Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Lazard

L'identité de Hall et les suites typiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 5, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris

Séminaire d'ALGÈBRE
Année 1953-1954

L'IDENTITÉ DE HALL ET LES SUITES TYPIQUES

(Exposé de M. LAZARD, le 14 décembre 1953).

AVERTISSEMENT. Les pages suivantes sont extraites d'une rédaction d'un projet de thèse. On y trouvera donc certains renvois à des paragraphes antérieurs, notamment en ce qui concerne l'existence de la formule dite de Hausdorff, et le critère utilisé pour démontrer qu'un groupe est libre.

L'identité fondamentale de P. Hall dont il s'agit est celle démontrée au paragraphe 3 de son Mémoire "A contribution to the theory of groupes of prime power order" (Proc. Lond. Math. Soc. 36, 1934, p. 29-95). L'énoncé original du théorème de Hall est le suivant :

"Supposons que les commutateurs complexes formellement distincts formés à partir de deux éléments quelconques P et Q d'un groupe quelconque G soient ordonnés suivant les poids croissants, l'ordre étant par ailleurs arbitraire, de la façon suivante :

(a) $R_1 , R_2 , \dots , R_i , \dots$

Alors, il existe une suite de polynômes à valeurs entières (pour x entier) :

(b) $f_1(x) , f_2(x) , \dots , f_i(x) , \dots$

(avec $f_1(x) = f_2(x) = x$), tous nuls pour $x = 0$, tels que le degré de $f_i(x)$ ne dépasse pas le poids W_i de R_i par rapport à P et Q , et tels que pour tous P , Q et pour tout entier positif x_i .

(c) $(PQ)^x = R_1^{f_1(x)} \; R_2^{f_2(x)} \dots \; R_i^{f_i(x)} \dots ,$

cette équation signifiant que si R_λ , $\lambda = \lambda(c)$, est le dernier terme de la suite (a) qui soit de poids inférieur à c par rapport à P et Q alors :

(d) $(PQ)^x \equiv R_1^{f_1(x)} \; R_2^{f_2(x)} \dots R_\lambda^{f_\lambda(x)} \dots \pmod{H_c}$, où H_c désigne le c-ième sous-groupe de la suite centrale descendante du sous-groupe engendré par P et Q , les relations (d) étant valables pour $c = 2 , 3 , \dots$"

La méthode des suites typiques utilisée dans cet exposé a été indiquée dans une note aux C.R. (5 janvier 1953).

1 - SUITES TYPIQUES

Nous considérons d'abord une algèbre de Lie libre L^* engendrée par la famille de générateurs indépendants $(x_\iota)_{\iota \in I}$ sur le corps Q des nombres rationnels. Cette algèbre est munie d'une graduation naturelle (les générateurs étant de degré 1) et nous appelons comme précédemment ordre $o(y)$ le degré minimum des composantes homogènes non nulles d'un élément $y \in L^*$. La filtration o définit une topologie séparée sur L^*, et nous noterons L l'algèbre complétée : les éléments de L s'identifient canoniquement aux séries $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$, où $y_i \in L^*$, $\deg y_i = i$. Nous désignerons par L_i le sous-module de L constitué par les éléments d'ordre $\geqslant i$.

Nous pouvons désormais introduire dans L une nouvelle opération binaire, que nous noterons xy, définie au moyen de la formule de Hausdorff :

$$x\,y = x + y + \tfrac{1}{2}[x,y] + \ldots$$

L devient ainsi un groupe non abélien, et, lorsque nous parlerons de sous-groupes de L, etc., il sera sous-entendu que nous nous référons à l'opération xy.

Nous nous proposons d'étudier certaines suites d'éléments de L :

Définition (1.1) Une suite $g(t)$ d'éléments de L dépendant du paramètre entier positif ou nul t sera dite suite typique (dans L) si l'on peut trouver des éléments $a_i \in L$ (i entier $\geqslant 1$) tels que $a_i \in L_i$ (pour tout i) et que, pour tout t : $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i a_i$.

H désignant une partie de L, $g(t)$ sera dite suite typique dans H si elle est assujettie à la condition supplémentaire $g(t) \in H$ pour tout t.

Nous désignerons par la même lettre Δ l'opérateur qui fait correspondre à une suite d'éléments $g(t)$ la suite $\Delta g(t) = g(t+1) - g(t)$ et l'opérateur qui fait correspondre à un polynôme $P(t)$ le polynôme $\Delta P(t) = P(t+1) - P(t)$. Les puissances successives de l'opérateur Δ seront notées Δ^k.

THÉORÈME (1.2) - Une suite d'éléments $g(t) \in L$ est une suite typique si et seulement si $g(0) = 0$ et $\Delta^k g(0) \in L_k$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Démonstration. Soit d'abord $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i a_i$ une suite typique. Alors $\Delta g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (t+1)^i a_i - \sum_{i=1}^{\infty} t^i a_i = \sum_{i=1}^{\infty} ((t+1)^i - t^i) a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta t^i a_i$. Plus généralement : $\Delta^k g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^k t^i a_i$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Or, $\Delta^k t^i = 0$ si $k > i$, donc $\Delta^k g(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta^k t^i a_i \in L_k$, et, en particulier, $\Delta^k g(0) \in L_k$.

Réciproquement, soit $g(t)$ une suite d'éléments de L , avec $g(0) = 0$. Nous pouvons calculer les termes de la suite $g(t)$ à partir des $\Delta^k g(0)$ $(k \geqslant 1)$, par la formule connue :

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{t}{k} \Delta^k g(0) \quad , \text{ où } \binom{t}{k} \text{ désigne le coefficient}$$

binomial que nous pouvons considérer comme un polynôme en t à coefficients rationnels et de degré k . Aucune difficulté de convergence ne se présente, puisque la série considérée n'a qu'un nombre fini de termes non nuls pour toute valeur entière $\geqslant 0$ de t . Pour démontrer que les relations $\Delta^k g(0) \in L_k$ entraînent que $g(t)$ est une suite typique, nous établissons plus généralement le :

LEMME (1.3)- Soit a_k une suite d'éléments de L tendant vers 0 et $P_k(t)$ une suite de polynômes à coefficients rationnels sans termes constants, telles que $\deg P_k(t) \leqslant o(a_k)$ pour tout $k \geqslant 1$. Alors $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) a_k$ est une suite typique.

Posons en effet $P_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k} t^i$; $c_{i,k} \in Q$. Alors $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k} t^i) a_k = \sum_{i=1}^{\infty} t^i (\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} a_k)$. La condition $\deg P_k(t) \leqslant o(a_k)$ peut s'énoncer ainsi $o(a_k) \geqslant i$ si $c_{i,k} \neq 0$; l'interversion des sommations est donc licite, et $b_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} a_k \in L_i$, ce qui démontre que $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i b_i$ est une suite typique.

Nous pouvons définir sur l'ensemble des suites $g(t)$ à valeur dans L une structure d'algèbre de Lie en posant $(\lambda g)(t) = \lambda g(t)$, $(g + h)(t) = g(t) + h(t)$, $[g,h](t) = [g(t),h(t)]$

et une structure de groupe, en posant $(gh)(t) = g(t)\,h(t)$. Nous introduisons sur cet ensemble la topologie de la convergence simple : une famille $g_\nu(t)$ de suites converge vers $g(t)$ si $g_\nu(t)$ converge vers $g(t)$ pour tout t fixé. Avec ces conventions :

THÉORÈME (1.4). Les suites typiques constituent, dans l'ensemble de toutes les suites d'éléments de L une sous-algèbre de Lie fermée, et, par conséquent, un sous-groupe.

Démonstration. Soient $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i a_i$ et $h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i b_i$ deux suites typiques. Alors $(\lambda g)(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda a_i \quad (\lambda \in Q)$;

$(g + h)(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i (a_i + b_i)$ et

$[g,h](t) = [\sum_{i=1}^{\infty} t^i a_i , \sum_{i=1}^{\infty} t^i b_i] = \sum_{i=1}^{\infty} t^i (\sum_{r=1}^{i-1} [a_r, b_{i-r}])$. Les relations $a_i \in L_i$, $b_i \in L_i$ impliquent évidemment $\lambda a_i \in L_i$, $a_i + b_i \in L_i$ et $\sum_{r=1}^{i-1} [a_r, b_{i-r}] \in L_i$. Les suites typiques constituent donc une sous-algèbre de Lie.

Soit $g_\nu(t)$ une famille de suites typiques tendant vers la suite $g(t)$. Alors, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\Delta^k g_\nu(0)$ tend vers $\Delta^k g(0)$; comme, pour tous ν , k , $\Delta^k g_\nu(0) \in L_k$, $\Delta^k g(0) \in L_k$ ce qui montre (1.2) que l'ensemble des suites typiques est fermé.

Enfin, si nous considérons $gh(t) = g(t) + h(t) + \frac{1}{2}[g(t) , h(t)] + \ldots$ nous voyons que la somme des termes de degré n de ce développement de Hausdorff est, pour tout entier n , une suite typique. Nous pouvons donc passer à la limite, puisque l'ensemble des suites typiques est fermé, ce qui établit que $gh(t)$ est une suite typique.

Nous allons maintenant chercher à caractériser les suites typiques en faisant abstraction de la structure d'algèbre de Lie de L , et en ne retenant que sa structure de groupe. Remarquons que nous pouvons définir dans L les puissances fractionnaires de ses éléments : si r et s sont deux entiers rationnels, x un élément de L , nous poserons $y = x^{r/s}$ si $y^s = x^r$. Or, d'après la formule de Hausdorff, $x^r = rx$,

$y^s = sy$; y est donc univoquement déterminé par $y = x^{r/s} = \frac{r}{s} x$. Autrement dit nous exprimons en termes de théorie des groupes la définition de la multiplication des éléments de L par des scalaires rationnels. Les puissances fractionnaires vérifient évidemment les identités $(x^\lambda)^\mu = x^{\lambda\mu}$ et $x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}$. $(\lambda, \mu \in Q)$.

THÉORÈME (1.5). Si $(P_i(t))$ désigne une suite de polynômes en t à coefficients rationnels et sans termes constants, chaque polynôme $P_i(t)$ étant précisément de degré i , la relation :

$$g(t) = a_1^{P_1(t)}\, a_2^{P_2(t)} \dots a_i^{P_i(t)} \dots$$

établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des suites typiques et l'ensemble des suites (a_i) d'éléments de L telles que $a_i \in L_i$ pour tout entier positif i .

Démonstration. Si (a_i) est une suite d'éléments de L tels que $a_i \in L_i$ $a_i^{P_i(t)} = P_i(t)\, a_i$ est une suite typique pour tout i, d'après (1.3). Il en est donc de même du produit $a_1^{P_1(t)} \dots a_i^{P_i(t)} \dots = g(t)$, d'après (1.4).

Pour démontrer que la suite (a_i) est univoquement déterminée, nous nous appuierons sur le :

LEMME (1.6). Soient H un groupe, (K_i) une suite centrale dans H , c'est-à-dire une suite de sous-groupes tels que $K_1 = H$, $K_i \supset K_{i+1}$ et $(H, K_i) \subset K_{i+1}$ pour tout $i \geqslant 1$. On suppose que $\bigcap_i K_i = (e)$ (l'élément neutre de H), que H est complet pour la topologie obtenue en prenant les (K_i) comme système fondamental de voisinages de e , et que tous les quotients K_i/K_{i+1} sont sans torsion. Soit $(P_i(t))$ une suite de polynômes à valeurs entières pour t entier, chaque $P_i(t)$ étant précisément de degré i . Alors, si (a_i) et (b_i) désignent deux suites d'éléments de H tendant vers e , on ne peut avoir :

(*) $\quad a_1^{P_1(t)}\, a_2^{P_2(t)} \dots a_i^{P_i(t)} \dots = b_1^{P_1(t)}\, b_2^{P_2(t)} \dots b_i^{P_i(t)} \dots$,

pour toute valeur entière $\geqslant 0$ de t que si $a_i = b_i$ pour tout $i \geqslant 1$.

Supposons que, pour un entier k donné, nous ayons démontré les relations

$b_i \in a_i K_k$ pour tout $i \geqslant 1$ (cela est évident pour $k = 1$).

Posons donc $b_i = a_i c_i$, $c_i \in K_k$. Notre relation (*) s'écrit :

$$a_1^{P_1(t)} \dots a_i^{P_i(t)} \dots = (a_1 c_1)^{P_1(t)} \dots (a_i c_i)^{P_i(t)} \dots$$

Prenons le quotient de H par K_{k+1} ; et désignons par $\hat{x}$ la classe dans H/K_{k+1} de $x \in H$. La relation (*) nous donne :

$$\hat{a}_1^{P_1(t)} \dots \hat{a}_i^{P_i(t)} \dots = (\hat{a}_1 \hat{c}_1)^{P_1(t)} \dots (\hat{a}_i \hat{c}_i)^{P_i(t)} \dots$$

Mais, par hypothèse, $\hat{c}_i$ appartient au centre de H/K_{k+1} . Donc $(\hat{a}_i \hat{c}_i)^{P_i(t)} = \hat{a}_i^{P_i(t)} \hat{c}_i^{P_i(t)}$; et nous pouvons regrouper les facteurs du produit $\hat{a}_1^{P_1(t)} \hat{c}_1^{P_1(t)} \dots \hat{a}_i^{P_i(t)} \hat{c}_i^{P_i(t)} \dots = (\hat{a}_1^{P_1(t)} \dots \hat{a}_i^{P_i(t)} \dots)$ $(\hat{c}_1^{P_1(t)} \dots \hat{c}_i^{P_i(t)} \dots)$.

Nous parvenons ainsi à la relation : $\hat{c}_1^{P_1(t)} \dots \hat{c}_i^{P_i(t)} \dots = \hat{e}$ dans le groupe abélien K_k/K_{k+1} . Remarquons que tous les $(a_i), (b_i)$ appartiennent à K_{k+1} , sauf un nombre fini d'entre eux. Par conséquent $\hat{c}_i = \hat{e}$, sauf pour un nombre fini d'indices. Adoptons la notation additive ; supposons, dans un groupe abélien sans torsion, une suite d'éléments d_i , tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et tels que $\sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)\, d_i = 0$, pour toute valeur entière $\geqslant 0$ de t . Si tous les d_i ne sont pas nuls, soit ℓ le plus grand indice tel que $d_\ell \neq 0$. Alors $\sum_{i=1}^{\ell} \Delta^\ell P_i(t)\, d_i = 0$; mais $\Delta^\ell P_i(t) = 0$ pour $i < \ell$, et $\Delta^\ell P_\ell(t) = \ell ! \cdot \lambda_\ell$ (λ_ℓ désignant le coefficient de t^ℓ dans $P_\ell(t)$). Ainsi $(\ell ! \lambda_\ell) d_\ell = 0$, ce qui implique que $d_\ell = 0$. Tous les d_i sont donc nuls. Il en résulte que $\hat{c}_i = \hat{e}$ pour tout i , autrement dit : $b_i \in a_i K_{k+1}$ pour tout i . Cela étant vrai pour tout indice k , nous avons bien démontré les relations $a_i = b_i$, comme conséquence de la relation (*) .

Remarques (1.7) L'énoncé (1.6) admet un certain nombre de variantes, qui n'entraînent que des modifications insignifiantes dans la démonstration. Tout d'abord nous aurions pu supposer que la relation (*) n'est vérifiée que pour une infinité de valeurs de t (au lieu de toutes les valeurs entières

$\geqslant 0$ de t). En effet, tout se ramène à démontrer que, dans un groupe abélien sans torsion, une famille d'éléments d_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ne peut satisfaire à $\sum_{i=1}^{n} P_i(t)\, d_i = 0$ une infinité de valeurs de t que si tous les d_i sont nuls. Si $P_i(t) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_{i,j}\, t^j$, nous pouvons supposer, en multipliant éventuellement tous les $P_i(t)$ par un entier convenable, que les coefficients $\lambda_{i,j}$ sont entiers; alors $\lambda_{i,i} = \lambda_i \neq 0$, et $\sum_{i=1}^{n} P_i(t)\, d_i = \sum_{i=1}^{n} t^i\, e_i$; avec $e_i = \sum_{j=i}^{n} \lambda_{j,i}\, d_j$. Un calcul de déterminant de Vandermonde montre que tous les e_i sont nuls (il suffit que la relation $\sum_{i=1}^{n} t^i\, e_i$ soit vérifiée pour $(n+1)$ valeurs de t) ; les conditions $\lambda_{i,i} \neq 0$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) montrent que tous les d_i sont alors nuls. Contentons nous d'indiquer les énoncés suivants, qui se démontrent comme (1.6) :

a) On remplace dans (1.6) la condition "tous les K_i/K_{i+1} sans torsion" par la condition "le coefficient de t^i dans chaque polynôme $P_i(t)$ est $1/i!$ ". Par exemple : $P_i(t) = \binom{t}{i}$.

b) On remplace la condition "les (a_i) et (b_i) tendent vers e " par $a_i = b_i = e$ pour $i > n$, on suppose que le coefficient de t^i dans chaque $P_i(t)$ est égal à 1, et on remplace la condition " K_i/K_{i+1} sans torsion" par "l'ordre d'aucun élément (excepté l'élément neutre) des quotients K_i/K_{i+1} ne divise $n!$ ".

c) On remplace la condition "les (a_i) et (b_i) tendent vers 1" par " $a_i \in K_i$ et $b_i \in K_i$ pour tout i ", on suppose que le coefficient de t^i dans chaque $P_i(t)$ est égal à 1 , et on remplace la condition " K_i/K_{i+1} sans torsion" par "l'ordre d'aucun élément (excepté l'élément neutre) de K_i/K_{i+1} ne divise $i!$, quelque soit $i \geqslant 1$" .

d) On remplace la condition "K_i/K_{i+1} sans torsion" par la condition "l'ordre d'aucun élément de K_i/K_{i+1} (excepté l'élément neutre) ne divise n" , et on suppose que le coefficient de t^i dans chaque $P_i(t)$ est de la forme $\frac{r}{i!}$, où r divise une puissance de l'entier n donné.

L'unicité de la représentation (1.5) $g(t) = a_i^{P_1(t)} \dots a_i^{P_i(t)} \dots$ des suites typiques résulte immédiatement de (1.6), en prenant $H = L$, $K_i = L_i$, et en remplaçant, si nécessaire $P_i(t)$ par $n_i P_i(t)$ et a_i par a_i^{1/n_i}, (n_i) désignant une suite d'entiers convenables.

Nous voyons de plus que la suite (a_i) d'éléments de L intervenant dans la définition (1.1) des suites typiques est bien déterminée par la suite $g(t)$: il suffit d'appliquer (1.6) à L considéré comme un groupe abélien. Enfin, $g(t) \in L_k$ pour tout t si et seulement si $a_i \in L_k$ pour tout i (appliquer (1.6) au groupe abélien L/L_k).

Achevons la démonstration de (1.5). Soit $g(t)$ une suite typique. Supposons que nous ayons déjà construit, pour certain entier i, des éléments $a_{1,i}, a_{2,i} \dots a_{i,i}$, tels que $a_{r,i} \in L_r$ pour $1 \leqslant r \leqslant i$ et que

$$(g(t))^{-1} a_{1,i}^{P_1(t)} a_{2,i}^{P_2(t)} \dots a_{i,i}^{P_i(t)} \in L_{i+1} \text{ pour tout } t \text{ entier} \geqslant 0 .$$

Alors $h(t) = (g(t))^{-1} a_{1,i}^{P_1(t)} \dots a_{i,i}^{P_i(t)}$ est une suite typique dans L_{i+1}.

Nous avons donc, d'après la dernière proposition énoncée, $h(t) = \sum_{j=1}^{\infty} t^j b_j$, avec $b_j \in L_j \cap L_{i+1}$. Puisque chaque polynôme $P_i(t)$ est de degré i et sans terme constant, nous pouvons calculer sans ambiguité les nombres rationnels $\lambda_{j,k}$ tels que $\sum_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} P_k(t) = t^j$. Alors :

$$\sum_{j=1}^{i+1} t^j b_j = \sum_{j=1}^{i+1} \left(\sum_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} P_k(t)\right) b_j = \sum_{k=1}^{i+1} P_k(t) \left(\sum_{j=k}^{i+1} \lambda_{j,k} b_j\right)$$

Posons $c_k = -\sum_{j=k}^{i+1} \lambda_{j,k} b_j$. Alors la formule de Hausdorff montre immédiatement que :

$$h(t) \prod_{k=1}^{i+1} c_k^{P_k(t)} \in L_{i+2} , \text{ pour tout } t .$$

Or les éléments c_k appartiennent tous à L_{i+1}, ce qui implique que les éléments $c_k^{P_k(t)}$ permutent, modulo L_{i+2}, avec tous les éléments de L. Ainsi :

$a_{1,i}^{P_1(t)} \dots a_{i,i}^{P_i(t)}\, c_1^{P_1(t)} \dots c_i^{P_i(t)}\, c_{i+1}^{P_{i+1}(t)} \equiv (a_{1,i}\, c_1)^{P_1(t)} \dots$

$\dots (a_{i,i}\, c_i)^{P_i(t)}\, c_{i+1}^{P_{i+1}(t)}$ mod. L_{i+2} . Posons $a_{r,i+1} = a_{r,i}\, c_r$ pour $1 \leqslant r \leqslant i$ et $a_{i+1,i+1} = c_{i+1}$. La famille $a_{r,i+1}$ possède, pour l'indice $i+1$, les mêmes propriétés que la famille $a_{r,i}$ pour l'indice i , et $a_{r,i+1} \equiv a_{r,i} \bmod L_{i+1}$. Nous pouvons donc poser $a_i = \lim_{r \geqslant i,\, r \to \infty} a_{i,r}$, et nous voyons que $g(t)^{-1}\, a_1^{P_1(t)} \dots a_j^{P_j(t)} \dots \in L_i$, quel que soit i , c'est-à-dire que $g(t) = a_1^{P_1(t)} \dots a_j^{P_j(t)} \dots a_j \in L_j$ pour tout j . La construction indiquée ne fait pas intervenir de choix arbitraire.

Nous allons d'abord appliquer le théorème (1.5) en prenant $P_i(t) = \binom{t}{i}$.

<u>Définition</u> (1.8). Soit une suite d'éléments $g(t)$ (t entier $\geqslant 0$) dans un groupe quelconque H , $g(0)$ étant égal à l'élément neutre. Il existe alors dans H une suite (a_i) d'éléments déterminés, telle que :
$g(t) = a_1^{\binom{t}{1}}\, a_2^{\binom{t}{2}} \dots a_i^{\binom{t}{i}} \dots$ pour tout t .
L'élément a_i sera dit <u>i-ème différence non-abélienne</u> de la suite $g(t)$, et noté $\delta_i\, g(t)$; il ne dépend que des valeurs de $g(t)$ pour $1 \leqslant t \leqslant i$.

En effet, $\binom{t}{i} = 0$ pour tout $t < i$, et il s'agit donc toujours de produits finis dans H . Supposons déjà calculé a_i pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$: nous devrons avoir $g(j) = a_1^{\binom{j}{1}} \dots a_{j-1}^{\binom{j}{j-1}}\, a_j$, ce qui détermine univoquement a_j .

Nous pouvons alors, d'après (1.5), énoncer :

<u>THÉORÈME</u> (1.9) Soit H un sous-groupe quelconque de L . La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'éléments $g(t)$ de H soit une suite typique dans H est que $g(0) = 0$ et que $\delta_i g(t) \in L_i \cap H$ pour tout $i \geqslant 1$.

Prenons en particulier pour H le sous-groupe G de L engendré par ses générateurs $(x_\iota)_{\iota \in I}$. Alors G est un groupe libre par rapport aux générateurs (x_ι) , et les sous-groupes $G_i = G \cap L_i$ constituent la suite centrale descendante de G . Il suffit en effet pour le démontrer d'appliquer les théorèmes (3.1) et (4.3) du chapitre I, en remarquant que le

sous-anneau de Lie engendré par les (x_i) dans G est libre.

Le théorème (1.9) nous donne donc une caractérisation des suites typiques dans le groupe libre G, sans plus faire aucunement intervenir l'algèbre de Lie L. Ainsi :

THÉORÈME (1.10) Une suite typique dans le groupe libre G, dont la suite centrale descendante est notée (G_i), est une suite $g(t)$ d'éléments de G telle que $g(0)$ soit l'élément neutre et que $\delta_i g(t) \in G_i$ pour tout entier $i \geqslant 1$. Dans l'ensemble des suites d'éléments de G, les suites typiques constituent un sous-groupe fermé. Si $P_i(t)$ est un polynôme à valeurs entières pour t entier et de degré i, $x^{P_i(t)}$ est une suite typique dans G si et seulement si $x \in G_i$.

Le théorème (1.10) nous permet d'établir immédiatement des identités du type de l'identité fondamentale de P. Hall. Prenons par exemple deux éléments x et y dans le groupe libre G ; $x^t y^t = g(t)$ est une suite typique et :

$$(1.11)\quad x^t y^t = a_1^{\binom{t}{1}} a_2^{\binom{t}{2}} \dots a_i^{\binom{t}{i}} \dots, \text{ avec } a_1 = xy,$$

$$a_2 = y^{-1}(x^{-1},y^{-1})y, \dots a_i = \delta_i g(t) \in G_i.$$

Pour trouver une identité de la forme $(xy)^t = x^t y^t \dots$, il suffit de considérer la suite typique : $y^{-t} x^{-t} (xy)^t = h(t)$. Ainsi :

$$(1.12)\quad (xy)^t = x^t y^t b_2^{\binom{t}{2}} \dots b_i^{\binom{t}{i}} \dots, \text{ avec } b_2 = y^{-1}(y^{-1},x^{-1})y,$$

$$b_i = \delta_i h(t) \in G_i$$

Rappelons que (1.11), où l'on fait $t = p$, donne l'identité (6.4) du chapitre I.

Des identités analogues s'établissent pour des suites typiques telles que (x^t,y), des suites typiques impliquant plus de deux éléments, etc... L'avantage des formes canoniques que nous trouvons est qu'elles découlent sans calculs de (1.10), et qu'elles ne font intervenir que des produits finis. Par contre, la vérification que les i-èmes différences non-abéliennes sont des produits de commutateurs de poids $\geqslant i$ entraîne des calculs pénibles, même pour les suites typiques les plus simples et les petites valeurs de i. Aussi allons-nous donner une forme non-canonique des suites typiques qui met en évidence les sous-groupes G_i.

G désigne comme précédemment le groupe libre engendré par les $(x_\iota)_{\iota \in I}$ dans L . Nous choisissons une famille d'éléments $(y_\nu)_{\nu \in N}$ d'élément de G , ν parcourant un ensemble N bien ordonné, de façon que $o(y_\nu) < o(y_{\nu'})$ implique $\nu < \nu'$, et que les y_ν pour lesquels $o(y_\nu) = i$ constituent, mod. G_{i+1} , une base du groupe abélien libre G_i/G_{i+1} . (Cf. paragraphe 6, chap. I). Alors, tout élément du complété $\bar{G}$ de G dans L s'écrit, d'une manière et d'une seule, comme un produit infini ordonné (convergeant au sens de la topologie dans L) : $\prod_{\nu \in N} y_\nu^{h_\nu}$, où les h_ν sont des entiers qui doivent vérifier la condition suivante : pour tout i , les h_ν correspondant aux indices ν tels que $o(y_\nu) = i$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Nous énoncerons désormais plus simplement cette condition en disant que le produit doit converger. Les composantes homogènes de degré $o(y_\nu)$ des y_ν (c'est-à-dire leur "parties principales") constituent une base, sur l'anneau Z des entiers rationnels, du sous-anneau de Lie libre engendré par les (x_ι) dans L (Chap. I paragraphe 4). Elles constituent donc aussi une base, sur le corps Q des nombres rationnels, de l'algèbre de Lie L^* dont L est le complété. Nous en déduisons sans peine que les éléments de L sont représentés univoquement par les produits convergents $\prod_{\nu \in N} y_\nu^{h_\nu}$, où les h_ν sont des nombres rationnels. Une suite d'éléments $g(t)$ dans $\bar{G}$ (resp. dans L) peut donc être mise sous la forme $\prod_\nu y_\nu^{h_\nu(t)}$ où les $h_\nu(t)$ sont des fonctions de t déterminées à valeurs entières (resp. rationnelles).

THÉORÈME (1.13) Une suite d'éléments $g(t) = \prod_{\nu \in N} y_\nu^{h_\nu(t)}$ est une suite typique dans $\bar{G}$ (resp. dans L) si et seulement si le produit converge pour tout $t \geqslant 0$, $h_\nu(0) = 0$ pour tout $\nu \in N$, et enfin si pour tout $\nu \in N$, la fonction $h_\nu(t)$ peut être représentée par un polynôme à valeurs entières (resp. un polynôme à coefficients rationnels) de degré $\leqslant o(y_\nu)$.

Démonstration. Un produit du type considéré représente bien une suite typique, d'après (1.4). Réciproquement, soit $g(t) = \prod_{\nu \in N} y_\nu^{h_\nu(t)}$ une suite typique dans $\bar{G}$ (resp. dans L). Désignons généralement par ν_i le plus petit indice ν tel que $o(y_\nu) = i$.

Supposons démontré que pour $\nu < \nu_i$, les fonctions $h(t)$ vérifient les conditions du théorème. Alors $(\prod_{\nu<\nu_i} y_\nu^{h_\nu(t)})^{-1}\, g(t)$ est une suite typique dans $\bar{G}_i$ (resp. L_i) , donc de la forme $\sum_{j=1}^{\infty} t^j a_j$, avec $a_j \in L_i \cap L_j$ pour tout j . D'après les propriétés des y_ν , nous pouvons trouver des coefficients rationnels $\lambda_{j,\nu}$ $(1 \leqslant j < \infty\,;\ \nu \in N)$ tels que $a_j \equiv \sum_{\nu_i \leqslant \nu < \nu_{i+1}} \lambda_{j,\nu}\, y_\nu$ (mod. L_{i+1}) pour $1 \leqslant j \leqslant i$. Il en résulte que $h_\nu(t) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} \lambda_{j,\nu}\, t^j$; ce qui démontre (1.13).

(1.14) Remarques. a) Si, dans la définition (1.1) des suites typiques, nous remplaçons la condition $a_i \in L_i$ pour tout i par la condition plus faible $\lim_{i\to\infty} o(a_i) = \infty$, nous parvenons à la notion de suite analytique dans L . Les suites typiques ne sont donc qu'un cas particulier des suites analytiques, mais ce sont les seules dont nous ayons ici à faire usage. Tous les résultats que nous avons démontrés pour les suites typiques s'établissent, en modifiant convenablement les énoncés, pour les suites analytiques. Ainsi, dans (1.2), on doit remplacer la condition : " $\Delta^k g(0) \in L_i$ pour tout i " par la condition " $\lim_{k\to\infty} o(\Delta^k g(0)) = \infty$ " ; la même modification doit intervenir dans le théorème (1.9), les différences $\Delta^k g(0)$ étant remplacées par les différences non-abéliennes $\delta_i\, g(0)$. L'énoncé du lemme (1.6) s'applique directement aux suites analytiques, et permet de démontrer, pour les suites analytiques, le théorème (1.6) où il faut seulement remplacer la condition " $a_i \in L_i$ " pour tout i " par la condition plus faible " $\lim_{i\to\infty} o(a_i) = \infty$ " .

b) Si deux suites typiques (resp. analytiques) $g(t)$ et $h(t)$ coïncident pour une infinité de valeurs de t , elles coïncident pour toutes les valeurs (entières $\geqslant 0$) de t . Il suffit en effet d'appliquer aux deux suites le théorème (1.5) en prenant par exemple $P_i(t) = \binom{t}{i}$, (Cf. (1.9)), puis d'appliquer la remarque (1.7).

c) Nous avons supposé, dans la définition d'une suite typique (resp. analytique) $g(t)$ que $g(0) = 0$. Cette condition n'est pas essentielle, mais elle simplifie certains énoncés, et correspond aux besoins des applications.

d) Nous aurions pu, dans la définition (1.1) des suites typiques faire intervenir toutes les valeurs entières de t. Alors les théorèmes (1.2) et (1.9) ne seraient plus exacts (puisqu'ils ne font intervenir que les valeurs de $g(t)$ pour $t \geqslant 0$). Par contre, les théorèmes (1.4) et (1.5) restent valables (une seule modification doit être apportée, pour démontrer que l'ensemble des suites typiques, considéré comme partie de l'ensemble des applications de Z dans L, est fermé). De même nous aurions pu faire intervenir toutes les valeurs rationnelles de t. Mais, avec ces définitions, la remarque b) précédente resterait valable : deux suites typiques coïncidant pour une infinité de valeurs de t coïncideraient pour toutes les valeurs (entières ou rationnelles, suivant la définition adoptée) de t. Il en résulte que nous n'avons essentiellement qu'une seule définition des suites typiques, car l'extension d'une suite typique, définie comme en (1.1), à toutes les valeurs entières ou rationnelles de t est évidemment possible, et n'est possible que d'une seule manière.

Application. Les identités telles que (1.11) et (1.12) que nous avons établies pour t entier $\geqslant 0$ restent vraies pour t négatif, les produits envisagés étant alors effectivement infinis. (Si l'on veut considérer les valeurs non entières de t, on doit évidemment se placer dans le groupe L). Toutes ces considérations s'appliquent au cas des suites analytiques.

e) Tous les résultats concernant les suites typiques (resp. analytiques) peuvent se généraliser à des familles d'éléments dépendant de plusieurs paramètres. On pourrait ainsi donner des identités du type de P. Hall pour $x^t y^{t'} z^t$, etc. Les énoncés seraient sensiblement plus compliqués, et, pour avoir des représentations en produit (Cf. (1.8), (1.9)), on serait obligé d'ordonner totalement les couples (ou n-uples) d'entiers positifs, ce qui laisserait subsister beaucoup d'arbitraire. Aussi, semble-t-il raisonnable d'attendre les applications éventuelles avant de développer la théorie dans cette direction.