

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

J. PETRESCO

Sur les commutateurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 6, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A6_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES COMMUTATEURS

Conférence faite par J. PETRESCO, le 22 mars 1954

-:-:-

Il s'agit d'une reconsidération des différentes notions relatives aux commutateurs dans les groupes, d'un point de vue plus général, et qui, tout en restant à l'intérieur de la théorie classique, permet des développements systématiques.

1.- SOUS-GROUPE COMMUTATEUR.

Le sous-groupe commutateur K^2 d'un groupe G est la classe unité modulo $\mathcal{K}^2$, où $\mathcal{K}^2$ est l'équivalence régulière minimum qui jouit de la propriété $ab \equiv ba(\mathcal{K}^2)$; on en déduit que K^2 est le sous-groupe (caractéristique) engendré par les commutateurs $a \circ b = aba^{-1}b^{-1}$, avec $a, b \in G$. Si l'on se propose maintenant de déterminer la relation $a \sim b$ (b est une substitution de a): il existe un ensemble $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ d'éléments non nécessairement différents de G et une substitution $\sigma = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \end{pmatrix}$ opérant dans cet

ensemble telle que $a = a_1 a_2 \dots a_n$, $b = \sigma(a_1 a_2 \dots a_n)$, où on a noté $\sigma(a_1 a_2 \dots a_n) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$, on voit sans difficulté que $\sim$ est une équivalence régulière. Pour²montrer par exemple la transitivité, on déduit de $a = a_1 \dots a_n$, $b = \sigma(a_1 \dots a_n)$, $b = b_1 \dots b_m$, $c = \tau(b_1 \dots b_m)$, que $a = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m b^{-1}$, $c = \tau(b_1 \dots b_m) \cdot \sigma(a_1 \dots a_n) \cdot b^{-1} = \rho(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m b^{-1})$. De plus, $a \sim b \rightarrow a \equiv b(\mathcal{K}^2)$, car $\sigma(a_1 \dots a_n) \equiv a_1 \dots a_n(\mathcal{K}^2)$ - on utilise la décomposition d'une substitution en transposition opérant sur des éléments consécutifs et la régularité de $\mathcal{K}^2$ - et par conséquent si E est la classe unité modulo $\sim$, on a $E \subseteq K^2$. Réciproquement, un commutateur $aba^{-1}b^{-1}$ appartient à E , donc, puisque E est sous-groupe, $K^2 \subseteq E$:

1.1 - K^2 est l'ensemble des substitutions de l'unité; $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b(\mathcal{K}^2)$

2.- SOUS-GROUPE COMMUTATEUR D'UNE RÉUNION.

A et B étant sous-groupes de G , notons $A \cup B$ le sous-groupe qu'ils engendrent, $K^2(A)$ le sous-groupe commutateur de A . Un élément de

$A \cup B$ est de la forme $\prod_{i < n} a_i b_i$ avec $a_i \in A$, $b_i \in B$. Proposons-nous de distinguer parmi ces éléments ceux qui composent le sous-groupe commutateur de $A \cup B$, $K^2(A \cup B)$. Si l'on considère l'ensemble $E(A \cup B)$ des éléments $\prod_i a_i b_i$ avec $\prod_i a_i \in K^2(A)$, $\prod_i b_i \in K^2(B)$, on voit facilement qu'il s'agit d'un sous-groupe. D'autre part un commutateur de $A \cup B$ est de la forme $c = \prod_{i < n} a_i b_i \prod_{j < m} \alpha_j \beta_j (\prod_i a_i b_i)^{-1} (\prod_j \alpha_j \beta_j)^{-1}$ et on voit par exemple que

$$\prod_i a_i \prod_j \alpha_j \prod_i a_i^{-1} \prod_j \alpha_j^{-1} \prod_i a_i \prod_j \alpha_j \prod_i a_i^{-1} \prod_j \alpha_j^{-1} = e.$$

On déduit, d'après 1.1, $c \in E(A \cup B)$, donc $K^2(A \cup B) \subseteq E(A \cup B)$. Réciproquement, de $c \in E(A \cup B)$, on déduit $c = \prod_i a_i b_i \prod_i a_i \prod_i b_i \in K^2(A)K^2(B) \subseteq K^2(A \cup B)$, donc d'après 1.1, $c \in K^2(A \cup B)$ et $E(A \cup B) \subseteq K^2(A \cup B)$.

2.1 - $K^2(A \cup B)$ est l'ensemble des éléments $\prod_i a_i b_i$, avec $\prod_i a_i \in K^2(A)$, $\prod_i b_i \in K^2(B)$.

On peut faire l'extension par récurrence de cette propriété à $K^2(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$.

3.- NORMALISANT.

Si $A \subseteq B$, appelons normalisant de A dans B le sous-groupe normal dans B engendré par A , soit $N_B(A)$ et considérons l'ensemble des $\prod_i a_i b_i$ avec $\prod_i b_i = e$, soit $(A, \bar{B})$. Celui-ci est un sous-groupe normal dans $A \cup B$, car si $a \in A$, $b \in B$, on a évidemment $a \cdot \prod_i a_i b_i \cdot a^{-1} \in (A, \bar{B})$ et $b \cdot \prod_i a_i b_i \cdot b^{-1}$ est tel que $b \cdot \prod_i b_i \cdot b^{-1} = bb^{-1} = e$. D'autre part $\prod_i a_i b_i = \prod_i b_i b_1 b_2 \dots b_{i-1} a_i (b_1 b_2 \dots b_{i-1})^{-1} \cdot \prod_i b_i$ et si $\prod_i b_i = e$, on voit que $\prod_i a_i b_i \in N_{A \cup B}(A)$.

3.1 - $N_{A \cup B}(A)$ est l'ensemble des éléments $\prod_i a_i b_i$, avec $\prod_i b_i = e$.

En particulier $N(A)$, le normalisant de A (dans G) est l'ensemble des $\prod_i a_i g_i$, avec $a_i \in A$, $g_i \in G$, $\prod_i g_i = e$.

4.- COMMUTATEUR DE DEUX SOUS-GROUPES.

Notons $A \circ B$ le sous-groupe engendré par les aob , avec $a \in A$, $b \in B$. C'est un sous-groupe normal dans $A \cup B$, car si par exemple $\alpha \in A$, $\alpha \cdot a b a^{-1} b^{-1} \cdot \alpha^{-1} = \alpha a b (\alpha a)^{-1} b^{-1} \cdot b \alpha b^{-1} \alpha^{-1} \in A \circ B$. En particulier $A \circ B$ est normal dans G . Si l'on considère maintenant l'ensemble $(\bar{A}, \bar{B})$ des $\prod_i a_i b_i$ avec $\prod_i a_i = \prod_i b_i = e$, on voit qu'il s'agit d'un sous-groupe normal dans $A \cup B$, et puisque $a b a^{-1} b^{-1} \in (\bar{A}, \bar{B})$, on a $A \circ B \subseteq (\bar{A}, \bar{B})$. Réciproquement si $\prod_i a_i =$

$= \prod_i b_i = e$, on a $\prod_i a_i b_i = \prod_i a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i (a_1 a_2 \dots a_{i-1})^{-1} a_i^{-1} a_i =$
 $= \prod_i c_i a_i$, où $c_i \in A \circ B$, et $\prod_i c_i a_i = \prod_i a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i (a_1 a_2 \dots a_{i-1})^{-1}$
 $\in A \circ B$:

4.1 - $A \circ B$ est l'ensemble des éléments $\prod_i a_i b_i$ avec $\prod_i a_i = \prod_i b_i = e$.

Si $\prod_{i < n} a_i b_i$ est tel que $\prod_i b_i = e$, on a d'après 4.1, $\prod_i a_i^{-1} \prod_i a_i b_i$
 $\in A \circ B$, donc $\prod_i a_i b_i = \prod_i a_i \cdot \prod_i a_i^{-1} \prod_i a_i b_i \in A(A \circ B)$ et par conséquent,
d'après 3.1, $N_{A \circ B}(A) \subseteq A(A \circ B)$. Puisque d'autre part $a \cdot b a^{-1} b^{-1} \in N_{A \cup B}(A)$:

4.2 - On a $N_{A \cup B}(A) = A(A \circ B)$.

En particulier $N(A) = A(A \circ G)$. Z étant le centre de G , $A \subseteq Z$ équivaut
à $A \circ G = e$. On déduit, puisque $A \circ G \subseteq G \circ G = K^2$:

Un sous-groupe normal A est contenu dans Z , ou alors $A \cap K^2 \neq e$; tout
sous-groupe normal minimal est contenu soit dans Z , soit dans K^2 .

De $\prod_{i < n} a_i b_i = \prod_i a_i \cdot \prod_i a_i^{-1} \prod_i a_i b_i \prod_i b_i^{-1} \prod_i b_i$, on déduit également :

4.3 - On a $A \cup B = A(A \circ B)B$; l'ordre des facteurs est indifférent.

5.- LE PRODUIT $A^*(A \circ B)B^*$.

On déduit comme dans 4.3 :

5.1 - Si $A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$, $A^*(A \circ B)B^*$ est l'ensemble des éléments $\prod_i a_i b_i$,
avec $\prod_i a_i \in A^*$, $\prod_i b_i \in B^*$.

On déduit de 5.1 :

5.2 - Si A^* est normal dans A et B^* dans B , $A^*(A \circ B)B^*$ est normal dans
 $A \cup B$.

5.3 - Si $A^* \subseteq A$, $b \in B$, $b [A^*(A \circ B)] b^{-1} \subseteq A^*(A \circ B)$.

En particulier, on a pour $B = G$:

5.4 - Si $A^* \subseteq A$, $A^*(A \circ G)$ est un sous-groupe normal (dans G).

5.5 - Si A est normal et $A \circ G \subseteq A^* \subseteq A$, A^* est normal (dans G).

Si l'on considère une chaîne centrale, c'est-à-dire une chaîne $A \subseteq A_1 \subseteq$
 $\dots \subseteq A_{i-1} \subseteq A_i \subseteq \dots \subseteq G$, telle que $A_i \circ G \subseteq A_{i-1}$, on déduit de 5.5 que tout
sous-groupe intermédiaire d'une chaîne centrale est normal (dans G).

Soit maintenant $A^* \subseteq A$, $\alpha \in A^*$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in A \circ B$. Puisque
 $A \cup B = A(A \circ B)B$, un élément de $A^* \circ (A \cup B)$ est un produit d'éléments de la forme
 $\alpha a c b \alpha^{-1} b^{-1} c^{-1} a^{-1} = \alpha a \alpha^{-1} a^{-1} \cdot a \cdot \alpha c \alpha^{-1} \cdot \alpha b \alpha^{-1} b^{-1} \cdot c^{-1} \cdot a^{-1} \in (A^* \circ A)(A \circ B)$,

car $A \circ B$ est normal dans $A \cup B$, de sorte que :

$$\underline{5.6 - \text{ Si } A^* \subseteq A, A^* \circ (A \cup B) \subseteq (A^* \circ A)(A \circ B) .}$$

En particulier $A \circ (A \cup B) = (A \circ A)(A \circ B)$.

On sait que si B et C sont normaux $AB \circ C = (A \circ C)(B \circ C)$. On déduit en tenant compte de 5.2 et en appliquant 5.6 que si A^* est normal dans A et B^* dans B , $[A^*(A \circ B)B^*] \circ (A \cup B) = [A^* \circ (A \cup B)] [(A \circ B)B^* \circ (A \cup B)] =$
 $= [A^* \circ (A \cup B)] [(A \circ B) \circ (A \cup B)] [B^* \circ (A \cup B)] \subseteq (A^* \circ A)(A \circ B)(B^* \circ B) :$

$$\underline{5.7 - \text{ Si } A^* \text{ est normal dans } A \text{ et } B^* \text{ dans } B, [A^*(A \circ B)B^*] \circ (A \cup B) \subseteq (A^* \circ A)(A \circ B)(B^* \circ B) .}$$

6.- SOUS-GROUPES RÉSOLUBLES.

De 2.1 et 4.3, résulte :

$$\underline{6.1 - \text{ On a } K^2(A \cup B) = K^2(A)(A \circ B)K^2(B) .}$$

$$\underline{6.2 - \text{ Si } B \text{ est normal dans } A \cup B, K^2(AB) \subseteq K^2(A).B .}$$

Notons $K^i(A) = K^2[K^{i-1}(A)] = K^{i-1}(A) \circ K^{i-1}(A)$; si $j+k = i+1$, $K^i(A) = K^j[K^k(A)]$.
 De $K^{i-1}(AB) \subseteq K^{i-1}(A).B$ on déduit en tenant compte de 6.2, $K^i(AB) = K^2[K^{i-1}(AB)]$
 $\subseteq K^2[K^{i-1}(A).B] \subseteq K^i(A).B$, de sorte que :

$$\underline{6.3 - \text{ Si } B \text{ est normal dans } A \cup B, K^i(AB) \subseteq K^i(A).B}$$

$(A \circ B)B = N_{A \cup B}(B)$ est normal dans $A \cup B$; on a donc d'après 4.3 et 6.3, $K^j(A \cup B) = K^j[A.(A \circ B)B] \subseteq K^j(A)(A \circ B)B$; mais $K^j(A)$ est normal dans A , donc d'après 5.2, $K^j(A)(A \circ B)$ est normal dans $(A \cup B)$; si $j+k = i+1$, on a en appliquant de nouveau 6.3, $K^i(A \cup B) \subseteq K^k[K^j(A)(A \circ B).A] \subseteq K^j(A)(A \circ B)K^k(B)$.

$$\underline{6.4 - \text{ On a } K^i(A \cup B) \subseteq K^j(A)(A \circ B)K^k(A), \text{ si } j+k = i+1 .}$$

Si la condition des chaînes descendantes est valable dans G , il existe un nombre n , le degré résoluble de A , tel que $K^{n-1}(A) \neq K^n(A) = K^{n+1}(A)$. Suivant que $K^n(A) = e$ ou $K^n(A) = A$ on dit que A est résoluble ou anti-résoluble (parfait). $K^n(A)$ est un sous-groupe anti-résoluble, réunion des sous-groupes anti-résolubles de A , que nous appelons radical anti-résoluble de A et notons $\bar{K}(A)$, si $A \subseteq B$, $\bar{K}(A) \subseteq \bar{K}(B)$. De 6.4 on déduit :

$$\underline{6.5 - \bar{K}(A \cup B) \subseteq \bar{K}(A)(A \circ B)\bar{K}(B) .}$$

En particulier :

$$\underline{6.6 - \text{ Si } A \text{ et } B \text{ sont normaux dans } A \cup B, \bar{K}(AB) = \bar{K}(A)\bar{K}(B) .}$$

$$\underline{6.7 - \text{ Si } A \text{ et } B \text{ sont résolubles, } \bar{K}(A \cup B) = \bar{K}(A \circ B) .}$$

Ces deux propositions généralisent : si A et B sont normaux et résolubles, AB est résoluble, d'où on déduit l'existence du radical résoluble (Filling) .

7.- SOUS-GROUPES NILPOTENTS.

On peut faire des considérations analogues en remplaçant l'opération K^1 par l'opération O^1 définie comme suit : $O^1(A) = O^{1-1}(A) \circ A$, $O^2(A) = A \circ A = K^2(A)$. En utilisant notamment 5.7 on déduit par récurrence

$$O^1(A \cup B) \subseteq O^1(A)(A \circ B)O^1(B)$$

et si l'on note $\overline{O}(A) = O^n(A)$ où n est défini par : $O^{n-1}(A) \neq O^n(A) = O^{n+1}(A)$ il en résulte :

$$\overline{O}(A \cup B) \subseteq \overline{O}(A)(A \circ B)\overline{O}(B) .$$

8.- FORMES COMMUTATRICES.

Soit $N = [1, 2, \dots, \nu]$ un ensemble fini d'indices et $E = [A_1, A_2, \dots, A_\nu]$ un ensemble de sous-groupes (non nécessairement différents) de G . Considérons un élément quelconque de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$, soit $a = \prod_i a_i^1 a_i^2 \dots a_i^\nu$, avec $a_i^x \in A_x$, $x \in N$. Si N^λ , $\lambda \leq \nu$ est un sous-ensemble de λ éléments de N , soit $N^\lambda = [x_1, x_2, \dots, x_\lambda]$, nous notons $N^\lambda(a)$, le produit obtenu en égalant à e tout élément $a_i^{x_i}$ de l'expression de a pour lequel $x_i \notin N^\lambda$, c'est-à-dire que

$$N^\lambda(a) = \prod_i a_i^{x_1} a_i^{x_2} \dots a_i^{x_\lambda}$$

Nous notons par ailleurs $E^\mu(A_1, A_2, \dots, A_\nu)$, ou encore E^μ , l'ensemble des éléments $a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$, avec $N^\lambda(a) = e$, quel que soit $\lambda < \mu$ et le sous-ensemble N^λ de N . Par définition $E^1(A_1, A_2, \dots, A_\nu) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$. On a évidemment : $E^\nu \subseteq E^{\nu-1} \subseteq \dots \subseteq E^\mu \subseteq \dots \subseteq E^2 \subseteq E^1$. De plus :

8.1 - E^μ est un sous-groupe normal de E^1 , $1 \leq \mu \leq \nu$.

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha &= \prod_j \alpha_j^1 \alpha_j^2 \dots \alpha_j^\nu, \alpha_j^x \in A_x, x \in N, \text{ ceci résulte des relations :} \\ N^\lambda(a\alpha) &= \prod_i a_i^{x_1} \dots a_i^{x_\lambda} \prod_j \alpha_j^{x_1} \dots \alpha_j^{x_\lambda} = N^\lambda(a) \cdot N^\lambda(\alpha) \\ N^\lambda(a^{-1}) &= N^\lambda \left[\prod_i (a_i^\nu)^{-1} \dots (a_i^1)^{-1} \right] = \prod_i (a_i^{x_\lambda})^{-1} \dots (a_i^{x_1})^{-1} = \left(\prod_i a_i^{x_1} \dots a_i^{x_\lambda} \right)^{-1} = \\ &= [N^\lambda(a)]^{-1} \\ N^\lambda \left[\alpha^x a (\alpha^x)^{-1} \right] &= \alpha^x \cdot \prod_i a_i^{x_1} \dots a_i^{x_\lambda} \cdot (\alpha^x)^{-1} = \alpha^x [N^\lambda(a)] (\alpha^x)^{-1}, \\ &\quad x \in N^\lambda \\ N^\lambda \left[\alpha^x a (\alpha^x)^{-1} \right] &= \prod_i a_i^{x_1} \dots a_i^{x_\lambda} = N^\lambda(a), \quad x \notin N^\lambda. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\phi(A_1, A_2, \dots, A_\nu)$ une forme commutatrice de poids ν

8.2 - On a $\phi(A_1, A_2, \dots, A_\nu) \in E^\nu(A_1, A_2, \dots, A_\nu)$.

D'après 4.1 ceci est vrai pour $\nu = 2$. Supposons que la relation soit vraie pour tout $\nu' < \nu$. D'après la définition des formes commutatrices

$$\phi(A_1, A_2, \dots, A_\nu) = \phi_1(A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_1}) \circ \phi_2(A_{\nu_2}, \dots, A_{\nu_2})$$

où $\nu_1, \nu_2 < \nu$, $\nu_1 + \nu_2 = \nu$, les indices $\nu_1, \dots, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_2$, différents, appartiennent à N . Notons $I = [\nu_1, \dots, \nu_1]$, $I' = [\nu_2, \dots, \nu_2]$; on a $I \cup I' = N$. Il s'en suit que tout élément $\varphi \in \phi(A_1, \dots, A_\nu)$ est de la forme

$$\varphi = \prod_k \varphi_k^1 \varphi_k^2$$

ou d'après 4.1, $\prod_k \varphi_k^1 = \prod_k \varphi_k^2 = e$ et d'après l'hypothèse, $\varphi_k^1 = \prod_{i \in I} a_i^{\lambda_1} \dots$ avec $I^{\lambda_1}(\varphi_k^1) = e$, pour tout $\lambda_1 < \nu_1$, $\varphi_k^2 = \prod_{i \in I'} a_i^{\lambda_2} \dots$ avec $I'^{\lambda_2}(\varphi_k^2) = e$, pour tout $\lambda_2 < \nu_2$. Soit maintenant $\lambda < \nu$; on a

$$N^\lambda(\varphi) = \prod_k N^\lambda(\varphi_k^1) \cdot N^\lambda(\varphi_k^2) = \prod_k [I \cap N^\lambda](\varphi_k^1) \cdot [I' \cap N^\lambda](\varphi_k^2)$$

Quatre cas sont à distinguer :

- (1) $I \cap N^\lambda \subset I$, $I' \cap N^\lambda \subset I'$; dans ce cas $[I \cap N^\lambda](\varphi_k^1) = e$, $[I' \cap N^\lambda](\varphi_k^2) = e$, et par conséquent $N^\lambda(\varphi) = e$.
- (2) $I \cap N^\lambda = I$, $I' \cap N^\lambda \subset I'$; dans ce cas $[I \cap N^\lambda](\varphi_k^1) = I(\varphi_k^1) = \varphi_k^1$, $[I' \cap N^\lambda](\varphi_k^2) = e$, et par conséquent $N^\lambda(\varphi) = \prod_k \varphi_k^1 = e$.
- (3) $I \cap N^\lambda \subset I$, $I' \cap N^\lambda = I'$; en procédant de façon symétrique à (2) on obtient $N^\lambda(\varphi) = \prod_k \varphi_k^2 = e$.
- (4) $I \cap N^\lambda = I$, $I' \cap N^\lambda = I'$; on déduit $I \subseteq N^\lambda$, $I' \subseteq N^\lambda$ donc $N = I \cup I' \subseteq N^\lambda$, ce qui est contradictoire, puisque $\lambda < \nu$.

On a donc de toute façon $N^\lambda(\varphi) = e$, c'est-à-dire $\varphi \in E^\nu$ et en définitive $\phi \in E^\nu$, pour tout ν .

Soit maintenant $\phi(A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \dots, A_{\nu_w})$ une forme commutatrice de poids w , ou les indices ν_v , $1 \leq v \leq w$, non nécessairement différents, sont tels que $\nu_v \in N$; nous dirons que le nombre ℓ des indices ν_v , différents, est l'indice de ϕ par rapport à E ; on a $\ell \leq w$. Notons $\phi^\nu(A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \dots, A_{\nu_w})$ une forme commutatrice de poids w et d'indice ν .

8.3 - On a $\phi^L(A_{L_1}, \dots, A_{L_w}) \subseteq E^L(A_1, A_2, \dots, A_v)$.

D'après 8.2, $\phi^L(A_{L_1}, \dots, A_{L_w}) \subseteq E^W(A_{L_1}, \dots, A_{L_w})$. Soit $a \in E^W$; d'après la définition de E^W il est de la forme $a = \prod_i a_i^{L_i} \dots a_i^{L_w}$, où si l'on note $I = [L_1, \dots, L_w]$, on a $a_i^{L_v} \in A_{L_v}$ pour tout $L_v \in I$ et $I^V(a) = e$, pour tout $v < w$. Notons également $I \wedge N^\lambda$, l'ensemble des éléments de I qui sont égaux à un quelconque des éléments de N^λ . Si $\lambda < L$, $I \wedge N^\lambda \subset I$, de sorte que

$$N^\lambda(a) = [I \wedge N^\lambda](a) = e.$$

On en déduit $E^W(A_{L_1}, \dots, A_{L_w}) \subseteq E^L(A_1, \dots, A_v)$ et en définitive 8.3.

9.- AGRÉGATS COMMUTATEURS.

Nous allons appeler agréats commutateurs d'indice L , la réunion des formes commutatrices $\phi^\lambda(A_{L_1}, A_{L_2}, \dots, A_{L_w})$ d'indice $\lambda \geq L$ par rapport à $E = [A_1, A_2, \dots, A_v]$ et nous noterons $O^L(A_1, A_2, \dots, A_v)$; $O^1 = (A_1, \dots, A_v) = A_1 \cup \dots \cup A_v$.

9.1 - $O^L(A_1, A_2, \dots, A_v)$ est sous-groupe normal dans $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_v$.

Soit ϕ^λ une forme commutatrice d'indice $\lambda \geq L$, $c \in \phi^\lambda$, $a \in A_x$, $x \in N$. On a

$$aca^{-1} = (a \circ c) c \in (A_x \circ \phi^\lambda) \phi^\lambda \subseteq O^L(A_1, \dots, A_v)$$

car $A_x \circ \phi^\lambda$ est une forme commutatrice d'indice $\geq \lambda$. Mais alors on déduit que pour tout $\alpha = \prod_i a_i^{L_i} \dots a_i^{L_w} \in A_1 \cup \dots \cup A_v$, $\alpha c \alpha^{-1} \in O^L$ et par conséquent 9.1.

9.2 - On a $E^2(A_1, A_2, \dots, A_v) = O^2(A_1, A_2, \dots, A_v)$.

D'après 8.3, $O^2 \subseteq E^2$. Soit, réciproquement, $a = \prod_i a_i^{L_i} \dots a_i^{L_w} \in E^2$, c'est-à-dire tel que $\prod_i a_i^{L_i} = e$. Il existe une substitution opérant dans l'ensemble des $a_i^{L_i}$ telle que $\sigma(a) = \prod_i a_i^{L_i} \prod_i a_i^{L_i} \dots \prod_i a_i^{L_i}$. D'autre part σ peut être décomposée en un produit de transpositions $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_m$ portant sur des éléments consécutifs et de la forme $\tau_k = (a_i^{L_i} a_j^{L_j})$, avec $L_i \neq L_j$. On a $a_i^{L_i} a_j^{L_j} \equiv a_j^{L_j} a_i^{L_i} (O^2)$ et puisque O^2 est normal dans E^1 , donc l'équivalence attachée régulière, $\tau_k \tau_{k+1} \dots \tau_m(a) \equiv \tau_{k+1} \dots \tau_m(a) (O^2)$. On en déduit

$$e = \prod_i a_i^{L_i} \dots \prod_i a_i^{L_i} = \sigma(a) = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_m(a) \equiv a(O^2)$$

c'est-à-dire que $a \in O^2$, et en définitive $E^2 \subseteq O^2$.

9.3 - On a $E^L(A_1, A_2, \dots, A_\nu) = O^L(A_1, A_2, \dots, A_\nu)$, $1 \leq L \leq \nu$.

D'après 8.3, $O^L \subseteq E^L$. Supposons que $E^{L-1} \subseteq O^{L-1}$. Un élément $a \in E^{L-1}$ est donc de la forme $a = \prod_i \varphi_i^1 \varphi_i^2 \dots \varphi_i^\lambda \alpha_i$, où $\varphi_i^x \in \Phi_x^{L-1}(A_{x_1}, \dots, A_{x_{L-1}})$, Φ_x^{L-1} étant des formes commutatrices d'indice $L-1$ et différentes au moins d'une variable et $\alpha_i \in O^L$. Si de plus $a \in E^L$ on a $N^{L-1}(a) = e$, ce qui entraîne, puisque $O^L \subseteq E^L$, donc $\alpha_i \in E^L$

$$N^{L-1}(\alpha_i) = e.$$

Notons d'autre part $K_x = [x_1, \dots, x_{L-1}]$; on a d'après 8.3

$$N^{L-1}(\varphi_i^x) = [K_x \cap N^{L-1}](\varphi_i^x) = \begin{cases} e, & \text{si } K_x \cap N^{L-1} \subset K_x \\ \varphi_i^x, & \text{si } K_x \cap N^{L-1} = K_x, \text{ donc } N^{L-1} = K_x. \end{cases}$$

Si donc on prend $N^{L-1} = K_x$, on a

$$e = N^{L-1}(a) \prod_i N^{L-1}(\varphi_i^1) \dots N^{L-1}(\varphi_i^x) \dots N^{L-1}(\varphi_i^x) N^{L-1}(\alpha_i) = \prod_i \varphi_i^x$$

car $N^{L-1} \neq K_{x'}$, pour tout $x' \neq x$. On déduit que

$$a = \prod_i \alpha_i \prod_i \varphi_i^1 \varphi_i^2 \dots \varphi_i^\lambda \alpha_i'$$

avec $\prod_i \varphi_i^x = e$, $1 \leq x \leq \lambda$, $\prod_i \alpha_i' = e$. Mais on a $\alpha = \prod_i \alpha_i \in O^L$ et

d'autre part $\varphi = \prod_i \varphi_i^1 \varphi_i^2 \dots \varphi_i^\lambda \alpha_i' \in E^2(\Phi_1^{L-1}, \Phi_2^{L-1}, \dots, \Phi_\lambda^{L-1}, O^L)$,

donc d'après 9.2 :

$$\varphi \in O^2(\Phi_1^{L-1}, \Phi_2^{L-1}, \dots, \Phi_\lambda^{L-1}, O^L) \subseteq O^L$$

par conséquent $a = \alpha \varphi \in O^L$ et en définitive $E^L \subseteq O^L$. De 9.2 on déduit maintenant que 9.3 est valable pour tout $L \leq \nu$.

9.4 - On a

$$\bigcup_{1 \leq x \leq \nu} A_x = \prod_{x_1} A_{x_1} \prod_{x_1, x_2} O^2(A_{x_1}, A_{x_2}) \dots \prod_{x_1, \dots, x_\lambda} O^\lambda(A_{x_1}, \dots, A_{x_\lambda}) \dots O^\nu(A_1, A_2, \dots, A_\nu) \quad \text{l'ordre des facteurs dans les produits } \prod_{x_1, \dots, x_\lambda} \text{ étant indifférent.}$$

Choisissons d'abord un ordre fixe, mais autrement arbitraire pour les produits $\prod_{x_1, \dots, x_\lambda}$ et soit $a = \prod_i a_i^1 a_i^2 \dots a_i^\nu \in \bigcup_{1 \leq x \leq \nu} A_x$. Notons

$$N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda = [x_1, \dots, x_\lambda] \quad \text{et posons } c(x_1) = N_{x_1}^1(a), \quad p_1 = \prod_{x_1} c(x_1).$$

Les relations $c(x_1, \dots, x_\lambda) = N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a)$

$$p_\lambda = p_{\lambda-1} \prod_{x_1, \dots, x_\lambda} c(x_1, \dots, x_\lambda)$$

définissent $c(x_1, \dots, x_\lambda)$ et p_λ , pour tout $\lambda < \lambda$. Nous avons évidemment

$$(1') \quad c(x_1) \in A_{x_1}$$

et d'autre part

$$(2') \quad a \equiv p_1 (E^2)$$

car $N_{x_1}^1(p_1^{-1}a) = \prod_{x_1} \{N_{x_1}^1[c(x_1)]\}^{-1} \cdot N_{x_1}^1(a) = \prod_{x_1} \{N_{x_1}^1[N_{x_1}^1(a)]\}^{-1} \cdot N_{x_1}^1(a)$; mais

$$N_{x_1}^1[N_{x_1}^1(a)] = \begin{cases} e & ; x_1 \neq x \\ N_{x_1}^1(a) & ; x_1 = x \end{cases}$$

de sorte que $N_{x_1}^1(p_1^{-1}a) = [N_{x_1}^1(a)]^{-1} \cdot N_{x_1}^1(a) = e$, pour tout x , donc $p_1^{-1}a \in E^2$ et en définitive (2').

Supposons maintenant que

$$(1'') \quad c(x_1, \dots, x_{\lambda-1}) \in E^{\lambda-1}(A_{x_1}, \dots, A_{x_{\lambda-1}})$$

$$(2'') \quad a \equiv p_{\lambda-1} (E^\lambda)$$

à partir

Si N' est un sous-ensemble propre de $N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda$, nous obtenons de (2'')

$$N'[c(x_1, \dots, x_\lambda)] = N'[N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a)] = N'(p_{\lambda-1}^{-1}a) = e$$

c'est-à-dire que

$$(1) \quad c(x_1, \dots, x_\lambda) \in E^\lambda(A_{x_1}, \dots, A_{x_\lambda}).$$

D'autre part

$$p_\lambda^{-1}a = \left[\prod_{x_1, \dots, x_\lambda} c(x_1, \dots, x_\lambda) \right]^{-1} \cdot p_{\lambda-1}^{-1}a$$

Si $\mu < \lambda$, $N^\mu[c(x_1, \dots, x_\lambda)] = e$, d'après (1) et $N^\mu(p_{\lambda-1}^{-1}a) = e$ d'après (2''), tandis que

$$N^\lambda[c(x_1, \dots, x_\lambda)] = \begin{cases} e & ; N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda \neq N^\lambda \\ c(x_1, \dots, x_\lambda) & ; N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda = N^\lambda \end{cases}$$

toujours d'après (1). On en déduit

$$N^\mu(p_\lambda^{-1}a) = e, \quad \mu < \lambda$$

$$N^\lambda(p_\lambda^{-1}a) = [c(x_1, \dots, x_\lambda)]^{-1} \cdot N^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a) = [N^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a)]^{-1} \cdot N^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a) = e$$

donc $p_{\lambda}^{-1}a \in 0^{\lambda+1}$, c'est-à-dire

$$(2) \quad a \equiv p_{\lambda} (E^{\lambda+1}) .$$

On en conclut que (1) et (2) sont valables pour tout $\lambda < \nu$, c'est-à-dire que

$$a = p_{\nu-1} \cdot c(1, 2, \dots, \nu) = \prod_{x_1} c(x_1) \cdot \prod_{x_1, x_2} c(x_1, x_2) \dots c(1, 2, \dots, \nu)$$

où $c(x_1, \dots, x_{\lambda}) \in E^{\lambda} (A_{x_1}, \dots, A_{x_{\lambda}})$, $1 \leq \lambda < \nu$, $c(1, 2, \dots, \nu) \in E^{\nu} (A_1, A_2, \dots, A_{\nu})$.

Mais ceci signifie, en tenant compte de 9.3 que

$$\bigcup_{1 \leq x \leq \nu} A_x \subseteq \prod_{x_1} A_{x_1} \cdot \prod_{x_1, x_2} 0^2(x_1, x_2) \dots 0^{\nu} (A_1, \dots, A_{\nu})$$

et d'autre part l'inclusion réciproque est évidente.

9.5 - La suite définie par

$$c_{\lambda} = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \dots c_2^{-\binom{\lambda}{2}} b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^{\lambda} , \quad c_2 = b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^{\lambda} , \quad c_1 = e$$

est telle que $c_{\lambda} \in 0^{\lambda} \{a, b\}$.

Nous allons montrer que si nous prenons, dans la démonstration de 9.4, $A_x = \{a, b\}$, $a_1^x = b^{-1}$, $a_2^x = a^{-1}$, $a_3^x = ab$, $1 \leq x \leq \nu$, nous obtenons en considérant l'élément de $\bigcup_{1 \leq x \leq \nu} A_x = \{a, b\}$

$$\alpha = \prod_i a_i^1 a_i^2 \dots a_i^{\nu} = b^{-\nu} a^{-\nu} (ab)^{\nu} , \quad i = 1, 2, 3$$

l'égalité suivante

$$(1) \quad c(x_1, \dots, x_{\lambda}) = c_{\lambda}$$

quel que soit le sous-ensemble $[x_1, \dots, x_{\lambda}]$ de λ éléments de N .

Supposons en effet que l'égalité ait lieu pour tout $\lambda' < \lambda$. D'après l'hypothèse et la relation (2) de 9.4

$$N_{x_1, \dots, x_{\lambda}}^{\lambda} [c(x'_1, \dots, x'_{\lambda'})] = \begin{cases} e & ; N_{x'_1, \dots, x'_{\lambda'}}^{\lambda'} \cap N_{x_1, \dots, x_{\lambda}}^{\lambda} \subset N_{x'_1, \dots, x'_{\lambda'}}^{\lambda'} \\ c_{\lambda'} & ; N_{x'_1, \dots, x'_{\lambda'}}^{\lambda'} \subset N_{x_1, \dots, x_{\lambda}}^{\lambda} \end{cases}$$

La seconde alternative se vérifie pour $(\lambda,)$ sous ensemble $N_{x'_1, \dots, x'_{\lambda'}}$ de λ éléments de N , de sorte que

$$N_{x_1, \dots, x_{\lambda}}^{\lambda} (p_{\lambda-1}) = N_{x_1, \dots, x_{\lambda}}^{\lambda} \left[\prod_{x_1} c(x_1) \prod_{x_1, x_2} c(x_1, x_2) \dots \prod_{x_1, \dots, x_{\lambda-1}} c(x_1, \dots, x_{\lambda-1}) \right] = c_2^{\binom{\lambda}{2}} c_3^{\binom{\lambda}{3}} \dots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}}$$

et en définitive, puisque $N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda(\alpha) = b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^\lambda$

$$c(x_1, \dots, x_\lambda) = N_{x_1, \dots, x_\lambda}^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}\alpha) = c_{\lambda-1}^{-(\lambda)} \dots c_2^{-(\lambda)} b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^\lambda = c_\lambda$$

On déduit que (1) est valable pour tout $\lambda < \nu$. Mais d'après 9.3

$$c(x_1, \dots, x_\lambda) \in O^\lambda(\Delta_{x_1}, \dots, \Delta_{x_\lambda}) = O^\lambda\{a, b\}$$

On a donc

$$c_\lambda \in O^\lambda\{a, b\}$$

pour tout $\lambda < \nu$, et puisque la relation a lieu pour tout ν elle est valable pour tout λ . On en déduit l'identité de P. Hall

$$(ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda c_2^{(\lambda)} \dots c_{\lambda-1}^{(\lambda)} c_\lambda$$

avec $c_\kappa \in O^\kappa\{a, b\}$, $2 \leq \kappa \leq \lambda$, sous la forme donnée par A. Magnus et généralisée par M. Lazard.
