

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

P. JAFFARD

Extensions des groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 11, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A11_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-

Séminaire d'ALGÈBRE

Année 1953/1954

-:-:-

EXTENSIONS DES GROUPES ORDONNÉS

Conférence faite par P. Jaffard le 31 mai 1954

Préliminaires

Tous les groupes considérés seront supposés abéliens et notés additivement. G étant un groupe ordonné (c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre partielle ou totale telle que $a \leq b \rightarrow a+x \leq b+x$ quels que soient $a, b, x \in G$), on notera G_+ le sous-ensemble de G formé par tous ses éléments positifs ou nuls. On sait que G_+ détermine complètement la structure d'ordre sur G grâce à la relation :

$$a \leq b \iff b-a \in G_+$$

G_+ vérifie les relations suivantes :

- (1) $G_+ + G_+ \subset G_+$
- (2) $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$.

Réciproquement si on se donne un sous-ensemble A d'un groupe G tel que $A+A \subset A$ et $A \cap (-A) = \{0\}$, il existe sur G une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe telle que $G_+ = A$.

G et Q étant deux groupes ordonnés, un homomorphisme φ de G dans Q sera dit croissant si $x \leq y \rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$, c.a.d. si $\varphi(G_+) \subset Q_+$.

φ ne peut être croissant que si son noyau H est un sous-groupe isolé de G , c.a.d. tel que :

$$h \in H, x \in G \text{ et } 0 \leq x \leq h \text{ entraînent } x \in H.$$

(En effet $0 \leq x \leq h$ entraîne $\varphi(0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(h)$ d'où $\varphi(x)=0$).

G étant un groupe ordonné, H un sous-groupe isolé de G et Q le groupe quotient G/H , on peut trouver sur Q des structures d'ordre compatibles avec sa structure de groupe qui rendent croissant l'homomorphisme canonique φ de G sur Q . En particulier il y en a une qui est moins fine que toutes les autres, c'est celle qui est définie par $Q_+ = \varphi(G_+)$. La structure d'ordre correspondante

sur Q est la structure d'ordre quotient de G par H . Elle vérifie bien les conditions imposées. En effet :

$$Q_+ + Q_+ \subset Q_+$$

$$\varphi(G_+) \subset Q_+$$

et de plus $Q_+ \cap (-Q_+) \ni \varphi(x)$ implique que l'on peut trouver deux éléments h et h' de H tels que $x+h \in G_+$ et $x+h' \in -G_+$ donc que $-h \leq x \leq -h'$ ou $0 \leq h+x \leq h-h'$ d'où $x+h \in H$ (puisque H est isolé) donc $x \in H$ et $\varphi(x)=0$. Donc $Q_+ \cap (-Q_+) = \{0\}$.

G et Q étant deux groupes réticulés, un homomorphisme φ de G dans Q est dit propre si pour tous $x, y \in G$ on a :

$$(3) \quad \varphi(\inf(x, y)) = \inf(\varphi(x), \varphi(y))$$

Tout homomorphisme propre est évidemment croissant.

φ ne peut être propre que si son noyau H est un sous-groupe propre de G , c'est-à-dire tel que $x, y \in H$ entraîne $\inf(x, y) \in H$.

G étant réticulé et H un sous-groupe isolé propre de G , le groupe $Q = G/H$ muni de la structure d'ordre quotient est réticulé et l'application canonique de G sur Q est propre.

Problèmes d'extension

Supposons que l'on se donne deux groupes (abéliens) Q et H et une extension (abélienne) G de Q par H . On considérera que H est un sous-groupe de G et on identifiera les éléments de Q aux classes de G selon H . On notera φ l'homomorphisme canonique de G sur Q .

G peut être défini par la donnée sur l'ensemble produit $H \times Q$ de la loi de composition :

$$(4) \quad (a, x) + (b, y) = (a+b+f(x, y), x+y)$$

où f est un 2-cocycle⁽¹⁾ tel que $f(x, 0) = 0$ et $f(x, y) = f(y, x)$.

On a alors :

$$\varphi(a, x) = x \quad \text{et} \quad (a, 0) = a$$

H et Q étant des groupes ordonnés, on dira que G est une extension ordonnée de Q par H si G est muni d'une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe induisant sur H l'ordre donné initialement, telle que H soit

(1) - c'est-à-dire une application f de $Q \times Q$ dans H vérifiant l'identité
 $f(x, y) + f(x+y, z) = f(y, z) + f(x, y+z)$

un sous-groupe isolé de G et telle que l'ordre quotient défini sur G/H coïncide avec l'ordre donné initialement sur Q .

H et Q étant des groupes ordonnés et G une extension de Q par H , nous nous proposons dans ce qui suit de trouver les structures d'ordre sur G qui en fassent une extension ordonnée de Q par H . Le problème revient à définir G_+ ou encore à trouver un sous-ensemble P de G vérifiant les quatre conditions suivantes :

- (5) $P \cap H = H_+$
- (6) $\varphi(P) = Q_+$
- (7) $P + P \subset P$
- (8) $P \cap (-P) = \{0\}$.

On voit en effet facilement que si P vérifie les quatre conditions précédentes et si l'on pose $G_+ = P$, H devient un sous-groupe isolé de G : Soit en effet $0 \leq \xi \leq h$ ($\xi \in G$ et $h \in H$) ; $h - \xi \in P$ entraîne $\varphi(h - \xi) \geq 0$ en vertu de (6) ou $\varphi(h) \geq \varphi(\xi)$ donc $\varphi(\xi) \leq 0$. Mais $\xi \in P$ entraîne $\varphi(\xi) \geq 0$. Donc $\varphi(\xi) = 0$ et $\xi \in H$.

On voit de plus que les conditions (5) et (6) entraînent la condition (8). Supposons en effet remplies les deux premières conditions et soit $\xi \in P \cap (-P)$. En vertu de (6) on a $\varphi(\xi) \in Q_+ \cap (-Q_+)$ ou $\varphi(\xi) = 0$, donc $\xi \in H$ et (5) entraîne $\xi \in H_+ \cap (-H_+)$ ou $\xi = 0$. D'où (8).

En reprenant la définition de G donnée plus haut (comme ensemble produit $H \times Q$ muni de la loi de composition (4)), les conditions (5), (6) et (7) se traduisent par :

- (5') $(a, 0) \geq 0 \iff a \geq 0$
- (6') $(a, x) \geq 0 \implies x \geq 0$; $x \geq 0 \implies \exists a \in H$ avec $(a, x) \geq 0$
- (7') $(a, x), (b, y) \geq 0 \implies (a+b+f(x, y), x+y) \geq 0$.

Les relations (5'), (6') et (7') entraînent la relation :

$$(9) \quad a \leq b \implies (a, x) \leq (b, x)$$

En effet $a \leq b$ entraîne $b-a \geq 0$, donc $(b-a, 0) \geq 0$ (en vertu de (5')), donc $(b-a, 0) + (a, x) \geq (a, x)$. Or $(b-a, 0) + (a, x) = (b+f(0, x), x) = (b, x)$. D'où la relation (9).

Appelons ensemble-solution tout sous-ensemble P de G vérifiant les relations (5), (6) et (7). On voit qu'il existe un ensemble solution plus grand que tous les autres (et qui définit par suite une structure d'ordre sur G plus fine que toutes les autres structures d'ordre qui font de G une

extension ordonnée de Q par H), c'est le sous-ensemble L de G ainsi défini :

$$(10) \quad \xi \in L \iff \{ \varphi(\xi) > 0 \text{ ou } \xi \in H_+ \}$$

L'extension ordonnée correspondante de Q par H est dite extension lexicographique. Elle est définie par :

$$(10') \quad (a, x) \geq 0 \iff \{ x > 0 \text{ ou } x = 0 \text{ et } a \geq 0 \} .$$

Solution générale du problème

H étant un groupe ordonné, appelons surclasse large (on dit aussi section finissante) tout sous-ensemble S non vide de H vérifiant la relation suivante :

$$(11) \quad a \in S \text{ et } b \geq a \implies b \in S .$$

A et B étant deux surclasses larges de H , il en est de même de $A + B$. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des surclasses larges de H forme un demi-groupe. Si on ordonne $\mathcal{S}$ par la relation :

$$A \leq B \iff A \geq B$$

on voit que $\mathcal{S}$ devient un demi-groupe ordonné car on a :

$$A \leq B \implies A + X \leq B + X \quad \text{quel que soit } X \in \mathcal{S}$$

a étant un élément de H , on note (a) le sous-ensemble de H ainsi défini :

$$h \in (a) \iff h \geq a .$$

(a) est donc une surclasse large de H qui est dite surclasse principale déterminée par a .

On voit immédiatement que si on identifie chaque élément a de H à la surclasse principale (a) qu'il détermine, on peut considérer que H est un sous-groupe ordonné du demi-groupe ordonné $\mathcal{S}$.

Revenons maintenant au problème d'extension et identifions, comme nous l'avons convenu, les éléments de Q aux classes de G suivant H . Si P est un ensemble solution et si $x \in Q_+$, la relation (6') montre que le sous-ensemble $\psi(x)$ ainsi défini :

$$a \in \psi(x) \iff (a, x) \in P$$

n'est pas vide. La relation (9) montre de plus que $\psi(x)$ est une surclasse large de H .

Déterminer P revient donc à trouver une application ψ de Q_+ dans $\mathcal{S}$ telle que :

$$(11) \quad \psi(0) = H_+$$

$$(12) \quad \psi(x) + \psi(y) + (f(x, y)) \geq \psi(x+y) .$$

On voit que l'extension lexicographique correspond à l'application ainsi définie :

$$\psi(0) = H_+ \text{ et } \psi(x) = H \text{ si } x \neq 0 \text{ (} x \in Q_+ \text{)} .$$

On peut trouver de très nombreuses applications ψ vérifiant les conditions (11) et (12) . Nous allons en indiquer quelques unes dans le cas où le cocycle f est nul , c.a.d. où G est somme directe des groupes H et Q :

La condition (12) se simplifie alors en :

$$(12') \quad \psi(x) + \psi(y) \geq \psi(x+y)$$

On voit que l'on obtient par exemple tout un ensemble de solutions de la forme suivante : On choisit un élément A de $\mathcal{S}$ tel que $A \geq (0)$ et on pose

$\psi(x) = A$ si $x \neq 0$ ($x \in Q_+$) . La structure d'ordre sur G est alors définie par :

$$(a, x) \geq 0 \iff \{ x = 0 \text{ et } a \geq 0 ; \text{ ou } x > 0 \text{ et } a \in A \}$$

Dans le cas où on prend $A = H_+ = (0)$ G devient la somme directe ordonnée de H et Q , c.a.d. que :

$$(a, x) \geq 0 \iff \{ a \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \}$$

On obtient un autre type de solutions en considérant un homomorphisme quelconque ψ' (non nécessairement croissant) de Q dans H . On pose alors pour tout $x \in Q_+$: $\psi(x) = (\psi'(x))$. On voit que $\psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$. La relation (12') se trouve bien vérifiée. L'ordination sur le groupe G se trouve définie de la façon suivante :

$$(13) \quad (a, x) \geq 0 \iff \{ x \geq 0 \text{ et } a \geq \psi'(x) \}$$

Si on prend pour ψ' l'homomorphisme nul , on retombe sur la somme directe ordonnée.

D'ailleurs la structure d'ordre associée à l'homomorphisme ψ' est liée à celle de la somme directe ordonnée :

Considérons en effet l'automorphisme σ de G défini par :

$$\sigma(a, x) = (a - \psi'(x), x)$$

σ laisse invariant les éléments de H et les classes de G selon H .

Par suite si on se donne sur G une ordination compatible avec sa structure d'extension de Q par H , la transformée par σ^{-1} de cette ordination est encore compatible avec sa structure d'extension . Or on voit que l'ordination définie par l'homomorphisme ψ sur G est la transformée par σ^{-1} de l'ordination de la somme directe.

Cette méthode permet de construire de nombreux groupes réticulés ; car :

Théorème 1.- Quel que soit l'homomorphisme ψ' de Q dans H , si H et Q sont réticulés, il en est de même de G .

En effet l'ordination de G est image par σ^{-1} de la somme directe ordonnée de H et Q , donc elle fait de G un groupe réticulé. On voit à partir de là (comme on peut d'ailleurs le vérifier directement) que :

$$\inf [(a,x), (b,y)] = [\psi'(\inf(x,y)) + \inf(a - \psi'(x), b - \psi'(y)), \inf(x,y)] .$$

Extensions lexicographiques.

Soient G un groupe ordonné, H un sous-groupe isolé de G et Q le groupe ordonné quotient G/H . G est une extension de Q par H . C'est une extension lexicographique si et seulement si H vérifie la propriété suivante :

$$\xi \in G, h \in H \text{ et } h \leq \xi \longrightarrow \{ \xi \in H \text{ ou } \xi > 0 \}$$

Si G est un groupe ordonné, tout sous-groupe H de G vérifiant la propriété précédente sera dit fortement isolé.

Théorème 2.- Tout sous-groupe fortement isolé d'un groupe ordonné G est sous-groupe isolé de G et, dans le cas où G est réticulé, sous-groupe propre de G .

Théorème 3.- Un groupe G , extension lexicographique de Q par H , est réticulé si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

- 1) H est réticulé et Q totalement ordonné.
- 2) $H = \{0\}$ et Q est réticulé.

On voit que le cas 2) entraîne trivialement que G soit réticulé. Supposons que l'on soit dans le cas 1) : Soient $\xi = (a,x)$ et $\eta = (b,y)$.

Si $x \neq y$ on a par exemple $x > y$ et alors $\xi > \eta$. Si $x = y$, on voit que $\inf(\xi, \eta) = (\inf(a,b), x)$. Dans tous les cas $\inf(\xi, \eta)$ existe et G est bien réticulé.

Supposons réciproquement que G soit réticulé. H , étant un sous-groupe fortement isolé de G est sous-groupe propre de G , donc également réticulé.

Montrons que Q est totalement ordonné. Supposons que x et y soient deux éléments de Q incomparables. Soient $\xi = (0,x)$, $\eta = (0,y)$ et

$\zeta = \inf(\xi, \eta) = (c,z)$. On en déduit $z \leq x, y$ et comme x et y sont incomparables, $z < x, y$.

Puisque le groupe réticulé H n'est pas réduit à $\{0\}$, $\exists c' \in H$ avec $c' > c$. Si on pose $\zeta' = (c', z)$, on a $\zeta < \zeta' \leq \xi, \eta$ ce qui contredit $\zeta = \inf(\xi, \eta)$. Donc Q est totalement ordonné.

Corollaire 1.- Pour que l'extension ordonnée de Q par H soit totalement ordonnée, il faut et il suffit qu'elle soit lexicographique et que Q et H soient totalement ordonnés.

Corollaire 2.- Si H est un sous-groupe fortement isolé du groupe réticulé G , le groupe quotient G/H est totalement ordonné.

On montre que le résultat de deux extensions lexicographiques successives est encore une extension lexicographique :

Soient H , Q_1 et Q_2 trois groupes ordonnés (partiellement), G une extension lexicographique de Q_1 par H et Γ une extension lexicographique de Q_2 par G . Alors $Q = \Gamma/H$ (ordonné canoniquement) apparaît comme une extension lexicographique de Q_2 par Q_1 et Γ est extension lexicographique de Q par H .

En particulier si H est réticulé et si Q_1 et Q_2 sont totalement ordonnés, Γ est le groupe réticulé extension lexicographique du groupe totalement ordonné Q par le groupe réticulé H .

Application à la structure des groupes réticulés.

Nous allons dans ce qui suit déterminer la structure des groupes réticulés qui sont réalisables comme sous-groupes propres d'une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés.

G étant un groupe réticulé, on rappelle que les filets de G sont les classes d'équivalence définies dans l'ensemble G_+ par la relation :

$$a \equiv b \iff \left\{ \inf(a, x) = 0 \iff \inf(b, x) = 0 \quad \forall x \in G_+ \right\}$$

On désigne par $\bar{a}$ le filet défini par l'élément a de G_+ . L'ensemble des filets de G forme un treillis si on l'ordonne par la relation :

$$\bar{a} \gg \bar{b} \iff \left\{ \inf(a, x) = 0 \implies \inf(b, x) = 0 \quad \forall x \in G_+ \right\}$$

On montre ([2]) qu'un groupe réticulé est réalisable comme sous-groupe propre d'une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de filets.

Le problème posé se ramène donc à déterminer les groupes ayant cette dernière propriété.

G étant un groupe réticulé nous désignerons dans la suite par $\hat{G}$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des éléments de G_+ n'appartenant pas à un filet maximal de G . On voit en particulier que si G n'a pas de filet maximal on a $\hat{G} = G$. Comme les groupes totalement ordonnés sont ceux qui n'ont

qu'un seul filet différent de $\{0\}$, on voit que le groupe réticulé G est totalement ordonné si et seulement si $\hat{G} = \{0\}$.

On peut alors montrer que $\hat{G}$ est un sous-groupe fortement isolé de G tel que $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$.

Si G n'a qu'un nombre fini de filets et n'est pas totalement ordonné, les filets de G et de $\hat{G}$ se correspondent biunivoquement de la manière suivante : Tout filet non maximal de G est également filet (non maximal) de $\hat{G}$. Si $\mathcal{M}$ est le filet maximal de G , l'ensemble $\hat{G} \cap \mathcal{M}$ n'est pas vide et est le filet maximal de $\hat{G}$.

On montre aussi que si G est extension lexicographique du groupe totalement ordonné Q par le groupe réticulé H , on a $\hat{G} = \hat{H}$.

Le théorème suivant donne la clé du problème posé plus haut :

Théorème 4.- Si le groupe réticulé G a un nombre fini n de filets et est tel que $G = \hat{G}$, alors G est somme directe ordonnée de groupes réticulés ayant moins de n filets.

La marche générale de la démonstration est la suivante : On part d'une réalisation de G comme sous-groupe propre d'une somme directe ordonnée de m groupes totalement ordonnés $\sum_{1 \leq i \leq m} \Gamma_i$. On définit ensuite une partition de l'ensemble $M = \{1, 2, \dots, m\}$ en sous-ensembles $M_1, \dots, M_r$ tels que $r \geq 2$, que $M_j \neq \emptyset$ ($1 \leq j \leq r$) et que G soit une somme directe ordonnée de sous-groupes propres H_j ($1 \leq j \leq r$) de $\sum_{i \in M_j} \Gamma_i$. Les groupes H_j ont alors moins de filets que G .

On a immédiatement le :

Corollaire.- Tout groupe réticulé $G \neq \{0\}$ et n'ayant qu'un nombre fini de filets peut se représenter comme une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes réticulés G_i ($1 \leq i \leq r$) tels que $\hat{G}_i \neq G_i$

A partir de ce corollaire on peut décrire tous les groupes n'ayant qu'un nombre fini de filets.

A tout nombre entier positif ou nul nous allons associer de la manière suivante une classe de groupes réticulés :

La classe 0 sera composée du seul groupe $\{0\}$.

La classe $n-1$ étant définie, un groupe réticulé G sera dit de classe n s'il est extension lexicographique d'un groupe totalement ordonné (qui peut

être $\{0\}$) par un groupe réticulé de classe $n-1$ ou s'il est somme directe ordonnée d'un nombre fini de telles extensions.

Il en résulte que tout groupe de classe n est de classe $n+1$ et que la somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes de classe n est encore de classe n .

On voit en particulier que les groupes de classe 1 sont les groupes totalement ordonnés et les sommes directes ordonnées d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés.

Par récurrence sur la classe, on voit facilement que tout groupe réticulé appartenant à l'une des classes précédentes n'a qu'un nombre fini de filets. Réciproquement :

Théorème 5.— Tout groupe réticulé G n'ayant qu'un nombre fini de filets appartient à l'une des classes précédentes.

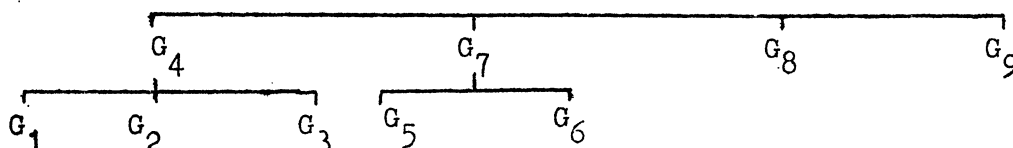
On raisonne par récurrence sur le nombre m des filets du groupe G . Le théorème est vrai si $m = 1$ (cas où $G = \{0\}$) et si $m = 2$ (cas d'un groupe totalement ordonné). Supposons qu'il ait été démontré pour tout groupe ayant moins de m filets.

1er cas. $G = \hat{G}$. Le théorème 4 montre que G est somme directe ordonnée $\sum_{1 \leq i \leq r} G_i$ où les G_i sont des groupes réticulés ayant $m-1$ filets au plus.

Chaque G_i appartient à une classe $n(i)$ d'après les hypothèses de récurrence. Donc G appartient à la classe $n = \sup_{1 \leq i \leq r} (n(i))$.

2ème cas. $G \neq \hat{G}$. G est alors extension lexicographique du groupe totalement ordonné $G/\hat{G}$ par $\hat{G}$. Le groupe $\hat{G}$ a m filets au plus et, étant tel que $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$, il entre dans le premier cas. Il appartient donc à une classe n . Par suite G appartient à la classe $n+1$.

Le théorème précédent résout complètement le problème que nous nous étions posé. Il montre en particulier qu'à tout groupe réticulé G ayant un nombre fini de filets, on peut faire correspondre un tableau tel que le suivante :



dans lequel chaque groupe G_i est un groupe totalement ordonné différent de $\{0\}$. Chaque barre horizontale représente la somme directe ordonnée des groupes réticulés situés au-dessous et qui lui sont attachés par de petits traits verticaux. La figure formée par une barre horizontale rattachée à un G_i situé au-dessus d'elle représente une extension lexicographique de G_i par le groupe représenté par la barre. On suppose en outre que chaque barre horizontale porte au-dessous d'elle au moins deux petits traits verticaux et que deux groupes tels que G_i et G_j ne peuvent être directement attachés au moyen d'un trait vertical.

Le tableau dessiné plus haut représente donc la somme directe ordonnée de quatre groupes Γ_1, Γ_2, G_8 et G_9 , le groupe Γ_1 étant une extension lexicographique de G_4 par la somme directe ordonnée des trois groupes G_1, G_2 et G_3 et Γ_2 étant une extension lexicographique de G_7 par la somme directe ordonnée de G_5 et G_6 . Le théorème suivant montre de plus qu'un tel tableau est unique :

Théorème 6 (d'unicité). - Un groupe réticulé G ne peut se présenter que d'une manière comme une somme directe ordonnée d'un ensemble quelconque (fini ou non) de groupes réticulés $G_i (i \in I)$ tels que $G_i \neq G_j$.

Remarque. Ce théorème généralise le théorème 3 du Ch.II, § 2 de [2] d'après lequel un groupe réticulé ne peut se représenter que d'une manière comme somme directe ordonnée de groupes totalement ordonnés différents de $\{0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] . Eilenberg et Mac Lane - Cohomology theory in abstract groups I.
Annals of Math. Vol.48 (1947) p.51-78.
- [2] . P. Jaffard - Contribution à l'étude des groupes ordonnés.
Journal Math.Pures et appl. t.32 (1953) p.203-280.
- [3] . " - Extensions des groupes réticulés et applications.
A paraître aux Publications Mathématiques de la faculté d'Alger.

[2] contient les généralités utilisées ici sur les groupes ordonnés.

[3] contient les démonstrations des théorèmes énoncés ici ainsi qu'une étude plus précise des classes auxquelles appartient un groupe réticulé.