 2 : Les groupes de Lorenzen de G correspondent biunivoquement aux systèmes d'idéaux finis sur G formant un semi-groupe.

Etant donnés sur G deux systèmes d'idéaux finis, le r -système et le r' -système, on dit que le r -système est plus fin que le r' -système si pour tout sous-ensemble fini X de G on a $X_r \subset X_{r'}$.

Si le r -système est plus fin que le r' -système l'égalité $X_r = Y_r$ entraîne $X_{r'} = Y_{r'}$.

En effet $X_r = Y_r$ entraîne $X \subset Y_{r'}$ donc $X_{r'} \subset Y_{r'}$. De même $Y_{r'} \subset X_{r'}$. Parmi tous les systèmes d'idéaux finis que l'on peut définir sur G , il en existe un plus fin que tous les autres, c'est le s-système défini par :

$$X_s = \bigcup_{x \in X} (x)$$

et un moins fin que tous les autres, c'est le v-système défini par :

$$X_v = \bigcap_{(x) \supset X} (x)$$

Etant donné un système de r -idéaux finis sur le groupe ordonné G , on dit que G est r -clos ou vérifie la propriété $r - \delta$ si la relation $x X_r \subset X_r$ entraîne toujours $1 \leq x$.

On montre en particulier que G est s -clos si et seulement si il est semi-clos : Supposons G s -clos et soit $x^n \geq 1$ (n entier > 0). On a :

$$(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})_s x = (x^n, x, \dots, x^{n-1})_s \\ \subset (1, x, \dots, x^{n-1})_s \text{ donc } x \geq 1. \text{ } G \text{ est semi-clos.}$$

Réciproquement, supposons G semi-clos. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}_s$ et x tel que $x X_s \subset X_s$. D'après la définition des s -idéaux, pour tout i ($1 \leq i \leq n$) $\exists \varphi(i)$ tel que $1 \leq \varphi(i) \leq n$ et $x x_i \geq x_{\varphi(i)}$. En itérant on trouve : $x^n x_i \geq x_{\varphi^n(i)}$. Considérons la suite $\varphi(i), \varphi^2(i), \dots$ et soit p un nombre tel que $\varphi^p(1) = \varphi^{p+q}(1)$. Posons $i = \varphi^p(1)$. On a $\varphi^q(i) = i$ $x^q x_i \geq x_i$ donc $x^q \geq 1$ et, G , étant semi-clos, $x \geq 1$. G est donc s -clos.

Si G est le groupe de divisibilité d'un corps K par rapport à un ordre A de ce corps, les idéaux (fractionnaires) finis de Dedekind de A définissent sur G un système d'idéaux finis, le d -système. On montre que G est d -clos si et seulement si A est intégralement clos dans K .

Si G vérifie la propriété $r - \gamma$ il vérifie $r - \delta$: Supposons en effet que G vérifie $r - \gamma$ et soit $x X_r \subset X_r$. On en déduit

$X_r = (x X \cup X)_r = (x, 1)_r \times X_r$, d'où en simplifiant par X_r : (1) = $(x, 1)_r$ ou $x \geq 1$. G vérifie bien $r - \delta$. Le groupe G peut vérifier $r - \delta$ sans vérifier $r - \gamma$. Toutefois s'il vérifie $r - \delta$ on montre que l'on peut définir un système d'idéaux finis moins fin que le r -système, le r_a -système, tel que G vérifie $r_a - \gamma$. Le r_a -système est ainsi défini :

$$x \in X_{r_a} \iff \exists Z_r \text{ avec } x Z_r \subset X_r \times Z_r$$

Le r_a -système est le plus fin parmi les systèmes moins fins que r et vérifiant la propriété γ .

Si le r -système est plus fin que le r' -système et si G vérifie $r' - \delta$, il vérifie également $r - \delta$:

En effet l'égalité $x X_r \subset X_{r'}$ entraîne $x X \subset X_{r'}$ ou $x X_{r'} \subset X_{r'}$ donc $x \geq 1$.

On en déduit le théorème annoncé au début :

Théorème 3 : Le groupe ordonné G peut être plongé dans un groupe réticulé si et seulement si il est semi-clos.

Le théorème 2 montre que G peut être plongé dans un groupe réticulé si et si seulement il existe sur G un système d'idéaux formant un semi-groupe, ce qui revient à dire en vertu de ce qui précède qu'il existe sur G un système de r -idéaux tel que G vérifie $r - \delta$ ou encore que G vérifie $s - \delta$.

Un homomorphisme f d'un groupe réticulé G dans un groupe réticulé G' est dit propre si pour tout couple $x, y \in G$ on a :

$$f(\inf(x, y)) = \inf(f(x), f(y)).$$

Théorème 4 : Etant donnés sur le groupe ordonné G deux systèmes d'idéaux finis, le r -système et le r' -système tels que G vérifie les propriétés $r - \gamma$ et $r' - \gamma$ et tels que le r -système soit plus fin que le r' -système, l'application identique de G sur lui-même peut se prolonger d'une et d'une seule manière en un homomorphisme propre du groupe de Lorenzen $\wedge_r$ relatif au r -système sur le groupe de Lorenzen $\wedge_{r'}$ relatif au r' -système.

Cette application f si elle existe est nécessairement unique car on aura alors :

$$f \left(\frac{\inf(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\inf(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right) = \frac{\inf(f(x_1), \dots, f(x_n))}{\inf(f(y_1), \dots, f(y_m))} = \frac{\inf(x_1, \dots, x_n)}{\inf(y_1, \dots, y_m)}$$

les opérations inf étant celles définies sur Λ_r dans le premier membre de l'égalité et celles définies sur $\Lambda_{r'}$ dans les deux autres.

Montrons que f existe :

$$\text{Soit } f : \frac{X_r}{Y_r} \longrightarrow \frac{X_{r'}}{Y_{r'}} .$$

On définit bien ainsi une application de Λ_r dans $\Lambda_{r'}$ car $\frac{X_r}{Y_r} = \frac{X_{r'}}{Y_{r'}}$

entraîne $X_r \times Y_{r'} = Y_r \times X_{r'}$ donc, puisque r est plus fin que r' :

$$X_{r'} \times Y_{r'} = Y_{r'} \times X_{r'} \quad \text{ou} \quad \frac{X_{r'}}{Y_{r'}} = \frac{X_{r'}}{Y_{r'}} .$$

On vérifie immédiatement que cette application est un homomorphisme de Λ_r sur $\Lambda_{r'}$. Cet homomorphisme est propre car (une fois réduits au même dénominateurs) on a :

$$f(\inf(X_r/Y_r, X_{r'}/Y_{r'})) = f((X \cup X')_r/Y_r) = \inf(f(X_r/Y_r), f(X_{r'}/Y_{r'})) .$$

D'où le théorème.

En particulier à tout groupe de Lorenzen Λ_r de G défini par un système des r -idéaux de G (G vérifiant $r - \chi$) correspond un homomorphisme propre f_r de $\Lambda_{s_a} = \Lambda$ sur Λ_r .

Le noyau $H_r = f_r^{-1}(1)$ de cet homomorphisme a les trois propriétés suivantes :

1) C'est un sous-groupe isolé de Λ (c'est-à-dire tel que les relations $1 \leq x \leq y$ et $y \in H_r$ entraînent $x \in H_r$) .

2) c'est un sous-groupe propre de Λ .

3) Il est tel que $H_r \cap G = \{1\}$.

Soit réciproquement un sous-groupe H de Λ isolé, propre et tel que $H \cap G = \{1\}$. Soit f l'application canonique de Λ sur $\Lambda/H = \Gamma$. H étant un sous-groupe isolé de G , on voit que l'on peut définir sur Γ une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe en prenant pour éléments ≥ 1 dans Γ les images des éléments ≥ 1 dans Λ (structure d'ordre canonique). En tenant compte du fait que H est propre, on voit que Γ est alors réticulé et que l'application f est propre.

Enfin $H_r \cap G = \{1\}$ montre que G peut être identifié à son image par f . Λ étant groupe de Lorenzen de G , il n'existe pas de sous-groupe propre de Λ contenant G et autre que Λ . On en déduit que la même propriété est vraie pour Γ qui est donc un groupe de Lorenzen Λ_r de G .

On a $H = H_r$.

Il y a donc correspondance biunivoque entre les sous-groupes isolés propres de Λ dont l'intersection avec G est $\{1\}$ et les groupes de Lorenzen de G .

Soient sur G deux systèmes d'idéaux, formant semi-groupe, le r -système et le r' -système. Le r -système est plus fin que le r' -système si et seulement si $H_r \subset H_{r'}$: supposons le r -système plus fin que le r' -système et soit $X_{s_a} / Y_{s_a} \in H_r$. On a par définition de $H_r : X_r = Y_r$, donc $X_{r'} = Y_{r'}$ et $X_{s_a} / Y_{s_a} \in H_{r'}$. Par suite $H_r \subset H_{r'}$.

Supposons réciproquement $H_r \subset H_{r'}$. Soit $x \in X_r$. On a dans $\Lambda_r : X_r \leq (x)$. Puisque Λ_r est isomorphe à Λ/H_r ordonné canoniquement, il existe Y_{s_a} et Z_{s_a} tel que l'on ait dans $\Lambda : Y_{s_a}/Z_{s_a} \in H_r X_{s_a}$ et $Y_{s_a}/Z_{s_a} \leq x$. D'où $Y_{s_a}/Z_{s_a} \in H_{r'} X_{s_a}$ et comme $\Lambda_{r'}$ est isomorphe à $\Lambda/H_{r'}$ ordonné canoniquement on a dans $\Lambda_{r'} : X_{r'} \leq (x)$ ou $x \in X_{r'}$. Donc $X_r \subset X_{r'}$ et le r -système est plus fin que le r' -système. Par suite :

Théorème 5 : Λ étant le groupe de Lorenzen de G défini par le système des s_a -idéaux de G , il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupes isolés propres de Λ dont l'intersection avec G est $\{1\}$ et les groupes de Lorenzen de G . Si H_r désigne le sous-groupe correspondant au r -système d'idéaux sur G le r -système est plus fin que le r' -système si et seulement si $H_r \subset H_{r'}$.

On voit que les sous-groupes H_r , ordonnés par inclusion, forment un ensemble inductif. Il en est donc de même des systèmes d'idéaux sur G formant semi-groupes, si on les ordonne par la relation :

$r \leq r' \iff$ le r -système est plus fin que le r' -système.

Le théorème de Zorn montre alors que parmi tous ces systèmes d'idéaux il en existe qui sont moins fins que tous les autres. On peut les appeler systèmes d'idéaux caractéristiques et les groupes de Lorenzen correspondants groupes de Lorenzen caractéristiques. Un problème qui reste ouvert est celui de savoir s'il existe plus d'un tel système.

A quelle condition un groupe ordonné G est-il égal à l'un de ces groupes de Lorenzen Λ_r ?

Il faut et il suffit pour cela qu'à tout r -idéal X_r de G corresponde un élément x de G tel que $X_r = (x)$, c'est-à-dire que tout r -idéal soit principal. Lorsqu'il en est ainsi on dira que G vérifie la propriété $r - \alpha$. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit réticulé étant qu'il vérifie la condition $v - \alpha$, il en résulte en particulier que tout groupe réticulé G est identique à son groupe de Lorenzen Λ_v . Ce que nous avons vu plus haut montre alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe réticulé G n'admette pas d'autre groupe de Lorenzen que lui-même est qu'il soit identique à son groupe Λ_{s_a} , donc que son s_a -système soit identique à son v -système. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que G soit totalement ordonné. En effet, si G est totalement ordonné le s -système est identique au v -système. Supposons que G ne soit pas totalement ordonné. Il existerait alors deux éléments a et b de G tels que $1 < a, b$ et $1 = \inf(a, b)$. Par suite $(a, b)_v = 1$. Or, on peut montrer que s_a -système est ainsi défini :

$$x \in X_{s_a} \iff \exists n > 0 \text{ avec } x^n \in (X_s)^n$$

Quel que soit l'entier $n > 0$, $1 \notin [(a, b)_s]^n$, donc $(a, b)_v \neq (a, b)_{s_a}$ et s_a -système n'est pas identique au v -système. D'où

Théorème 6 : Pour que le groupe réticulé G n'admette pas d'autre groupe de Lorenzen que lui-même, il faut et il suffit qu'il soit totalement ordonné.

Soit alors G un groupe semi-clos non totalement ordonné. On peut définir une suite de groupe ordonné :

$$G = \Lambda_0 < \Lambda_1 < \dots < \Lambda_i < \dots$$

où Λ_i est le s_a -groupe de Lorenzen de Λ_{i-1} . Aucun des Λ_i n'est totalement ordonné et on a donc pour tout i : $\Lambda_i \neq \Lambda_{i+1}$.

Théorème 7 : Si on a sur G deux systèmes d'idéaux finis r et r' tels que G vérifie $r - \gamma$, $r' - \alpha$ et que r soit plus fin que r' , le groupe $\Lambda_{r'}$ est facteur direct de Λ_r .

On a $G = \Lambda_{r'}$, donc $\Lambda_{r'} \subset \Lambda_r$. Soit d'autre part H le noyau de l'application canonique $\Lambda_r \longrightarrow \Lambda_{r'}$:

$$X_r/Y_r \in H \iff X_{r'} = Y_{r'}$$

Pour tout élément X_r/Y_r de Λ_r soit $\varphi(X_r/Y_r) \in \Lambda_{r'}$ défini par l'égalité : $X_r/Y_r = (X_{r'}/Y_{r'}) \times \varphi(X_r/Y_r)$

Par hypothèse $\exists x, y \in G$ tels que $X_{r'} = (x)$, $Y_{r'} = (y)$, donc
 $\varphi(X_{r'}/Y_{r'}) = (Xy)_{r'}/(Yx)_{r'}$.

Or $(Xy)_{r'} = X_{r'} \times (y)_{r'} = X_{r'} \times Y_{r'} = (Yx)_{r'}$. Par suite $\varphi(X_{r'}/Y_{r'}) \in H$.

Les égalités $\Lambda_{r'} \cap H = \{1\}$ et $\Lambda_r = \Lambda_{r'}$, H montrent alors le théorème.

Corollaire : Tout groupe réticulé est facteur direct de chacun de ses groupes de Lorenzen.

Si G est réticulé on a en effet $G = \bigwedge_v$.

Soit G semi-clos non totalement ordonné, $\bigwedge$ son s_a -groupe de Lorenzen, Γ le s_a -groupe de Lorenzen de $\bigwedge$. On a :

$$G \subset \bigwedge \subset \Gamma \quad \text{et} \quad G \neq \bigwedge \neq \Gamma.$$

L'intersection de tous les sous-groupes propres de Γ contenant G est un groupe de Lorenzen $\bigwedge'$ de G . On a $\bigwedge' \neq \bigwedge$ car $\bigwedge$ n'est pas un sous-groupe propre de Γ .

On voit de même que $\bigwedge' \cap \bigwedge \neq \bigwedge, \bigwedge'$.

Par suite le groupe G étant plongé dans le groupe réticulé Γ , ce dernier peut contenir plusieurs groupes de Lorenzen de G , mais un seul en est un sous-groupe propre.

Ici, $\bigwedge$ n'est pas un sous-groupe propre de Γ , et cependant :

- 1) $\bigwedge$ est facteur direct de Γ
- 2) la projection $\Gamma \rightarrow \bigwedge$ est propre.

On appelle valuation du groupe ordonné G tout homomorphisme croissant de G dans un groupe totalement ordonné. Si sur G est défini un système de r -idéaux finis, on dit qu'une valuation v de G est une r -valuation si elle vérifie la condition suivante pour tout sous-ensemble fini X de G :

$$x \in X_{r'} \longrightarrow \exists a \in X \text{ avec } v(x) \geq v(a)$$

Exemples :

- 1) Toute valuation de G est une s -valuation
- 2) G étant groupe de divisibilité d'un corps K par rapport à un ordre A de ce corps, les s -valuations de G correspondent aux valuations de Krull de K dont l'anneau de valuation contient A .
- 3) Si G est réticulé, il y a identité entre les v -valuations et les valuations propres de G :

Supposons que v soit une valuation propre de G et soit $x \in X_v$.
 Posons $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et soit $y = \inf(x_1, \dots, x_n) \in G$.
 Soit x_i tel que $v(x_i) = \inf(v(x_1), \dots, v(x_n))$. La valuation v étant propre, on a $v(y) = v(x_i)$ et $x \geq y$ entraîne $v(x) \geq v(x_i)$.
 v est bien une v -valuation. Réciproquement soit v une v -valuation de G et soit $y = \inf(x_1, \dots, x_n)$. Comme $y \in (x_1, \dots, x_n)_v$ il existe x_i tel que $v(y) \geq v(x_i)$. Comme d'autre part $v(y) \leq v(x_1), \dots, v(x_n)$ on en déduit $v(y) = \inf(v(x_j))_{1 \leq j \leq n}$
 v est bien une valuation propre de G .

Remarques : Si sur le groupe ordonné G le r -système est plus fin que le r' -système, toute r' -valuation de G est une r -valuation.

Si G vérifie la propriété $r - \delta$ toute r -valuation de G est une r_a -valuation :

Soit v une r -valuation de G et $x \in X_{r_a}$. Par définition on peut trouver $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ tel que $(xZ)_r < (XZ)_r$. On peut supposer les z_i numérotés de façon que $v(z_1) \leq v(z_2), \dots, v(z_n)$. La relation $xz_1 \in (XZ)_r$ entraîne, puisque v est une r -valuation, l'existence de $a \in X$ et $z_i \in Z$ tels que $v(xz_1) \geq v(az_i)$. La relation $v(z_1) \leq v(z_i)$ entraîne alors $v(x) \geq v(a)$ et v est une r_a -valuation de G .

Soit un système de r -idéaux finis sur le groupe ordonné G tel que G vérifie la propriété $r - \gamma$. Soit $\bigwedge_r$ son groupe de Lorenzen correspondant. Toute valuation propre de $\bigwedge_r$ induit une r -valuation de G :
 En effet $x \in \{x_1, \dots, x_n\}_r$ entraîne
 $x \geq \inf(x_1, \dots, x_n)$ (dans $\bigwedge_r$), donc $v(x) \geq \inf(v(x_1), \dots, v(x_n))$.
 Soit réciproquement v une r -valuation de G . On peut la prolonger d'une manière et d'une seule en une valuation propre de $\bigwedge_r$ en posant :

$$v(X_r/Y_r) = \inf(v(x))_{x \in X} / \inf(v(y))_{y \in Y}$$

Comme on peut montrer que tout groupe réticulé peut être réalisé comme un sous-groupe propre d'un produit direct ordonné de groupes totalement ordonnés, il résulte de ce qui précède que si le groupe ordonné G vérifie la propriété $r - \delta$, il existe une famille $(v_i)_{i \in I}$ de r -valuations de G qui définit une réalisation de G dans le groupe $\prod_{i \in I} v_i(G)$. En particulier, dans le cas où G est groupe de divisibilité d'un corps K par rapport à ordre A intégralement clos dans K , on obtient le théorème de Krull en prenant $r = d$:

Tout anneau d'intégrité intégralement clos dans son corps des quotients est intersection d'anneau de valuation.

Soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de valuations du groupe ordonné G définissant une réalisation de G (comme sous-groupe du produit direct ordonné $\prod_{\iota \in I} v_\iota(G)$). On peut définir une famille de r -idéaux finis sur G en posant :

$$x \in X_r \iff \left\{ \forall \iota \in I, \exists a_\iota \in X \text{ avec } v_\iota(a_\iota) \leq v_\iota(x) \right\}.$$

Le système des r -idéaux sera alors dit défini par les conditions I-valuationnelles. Lorenzen a montré que pour qu'un système de r -idéaux (finis) puisse être défini par des conditions valuationnelles (c'est-à-dire pour que l'on puisse trouver un ensemble $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de valuation de G tel que le r -système soit défini par les conditions I-valuationnelles), il faut et il suffit que G vérifie la condition $r - \chi$. On voit immédiatement que si le r -système est défini par les conditions I-valuationnelles, v_ι est une r -valuation pour tout $\iota \in I$.

G vérifiant la propriété $r - \chi$ (par rapport à un système de r -idéaux), on appelle r -réalisation de G toute réalisation de G telle que le système d'idéaux qu'elle définit sur G (par l'intermédiaire des conditions valuationnelles correspondantes) soit le r -système.

Supposons que G vérifie $r - \chi$ et soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de r -valuations de G définissant une réalisation de G dans $\Gamma = \prod_{\iota \in I} v_\iota(G)$. Chaque v_ι pouvant être considéré comme un homomorphisme propre du groupe de Lorenzen $\bigwedge_r$ sur $v_\iota(G)$, on en déduit un homomorphisme propre $f = \prod_{\iota \in I} v_\iota$ de $\bigwedge_r$ dans Γ . C'est l'homomorphisme canonique de $\bigwedge_r$ sur le groupe de Lorenzen de G défini par Γ . Par suite, pour que f définisse une réalisation de $\bigwedge_r$ il faut et il suffit que le noyau $f^{-1}(1)$ se réduise à $\{1\}$.

Le r' -système défini sur G par les conditions I-valuationnelles est moins fin que le r -système.

Si on a $r = r'$, l'inégalité $X_r \neq Y_r$ entraîne l'existence de $\alpha \in I$ tel que $v_\alpha(X_r) \neq v_\alpha(Y_r)$ et par suite $f(X_r/Y_r) \neq 1$. Donc ce cas $f^{-1}(1) = \{1\}$. Supposons $r \neq r'$. Alors r est strictement plus fin que r' et il existe un r -idéal X_r tel que $X_{r'} \neq X_r$. Soit $x \in X_{r'}$, $x \notin X_r$ et posons $Y = X \cup \{x\}$. La relation $Y \subset X_{r'}$ entraîne $Y_r \subset X_r$.

D'autre part $X_r = Y_r$ implique que pour tout $i \in I$ on a $v_i(X_r) = v_i(Y_r)$ donc $f(X_r/Y_r) = 1$. Donc X_r/Y_r est contenu dans le noyau de f sans être égal à 1. On peut donc énoncer :

Théorème 8 : Etant donné un système de r -idéaux finis sur G tel que G vérifie la propriété $r - \chi$, une famille $(v_i)_{i \in I}$ de r -valuations de G définissant une réalisation de G définit encore une réalisation (propre) de $\bigwedge_r$ si et si seulement les r -idéaux sont ceux définis par les conditions I -valuations, c'est-à-dire si la famille $(v_i)_{i \in I}$ définit une r -réalisation de G .

Le groupe G vérifiant la propriété $r - \chi$ et la famille $(v_i)_{i \in I}$ de r -valuation de G définissant une réalisation de $\bigwedge_r$, on dit [3] que cette réalisation est irréductible si pour tout $\alpha \in I$ la famille $(v_i)_{i \neq \alpha}$ ne définit plus une réalisation de $\bigwedge_r$. On voit alors que le système des r -idéaux est défini par les conditions I -valuatives, mais n'est plus défini par les conditions $C\{\alpha\}$ -valuatives ($\forall \alpha \in I$). Nous dirons qu'un tel ensemble est un ensemble irréductible de r -valuations. Les ensembles irréductibles de r -valuations correspondent donc biunivoquement aux réalisations irréductibles de $\bigwedge_r$. Or il y a au plus une telle réalisation irréductible. Donc :

Théorème 9 : S'il existe un ensemble irréductible de r -valuations de G , il est unique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. JAFFARD. La théorie des Idéaux d'Artin-Prüfer-Lorenzen
- [2] P. JAFFARD. Structure des groupes préordonnés.
Exposés faits au séminaire d'Algèbre de la faculté des Sciences de Paris, Année 1951-1952.
- [3] P. JAFFARD. Contribution à la théorie des groupes ordonnés.
J. Math. pures et appl. Vol. 32 (1953) pp. 203-280.
- [4] P. JAFFARD. La notion de Valuations. L'enseignement mathématique t.40 (1951-1954) pp. 5-26.
- [5] P. JAFFARD. Extensions des groupes réticulés.
Publications scientifiques de l'Université d'Alger. t.1 (1954) pp. 197-222.
- [6] P. JAFFARD. Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné.
à paraître aux Publications scientifiques de l'Université d'Alger.
- [7] J. LORENZEN. Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie
Math. Zeit., Vol. 45 (1939). pp. 533-553.