Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Michel Langevin

Facteurs premiers des coefficients binomiaux

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1978-1979), exp. n° 27, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 27, 15 p.

7 mai 1979

FACTEURS PREMIERS DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

par Michel LANGEVIN (*)

Table des Matières

1. Introduction et notations.

Soient k , n deux entiers positifs. Le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal k dans un ensemble de cardinal $(n+k)$ est $(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)$. Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble en comptant $n+k$ est par conséquent $\frac{1}{k!}(n+1)\ldots(n+k)$, c'est-à-dire $(n+k)!(n!\,k!)^{-1}$, ce qu'on note $\binom{n+k}{k}$.

Par symétrie, on peut supposer $k \leqslant n$, convention valable désormais. De façon clairement équivalente, on peut définir $\binom{n+k}{k}$ comme le coefficient de X^k dans le développement, dans $\mathbb{Z}[X]$, de $(1+X)^{n+k}$.

Le but de cet exposé est d'étudier les facteurs premiers de $\binom{n+k}{k}$.

Quelques notations. - La lettre p est réservée aux nombres premiers, v_p désigne la valuation p-adique ; on pose, pour tout entier n ,

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1 \ , \quad P(n) = \sup_{p|n} p \ , \quad u(n) = \prod_{p|n} p$$

$$\Omega(n) = \sum_{p^i|n} 1 \ , \quad \pi(n) = \sum_{p\leqslant n} 1 \ , \quad \theta(n) = \sum_{p\leqslant n} \log p \ , \quad \psi(n) = \sum_{p^i\leqslant n} \log p \ ,$$

$\nu(n) = \exp \psi(n)$ est le plus petit commun multiple (ppcm) de 1 , 2 , ... , n ; on abrège $\omega(\binom{n+k}{k})$ en $\omega(n\ ,\ k)$ et de même $P(\binom{n+k}{k})$ en $P(n\ ,\ k)$; le plus grand commun diviseur (pgcd) de deux entiers a et b est noté $(a\ ,\ b)$. On écrit $\log_2$, $\log_3$ pour log.log , log.log.log. ...

(*) Texte reçu en novembre 1979.
Michel LANGEVIN, Département de Mathématiques, Ec. Norm. Sup. Saint Cloud, 92211 SAINT CLOUD CEDEX.

2. Résultats actuels.

Les modes d'investigation sont basés sur :

- l'arithmétique élémentaire,

- le théorème fondamental des nombres premiers (sous forme d'approximation des fonctions π , θ , ψ) ,

- des techniques de crible quand k n'est pas "trop petit" devant n ,

- des techniques transcendantes quand k est "petit" devant n (en fait, les situations sont très différentes dans ces deux cas et il semble que la formulation "classique" des problèmes soit à revoir ; par exemple, le problème pour $P(n , k)$ est de trouver un bon minorant $\mu(k)$ vérifiant $P(n , k) > \inf(n , \mu(k))$ pour tout couple (n , k) , cf. [L 1]).

- des calculs sur machine (pour achever des démonstrations, tester ou suggérer des conjectures).

La plupart des résultats connus sont dus à ERDÖS, lequel, seul ou en collaboration avec d'autres tels que ECKLUND, EGGLETON, GRAHAM, NICOLAS, SELFRIDGE, ..., a apporté de nombreux résultats dans ce domaine depuis les années trente. On lui doit également de nombreuses conjectures ainsi que des listes de problèmes ouverts. Le dernier paragraphe de ce texte est un résumé, avec références bibliographiques, relatif aux résultats récents non abordés en détail dans ce qui suit.

Les inégalités suivantes sont connues :

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout couple n , k d'entiers $(n \geqslant k \geqslant k_0(\theta)$ convenable),

$$\omega(n , k) > (1 - \varepsilon) \log 4 \ (k/\log k) \quad \text{(cf. [E 2])}.$$

(1) est le meilleur résultat possible car on a :

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $k > k_1(\varepsilon)$ convenable,

$$\omega(k , k) < (1 + \varepsilon) \log 4 \ (k/\log k) \quad \text{(cf. [E 2])}.$$

Plus généralement, on a toujours :

$$w(n , k) > \log\binom{n + k}{k}(\log(n + k))^{-1} \tag{3}$$

et

$$\omega(n , k) = (1 + 0(1)) \log\binom{n + k}{k}(\log(n + k))^{-1} \quad \text{quand} \quad k > (n + k)^{1-o(1)}$$

(cf. [E 3]).

En particulier, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\liminf_{n\to\infty} \omega(n , k)/k \geqslant 1$.

(4) MIGNOTTE [M] a montré qu'en fait l'inégalité $\omega(n , k) \geqslant k$ est acquise dès que $n \geqslant k!$. SELMER [S] a raffiné ce résultat en prouvant qu'il suffisait qu'aucun des entiers consécutifs $n + 1$, $n + 2$, ... , $n + k$ ne divise $\nu(k)$, d'où

une amélioration de l'inégalité précédente en $(n + k) \geqslant 3^k$ (cf. [H]) (et même, $(n + k) \geqslant (e + \varepsilon)^k$, d'après le théorème des nombres premiers ; pour une version effective cf. [R S]).

3. Un théorème élémentaire.

Le théorème élémentaire ci-dessous contient, et précise, tous les résultats donnés au § 2.

THÉORÈME 1.

(i) $(1/\nu(k))\,\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i) = \mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{n + i}{(n+i\ ,\ \nu(k))} = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{n + i}{(n+i\ ,\ \nu(k))}$ divise $\binom{n + k}{k}$.

(ii) $\omega\left(\binom{n + k}{k}\right) \geqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant k} \omega\left(\frac{n + i}{(n + i\ ,\ \nu(k))}\right)$.

(iii) $\binom{n + k}{k}$ divise $\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}\left(\frac{n + i}{(n + i\ ,\ \mathrm{ppcm}(n\ ,\ k))}\right)$.

(iv) $\binom{n + k}{k} \leqslant (n + k)(n + k - 1) \ldots (n + k - w(n\ ,\ k) + 1)$.

(v) $k!$ divise $\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i\ ,\ \nu(k))$, qui divise $\nu(k)(k - 1)!$.

(vi) les résultats (i), (iii), (v) sont les meilleurs possibles : pour chacune des relations de divisibilité figurant dans (i), (iii), (v) et pour toute valeur de k, il existe une valeur de n qui en fasse une égalité.

LEMME 1. - *Soient* $n_1, n_2, \ldots, n_k, d$ *des entiers positifs, alors*

$$\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{n_i}{(n_i\ ,\ d)} = \frac{1}{d}\,\mathrm{ppcm}(n_1\ ,\ \ldots\ ,\ n_k\ ,\ d)\ .$$

Démonstration du lemme 1.

$$\mathrm{ppcm}(n_1,n_2,\ldots,n_k,d)=\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}(\mathrm{ppcm}(n_i,d))=\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}\left(\frac{n_i\, d}{(n_i,d)}\right)=d\ \mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{n_i}{(n_i,d)}\ .$$

L'égalité

$$\frac{1}{\nu(k)}\,\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i) = \mathrm{ppcm} \frac{n + i}{(n + i\ ,\ \nu(k))}$$

est une conséquence du lemme puisque, clairement, $\nu(k)$ divise

$$\mathrm{ppcm}(n + 1\ ,\ n + 2\ ,\ \ldots\ ,\ n + k)\ .$$

On voit de même que

$$\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{n + i}{(n + i\ ,\ \mathrm{ppcm}(n\ ,\ k))} \text{ divise } \frac{1}{k}\,\mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i)\ .$$

Comme, pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$, les entiers $\frac{n + i}{(n + i\ ,\ n + j)}$ et $\frac{n + j}{(n + i\ ,\ n + j)}$ sont premiers entre eux, on voit que les entiers $(n + i)/(n + i\ ,\ \nu(k))$ sont premiers entre eux deux à deux ; l'égalité de leur produit et de leur ppcm en résulte. Il est maintenant clair que (ii) est une conséquence de (i). Pour tout facteur premier p de $\binom{n + k}{k}$, (iii) implique l'existence d'une valeur de i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ telle que la composante p-primaire de $\binom{n + k}{k}$ divise $\frac{n + i}{(n + i\ ,\ \mathrm{ppcm}(n\ ,\ k))}$ et donc $\binom{n + k}{k}$ est majoré par la borne supérieure des produits composés de $\omega(n,k)$

termes parmi $\frac{n+1}{(n+1\ ,\ \mathrm{ppcm}(n\ ,\ k))}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{n+k}{(n+k\ ,\ \mathrm{ppcm}(n\ ,\ k))}$. On voit ainsi que l'énoncé (iv) est un corollaire de (iii).

La première relation de divisibilité de (v) est une conséquence immédiate de (i). Comme $\nu(k)\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{n+i}{(n+i\ ,\ \nu(k))} = \mathrm{ppcm}_{1\leqslant i\leqslant k}(n+i)$ est multiple de $k\binom{n+k}{k}$ d'après (iii), on voit que $\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n+i\ ,\ \nu(k))$ divise $\nu(k)(k-1)!$, ce qui est la seconde relation de divisibilité de (v). Il reste donc à prouver les relations de divisibilité de (i) et (iii). On rappelle le lemme classique suivant.

LEMME 2. - $v_p(n!) = \sum_{i>0}[\frac{n}{p^i}]$.

Démonstration.

$$v_p(n!) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n}\ \sum_{p^i\mid m} 1 = \sum_{i>0}\Big(\sum_{m\leqslant n,\,p^i\mid m} 1\Big) = \sum_{i>0}[\frac{n}{p^i}]\ .$$

COROLLAIRE. - $v_p(\binom{n+k}{k}) = \sum_{i>0}([\frac{n+k}{p^i}] - [\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}])$.

Soit

$$e(n\ ,\ k\ ,\ p\ ,\ i) = [\frac{n+k}{p^i}] - [\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}]\ .$$

Il est clair que $e(n\ ,\ k\ ,\ p\ ,\ i)$ vaut 0 ou 1 , 0 notamment quand p^i divise n ou k , ou bien lorsque aucun multiple de p^i n'est parmi $n+1,\dots,n+k$ (car, alors, $[\frac{n+k}{p^i}] = [\frac{n}{p^i}]$).

Comme $v_p(\mathrm{ppcm}(n\ ,\ n+1\ ,\ \dots\ ,\ n+k\ ,\ k)) = \sum_i 1$, cette sommation s'étendant aux diverses valeurs de i telles que p^i divise l'un des entiers

$$n\ ,\ n+1\ ,\ \dots\ ,\ n+k\ ,\ k\ ,$$

on voit que $\binom{n+k}{k}\,\mathrm{ppcm}(n\ ,\ k)$ divise $\mathrm{ppcm}(n\ ,\ n+1\ ,\ \dots\ ,\ n+k\ ,\ k)$. Il n'y a alors plus qu'à appliquer le lemme 1 pour obtenir la relation de divisibilité annoncée dans (iii).

De même, si p^i divise l'un des nombres $n+1\ ,\ \dots\ ,\ n+k$, ou bien $p^i \leqslant k$, ou bien $e(n\ ,\ k\ ,\ p\ ,\ i) = 1$; par conséquent, en évaluant comme ci-dessus la valuation p-adique d'un ppcm, on obtient :

$$\mathrm{ppcm}(n+1\ ,\ n+2\ ,\ \dots\ ,\ n+k)\mid \nu(k)\binom{n+k}{k}\ ,$$

d'où (i).

Remarque 1. - On peut prouver les relations

$$k\binom{n+k}{k}\mid \mathrm{ppcm}(n+1\ ,\dots,\ n+k) \quad\text{et}\quad \mathrm{ppcm}(n+1\ ,\dots,\ n+k)\mid \nu(k)\binom{n+k}{k}$$

sans utiliser le lemme 2 (cf. [L 1]).

La partie (vi) du théorème 1 s'obtient comme dans cette dernière référence en choisissant pour n des valeurs de la forme

$$\lambda \sum_{p\leqslant k} p^{a(p)}\quad (\ \lambda\ \text{entier},\ p^{a(p)} > k) \text{ et } 1 + \lambda \prod_{p\leqslant k} p^{a(p)}\ .$$

Remarque 2. - De (iii) on déduit que

$$\binom{n+k}{k}=\prod_{1\leq i<k}\frac{n+i}{i}=\prod_{0\leq i<k}\frac{n+k-i}{i+1} \text{ divise } \operatorname{ppcm}_{1\leq i<k}\frac{n+i}{(n+i,i)}=\operatorname{ppcm}_{0\leq i<k}\frac{n+k-i}{(n+k-i,i+1)} .$$

4. Conséquences du théorème 1.

(4.A) L'inégalité $\omega(n , k) \geq \sum_{1\leq i<k} \omega\left(\frac{n+i}{(n+i , \nu(k))}\right)$.

Cette inégalité raffine le résultat de SELMER rappelé au § 2. Elle montre de plus que l'énoncé de cet auteur est en fait naturel.

THÉORÈME 2. - Pour tout entier $y \geq 1$ vérifiant $n > \nu(k)^{1/y} (k-1)^{(y-1)/2}$, on a $w(n , k) > k - y$.

La démonstration utilise le lemme 3.

LEMME 3. - Soient $m_1 , m_2 , \ldots , m_\ell$ des entiers,

$$\prod_{1\leq i\leq \ell} m_i \text{ divise } \operatorname{ppcm}_{1\leq i\leq \ell} m_i \prod_{1\leq i<j\leq \ell}(m_i , m_j) .$$

Démonstration. - Il suffit d'écrire

$$\sum_{1\leq i\leq \ell} v_p(m_i) \text{ sous la forme } \sum_{1\leq i\leq \ell} \inf(\sup_{1<j\leq \ell} v_p(m_j) , v_p(m_i))$$

(cf. [L 6]).

Par conséquent, pour toute partie X de $(n + 1 , n + 2 , \ldots , n + k)$ composée de diviseurs de $\nu(k)$,

$$\prod_{n+i\in X}(n + i) \leq \nu(k)(k - 1)^{x(x-1)/2} \text{ avec } x = \operatorname{card} X .$$

Par conséquent, si, pour une valeur entière de y , on a

$$n > \nu(k)^{1/y} (k - 1)^{(y-1)/2} ,$$

le nombre de diviseurs de $\nu(k)$ parmi $(n + 1)$, $(n + 2)$, ... , $(n + k)$ est inférieur à y . Le théorème 2 est maintenant une conséquence de l'inégalité

$$\omega(n , k) \geq \sum_{1\leq i<k} \omega\left(\frac{n+i}{(n+i , \nu(k))}\right) .$$

(4.B) Amélioration des résultats (1), (2), (3) du § 2.

De (iv), on déduit l'inégalité

$$\binom{n+k}{k} \leq (n + k)^{\omega(n,k)}$$

prouvée par ERDÖS. Plus précisément, on déduit de (iv),

(iv)' $$(n + 1)(n + 2) \ldots (n + k - \omega(n , k)) \leq k!$$

d'où, en particulier, pour $k \geq 10$

$$\omega(n , k) \geq k\left(1 - \frac{\log(k + \log k) - 1}{\log(n + 1)}\right) .$$

On peut déduire de (iv)' une minoration analogue à celle du lemme 2 de [L 2] où

l'on montre très simplement, en posant $\omega'(n , k) = \omega((n + 1)(n + 2) \dots (n + k))$, que

$$(n + 1)(n + 2) \dots (n + k - \omega'(n , k)) \geqslant (k - 1)! .$$

De même que dans [L 2], on déduit de cette inégalité le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Soit $b \geqslant 1$, si $n \geqslant bk$, alors

$$\omega(n , k) \geqslant [((b + 1) \log(b + 1) - b \log b) k/\log((b + 1) k)] .$$

Remarque. - Le lemme 2 de [L 2] permet de prouver (iv)' (et donc (iv)) en observant que, pour les facteurs premiers de $\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i)$ qui ne divisent pas $\binom{n + k}{k}$, on a

$$v_p(\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i)) = v_p(k!) .$$

Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers ; soit m un entier ; il est clair que

$$\prod_{p\leqslant p_{\omega(m)}} p \leqslant m , \text{ i. e. } \theta(p_{\omega(m)}) \leqslant \log m ,$$

d'où l'on déduit, grâce à [R. S],

$$\omega(m) \log \omega(m) \leqslant \log m .$$

En appliquant cette inégalité au coefficient binomial $\binom{n + k}{k}$, on obtient :

$$\omega(n , k) \log \omega(n , k) \leqslant \log \frac{(n + k)^{n+k}}{n^n k^k}$$

c'est-à-dire, en posant $b = n/k$, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - $\omega(n , k) \log \omega(n , k) \leqslant ((b + 1) \log(b + 1) - b \log b) k$.

Ce théorème permet de retrouver la majoration de $\omega(n , k)$, donnée par ERDÖS, dans le § 2, avec l'avantage d'une inégalité valable pour tout couple (n , k) et ne portant donc pas seulement sur des limites.

(4.C) Une amélioration du théorème de Sylvester et Schur.

Un résultat célèbre, dû à SYLVESTER, et retrouvé indépendamment beaucoup plus tard par SCHUR, établit que

$$P(\binom{n + k}{k}) > k$$

(démonstrations dans [E], [L 1], [L 2]).

Cette inégalité est une conséquence du théorème 5 suivant, visiblement plus fort, qu'on déduit du théorème 1 :

THÉORÈME 5. - Pour tout couple (n , k) $(n \geqslant k)$, on a

(i) $\omega(\binom{n + k}{k}) \geqslant \pi(k)$,

(ii) l'inégalité ci-dessus est stricte hormis dans les cas suivants :

$\binom{6}{3}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{8}{3}$, $\binom{10}{5}$, $\binom{12}{5}$, $\binom{13}{5}$, $\binom{14}{7}$, $\binom{15}{7}$, $\binom{16}{7}$, $\binom{17}{7}$, $\binom{18}{7}$, $\binom{26}{13}$,

$\binom{27}{13}$, $\binom{28}{14}$, $\binom{30}{14}$, $\binom{31}{14}$, $\binom{46}{23}$, $\binom{48}{23}$, $\binom{49}{23}$, $\binom{50}{23}$.

Remarque 1. – La partie (i) du théorème 5 est citée par SELMER [S].

Remarque 2. – L'étude de $\omega(n , k)$ et $P(n , k)$ pour $k \leqslant n \leqslant c_1 k$ (c_1 constante donnée) n'est en fait que l'étude du nombre d'éléments premiers dans l'intervalle $(n + 1 , (1 + c_1^{-1})n)$, et se ramène donc à des évaluations fines des fonctions ψ , θ , π (cf. [L 2]). En fait, le nombre de couples (n , k) pour lesquels on a $P(n , k) \leqslant \inf(n , ck)$ (c constante donnée quelconque) est fini (cf. [L 2]) et le problème de l'amélioration du théorème de SYLVESTER-SCHUR est donc ramené à une "bonne" caractérisation de cet ensemble. Par exemple (cf. [L 4]),

$$P(n , k) \geqslant \inf(n + 1 , 3k) \quad \text{si} \quad k \geqslant 4 \quad \text{et} \quad (n , k) \neq (23 , 5) .$$

(4.D) Conséquence des travaux numériques de SELMER.

Soit $n(k) = \sup\{n , \omega(n , k) < k\}$. Pour $n > n(k)$, on a donc $\omega(n , k) \geqslant k$. SELMER a utilisé son critère pour faire des calculs sur machine lui donnant $n(k)$ pour $k \leqslant 100$. Le rang $n(k)$ est très inférieur (en général $\leqslant \frac{1}{2} k^e$) à celui donné par le théorème 1 (i) $(n(k) < \exp((1 + o(1)) k))$, de sorte que le nombre de vérifications à effectuer pour vérifier l'inégalité (vraie pour $n > n(k)$)

$$P(n , k) \geqslant \inf((n + 1) , p_k) \quad (p_k \ ; \ \text{k-ième nombre premier})$$

est assez petit. On obtient ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME 6. – Pour $2 \leqslant k \leqslant 100$, l'inégalité conjecturale (cf. L 5, L 6)

$$P(\binom{n + k}{k}) \geqslant \inf(n + 1 , p_k)$$

est vraie.

(4.E) Sur des conjectures d'Erdös et Selmer.

Le travail numérique de SELMER le conduit à conjecturer l'existence de deux constantes > 0 entre lesquelles le rapport $n(k)/k^e$ resterait compris pour toutes les valeurs de k (cf. [S]). Cette conjecture précise une conjecture antérieure d'ERDÖS, GUPTA et KHARE

$$\lim_{k \to \infty} (\log n(k)/\log k) = e .$$

Dans ERDÖS (cf. [E 3]) se trouve aussi la conjecture suivante

$$\omega(n , k) = (1 + O(1)) \, k(\sum_{k<p<n+k} \frac{1}{p}) \quad \text{pour} \quad k \quad \text{"grand".}$$

Cette dernière conjecture est imprécise ; en effet, sans majoration de n en

fonction de k , on en déduirait, puisque (cf. [R S])

$$|\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} - \log_2 x - B| < \frac{1}{\log^2 x} \quad (B = 0{,}2615\ldots) ,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}(\liminf_{n\to\infty}\omega(n\ ,\ k)/\log_2 n)\right) = 1 ,$$

ce qui contredit une autre conjecture d'ERDÖS :

$$\text{pour tout } k \geq 2 ,\ \liminf_{n\to\infty}\sum_{1\leq i\leq k}\omega(n+i) \leq k + \pi(k) .$$

Nous reviendrons sur ce problème au paragraphe suivant ; bornons-nous à ajouter une hypothèse de la forme $n \leq k^c$, et écrivons la première conjecture d'ERDÖS sous la forme : (pour tout réel $c > 1$)

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\inf_{k\leq n\leq k^c}\omega(n\ ,\ k)\left(\sum_{k<p<n+k}\frac{1}{p}\right)^{-1} =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sup_{k\leq n\leq k^c}\omega(n\ ,\ k)\left(\sum_{k<p<n+k}\frac{1}{p}\right)^{-1} = \log c .$$

Sous cette forme, cela est tout-à-fait compatible avec les conjectures précitées sur $n(k)$. On peut justifier ainsi l'évaluation proposée.

LEMME 4. - $\sum_{p\leq k}[\frac{k}{p}] - \pi(k) \leq \sum_{1\leq i\leq k}\omega(n+i) - \omega(n\ ,\ k) \leq \sum_{p\leq k}[\frac{k}{p}]$.

Démonstration.

$$\sum_{1\leq i\leq k}\omega(n+i) = \sum_{1\leq i\leq k}\sum_{p\mid n+i}1 = \sum_p\sum_{1\leq i\leq k,\,p\mid n+i}1 = \sum_p([\frac{n+k}{p}] - [\frac{n}{p}])$$

$$= \sum_p([\frac{n+k}{p}]-[\frac{n}{p}]-[\frac{k}{p}]) + \sum_{p\leq k}[\frac{k}{p}] \leq \sum_p \inf(1\ ,\ v_p(\tbinom{n+k}{k})) + \sum_{p\leq k}[\frac{k}{p}] ,$$

d'où la majoration annoncée. La minoration s'obtient en observant de même que :

$$\sum_p[\frac{k}{p}] - \pi(k) \leq \sum_{1\leq i\leq k}\omega(n+i) - \omega(\textstyle\prod_{1\leq i\leq k}(n+i)) .$$

D'autre part, en notant par fr la fonction partie fractionnaire :

$$\sum_{1\leq i\leq k}\omega(n+i) = (n+k)\left(\sum_{p\leq n+k}\frac{1}{p}\right) - n\left(\sum_{p<n}\frac{1}{p}\right) - \sum_p(\mathrm{fr}(\frac{n+k}{p}) - \mathrm{fr}(\frac{n}{p}))$$

$$= k\left(\sum_{p\leq n+k}\frac{1}{p}\right) + n\left(\sum_{n<p\leq n+k}\frac{1}{p}\right) - \sum_p(\mathrm{fr}(\frac{n+k}{p}) - \mathrm{fr}(\frac{n}{p})) .$$

On obtient donc, grâce au lemme 4, le lemme suivant.

LEMME 5.

$$n\left(\sum_{n<p\leq n+k}\frac{1}{p}\right) - \sum_p(\mathrm{fr}(\frac{n+k}{p}) - \mathrm{fr}(\frac{n}{p})) \leq \omega(n\ ,\ k) - k\sum_{k<p\leq n+k}\frac{1}{p}$$

$$\leq n\left(\sum_{n<p\leq n+k}\frac{1}{p}\right) + 2\pi(k) - \sum_p(\mathrm{fr}(\frac{n+k}{p}) - \mathrm{fr}(\frac{n}{p})) .$$

Quand n est de la forme k^c avec $c > 1$, la quantité $n\left(\sum_{n<p\leq n+k}\frac{1}{p}\right)$ est, comme $\pi(k)$, un $O(\frac{k}{\log k})$ tandis que $k\sum_{k<p\leq n+k}\frac{1}{p}$ est de l'ordre de ck (au moins). La conjecture repose donc sur la petitesse de la quantité

$$\sum_p(\mathrm{fr}(\frac{n+k}{p}) - \mathrm{fr}(\frac{n}{p})) .$$

5. Application de la méthode de BAKER.

(5.A) Croissances comparées de $\omega(n\ ,\ 2)$ et $P(n\ ,\ 2)$.

Soit $(n_i(k))$ la suite croissante des entiers m vérifiant $P(m) \leqslant k$. Un théorème connu de POLYA établit que

$$\lim_{i\to\infty}(n_{i+1}(k) - n_i(k)) = \infty\ .$$

Cela implique, pour tout entier $a \neq 0$, $\liminf_{n\to\infty} P(n(n + a)) = \infty$.

La méthode de BAKER permet de prouver plus précisément que

$$\liminf_{n\to\infty} P(n(n + a))/\log_2 n > 0 \quad (\text{avec } |a| < n^t \text{ où } t < 1\ ).$$

Ce résultat est obtenu en formant le logarithme du rationnel $\frac{n + a}{n}$, décomposé en produit de puissances de nombres premiers. On obtient une relation liant $\omega(n(n + a))$ et $P(n(n + a))$, d'où l'on déduit le résultat en observant que $\omega(n(n + a)) \leqslant \pi(P(n(n + a))$. Le comportement de $\omega(n(n + a))$ est beaucoup moins bien connu. Comme $\liminf_{n\to\infty} P(n(n + a)) = \infty$, on voit aisément que

$$k + \pi(k) - 1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \omega(n + i)\ .$$

ERDÖS et SELFRIDGE conjecturent qu'on a aussi, pour toute valeur de k ,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \omega(n + i) \leqslant k + \pi(k)\ .$$

C'est évident pour $k = 1$; quand $k = 2$, c'est presque démontré (on obtient 4 pour majorant au lieu de $2 + \pi(2)$) puisqu'un résultat de CHEN ([1]) établit l'existence d'une infinité de nombres premiers p pour lesquels $\Omega(2p + 1) \leqslant 2$. Dire que $\liminf_{n\to\infty} \omega(n\ ,\ 2) = 2$ équivaut à affirmer l'existence d'une infinité de nombres de Mersenne ou de Fermat (ce point m'a été signalé par Jean-Louis NICOLAS). Parmi les autres conjectures d'ERDÖS et SELFRIDGE sur $\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \omega(n + i)$ (et donc sur $\omega(n\ ,\ k)$, cf. lemme 4), mais de natures différentes, citons aussi :

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i<k} \omega(n + i)\ \frac{\log_2 n}{\log n} = 1$$

$$(1 - o(1))\ \log_2 n \leqslant \max_k \frac{1}{k}\ \omega(n\ ,\ k) \leqslant (1 + o(1)\ \log_2 n\ .$$

Terminons par une remarque due à SCHINZEL : soit $\lambda(k) = p_1\ p_2 \cdots p_{k-1}\ p_{k+1}$ alors $\sup_{1\leqslant i<\lambda(k)} \omega(n + i) > k$ pour n assez grand (observer que parmi les $n + i$, se trouvent un multiple de $p_1\ p_2 \cdots p_{k-1}\ p_k$ et un multiple de $p_1 \cdots p_{k-1}\ p_{k+1}$ et que l'un de ces deux nombres au moins a un grand facteur premier pour n assez grand ($\lim_{n\to\infty} P(n(n + a)) = \infty$)). ERDÖS et SELFRIDGE suggèrent qu'il est peut-être possible de ramener $\lambda(k)$ en $\prod_{1\leqslant i\leqslant k} p_i$.

([1]) On pourra aussi consulter les paragraphes 3 et 5 du chapitre 10 du livre d'HALBERSTAM et RICHERT : Sieve methods. - London, Academic Press, 1974 (London mathematical Society Monographs, 4).

(5.B) Minoration de $\omega(n , k)$ lorsque $P(n , k)$ est majoré

THÉORÈME 7. - Soit A un réel > 1 , si $P(n , k) < \exp(\log_2 n)^A$ et si $n > \exp\exp(\log k)^{1/A}$, alors $\omega(n , k) > (1 + o(1))\frac{k}{2(A + 1)}(\log_2 n/\log_3 n)$.

Démonstration. - Grâce aux inégalités

$\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \omega(\frac{n + i}{(n + 1 , \nu(k))}) \leqslant \omega(n , k)$ et $\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i , \nu(k)) \leqslant \nu(k)(k - 1)!$.

vues au théorème 1, il est clair qu'on peut choisir parmi $n + 1 , \ldots , n + k$ deux entiers n_1 et n_2 vérifiant

$\omega(\frac{n_i}{(n_i,\nu(k))}) \leqslant (1+2\varepsilon)\frac{\omega(n,k)}{k}$ et $(n_i,\nu(k)) \leqslant k^{1/\varepsilon}$ (pour k grand et $\varepsilon > 0$ donné)

pour $i = 1 , 2$. En appliquant au logarithme de n_1/n_2 , écrit sous la forme

$$\log \frac{(n_1 , \nu(k))}{(n_2 , \nu(k))} + \sum_{p|(n_1n_2/(n_1,\nu(k))(n_2,\nu(k)))} \mu_p \log p ,$$

les résultats de M. WALDSCHMIDT comme dans [L 3] ou [L 5], on obtient

$$(1 - o(1)/\log_2 n < 2(1 + o(1))\frac{\omega(n , k)}{k}(\log\frac{\omega(n , k)}{k} + \log_2 P(n , k)) ,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 8. - Soit A un réel > 1 , si $P(n , k) \leqslant k^A$ et si $n > k^{3/2}$, alors

$$\omega(n , k) > c(A)\, k \log(\log n/\log k)(\log_2(\log n/\log k))^{-1} ,$$

où $c(A)$ est une constante effectivement calculable.

La démonstration commence comme la précédente ; il convient toutefois de raffiner le choix de n_1 et n_2 de sorte qu'on puisse écrire

$$\log\frac{n_1}{(n_1 , \nu(k))} - \log\frac{n_2}{(n_2 , \nu(k))} = \sum_j \mu_j \log\frac{p_j^{(1)}}{p_j^{(2)}} ,$$

où les $p_j^{(1)}$ et $p_j^{(2)}$ sont les facteurs premiers de $n_1/(n_1,\nu(k))$ et $n_2/(n_2 , \nu(k))$ avec en outre $p_j^{(1)}/p_j^{(2)}$ petit. La méthode est détaillée dans [L 6] et il n'y a quasiment aucune modification à apporter à la démonstration du théorème 1 de [L 6] hormis la simplification provenant du cas particulier présent où l'ensemble X de ce théorème est $(n + 1 , \ldots , n + k)$.

Remarque. - On peut déduire le théorème 8 ci-dessus du théorème 1 de [L 6] grâce à l'inégalité

$$0 \leqslant \omega(\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i)) - \omega(n , k) \leqslant \pi(k) ;$$

mais en fait cela conduit à un résultat un peu plus faible à cause du terme $\pi(k)$. C'est dans la démonstration du théorème 1 qu'il faut remarquer qu'on peut substituer $\omega(n , k)$ à $\omega(\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(n + i))$ comme majorant de $\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \omega(\frac{n + i}{(n + i , \nu(k))})$ et, par conséquent, la minoration obtenue pour $\pi(P(n , k))$, en fait, pour

$\omega(\prod_{1\leq i\leq k}(n+i))$, est valable pour $\omega(n\ ,\ k)$.

THÉORÈME 9. - Le nombre des facteurs premiers de $\binom{n+k}{k}$ qui sont $> k$ est supérieur ou égal à

$$k - [c\pi(k)(\log_2(\frac{\log n}{(\log k)^2}))(\log\frac{\log n}{(\log k)^2})^{-1}] - 1 ,$$

où c est une constante absolue effectivement calculable.

Démonstration. - C'est une conséquence facile du corollaire 1 de [L 6] où l'on évalue le nombre d'entiers parmi $n+1$, $n+2$, ... , $n+k$ qui vérifient $P(n+i) \leq k$.

(5.C) Une minoration de $u(\binom{n+k}{k}) = \prod_{p\mid\binom{n+k}{k}} p$.

LEMME 6. - $\sum_{1\leq i\leq k} \log u(n+i) < k \sum_{p\leq k}(\frac{\log p}{p}) + \log u(\binom{n+k}{k})$.

Démonstration. - Elle est analogue à celle du lemme 4. On écrit

$$\sum_{1\leq i\leq k} \log u(n+i) = \sum_{1<i<k} \sum_{p\mid n+i} \log p = \sum_p (\log p)([\frac{n+k}{p}] - [\frac{n}{p}]) ;$$

on majore de même $[\frac{n+k}{p}] - [\frac{n}{p}]$ par $[\frac{k}{p}] + \inf(1\ ,\ \sum_{i\geq 1}[\frac{n+k}{p^i}] - [\frac{n}{p^i}] - [\frac{k}{p^i}])$ et on conclut grâce au corollaire du lemme 2.

On majore $\sum_{p\leq k}\frac{\log p}{p}$ par $\log k$ d'après [R. S]. On abrège $u(\binom{n+k}{k})$ en $u(n\ ,\ k)$. Si $k = 2k'$, on écrit

$$\sum_{1\leq i\leq 2k'} \log u(n+i) = \sum_{1\leq i\leq k'} \log u((n+2i-1)(n+2i)) ,$$

si $k = 2k'+1$, on écrit

$$2\sum_{1\leq i\leq k} \log u(n+i) = \log u((n+1)(n+2)) + \log u((n+2)(n+3)) + \log u((n+3)(n+1)) + 2\sum_{2\leq i\leq k'} \log u((n+2i)(n+2i+1)).$$

Sous cette forme, le lemme 6 montre l'existence de deux entiers i , i' avec $1 \leq i < i' \leq k$, $i' - i \leq 2$ et

$$\log u((n+i)(n+i')) \leq 2\log k + (\frac{2}{k})\log u(n\ ,\ k) .$$

Posons $x = n+i$, $a = i' - i$. Comme dans [L 7], on écrit

$$4x(x+a) = (2x+a)^2 - a^2$$

sous la forme vy^3 avec $v \leq 4(u(n+i)\ u(n+i'))$, d'où l'on déduit

$$v^2\ a^2 = (v(2x+a))^2 - (vy)^3$$

ce qui permet d'appliquer les résultats de STARK (cf. [L 7]) sur la courbe $X^3 - Y^2 = Cte$. On obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 10. - Pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\log u(\binom{n+k}{k}) \geq (1 - o(1))\frac{k}{e}\log_2 n .$$

Si l'on suppose acquise la conjecture de Hall sur la courbe $X^3 - Y^2 = \text{Cte}$, on obtient de la même manière :

$$\log u(\binom{n+k}{k}) \geq (1 - o(1)) \frac{k}{20} \log n .$$

6. Autres minorations de la partie sans facteur carré de $\binom{n+k}{k}$.

(6.A) Minorations élémentaires.

THEOREME 11. - Pour $n \geq k$ et k grand, on a

$$\log u(n , k) \geq (1 - o(1))\, k \log k \,(1 - \frac{\log k}{\log(n+k)}) .$$

Démonstration. - Soit j un entier ≥ 1. On écrit

$$\binom{n+k}{k} \mid (u(n , k))^j \prod_{i>j} (\prod_{p<(n+k)^{1/i}} p) .$$

Pour $i = 1 , 2 , \ldots , k$, on peut minorer $(n + i)/i$ par $(n + k)/k$ et, par suite, $\binom{n+k}{k}$ par $(\frac{n+k}{k})^k$.

D'autre part,

$$\log \prod_{i>j} (\prod_{p<(n+k)^{1/i}} p) = \sum_{i>j} \theta((n+k)^{1/i})$$

$$= \sum_{0 \leq j' \leq j} \sum_{i \geq 1} \theta((n+k)^{1/i(j+1)+j'})$$

$$\leq (j+1) \sum_{i \geq 1} \theta(((n+k)^{1/j+1})^{1/i}) \leq (j+1)\, \psi((n+k)^{1/j+1}) .$$

On déduit donc de la relation de divisibilité précédente :

$$k \log \frac{n+k}{k} \leq j \log u(n , k) + (j+1)\, \psi((n+k)^{1/j+1}) .$$

Soit ε un réel > 0. On choisit pour j l'entier $[(1 + \varepsilon) \frac{\log(n+k)}{\log k}]$ de sorte que $(j+1)\, \psi((n+k)^{1/j+1})$ devienne négligeable devant $k \log(n+k)/k$ et on obtient aussitôt le résultat.

Remarque 1. - On peut avoir intérêt à formuler le théorème 11 avec la partie entière introduite dans la démonstration. Par exemple, on voit ainsi que, pour $n \geq k^{3/2}$ et k assez grand

$$\log u(n , k) \geq \frac{(1 - \varepsilon)}{2} k \log k .$$

Remarque 2. - Pour $k \geq 13$ et $n > 3^k$, on a $u(n , k) > k^k$ d'après le théorème 1 (écrire $u(n , k) \geq p_1 p_2 \cdots p_k$), ce qui améliore dans ce cas le résultat du théorème 11.

Remarque 3. - On a toujours $u(n , k) \geq \prod_{p \leq k} p$ (cf. th. 5).

(6.B) Application de la méthode de STØRMER.

Dans [L 8], on montre comment les résultats de STORMER, complétés par LEHMER, permettent de prouver que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\liminf_{n \to \infty} P(n , k)/k \log_2 n \geq 1 .$$

Dans le § 2 de [L 1], l'idée de la méthode est exposée en détail. On va utiliser cette technique pour raffiner le théorème 10 et prouver qu'on a en fait un nouveau théorème.

THÉORÈME 12. - Pour tout entier $k \geq 2$

$$\liminf_{n\to\infty} \log u(\binom{n+k}{k})/k \log_2 n \geq \frac{1}{3} .$$

Démonstration. - Des résultats de LEHMER on déduit qu'on a toujours, pour tout entier $m > 16$ et $i = 1$ ou 2 :

$$\log m < P(m(m+i))(2 + 3 \log 2 + \log u(m(m+i))\, u^{1/2}(m(m+i)) .$$

En majorant $P(m(m+i))$ par $\frac{1}{2} u(m(m+i)) < u(m(m+i))$, on en déduit, pour m grand,

$$\log_2 m < \frac{3}{2}(1 + o(1)) \log u(m(m+i)) .$$

On utilise alors le lemme 6 comme dans la démonstration du théorème 10 en montrant que parmi $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$ existent deux entiers m, $m+i$ avec $i = 1$ ou 2 vérifiant

$$\log u(m(m+i)) \leq 2 \log k + \frac{2}{k} \log u(n, k) ,$$

d'où l'on déduit aisément le théorème 12.

7. Bibliographie.

[E 1] ERDÖS (P.). - A theorem of Sylvester and Schur, J. London math. Soc., t. 9, 1934, p. 282-288.

[E 2] ERDÖS (P.). - Über die Anzahl der Primfaktorem von $\binom{n}{k}$, Arch. der Math., t. 24, 1973, p. 53-56.

[E 3] ERDÖS (P.). - Some unconventional problems in number theory, Acta Math. Acad. Sc. Hung., t. 33, 1979, p. 71-80.

[H] HANSON (D.). - On the product of the primes, Canad. math. Bull., t. 15, 1972, p. 33-37.

[L 1] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 16e année, 1974/75, n° G. 22, 29 p.

[L 2] LANGEVIN (M.). - Méthodes élémentaires en vue du théorème de Sylvester, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année, 1975/76, n° G. 2, 9 p.

[L 3] LANGEVIN (M.). - Quelques applications de nouveaux résultats de Van der Poorten, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année, n° G. 12, 11 p.

[L 4] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers en progression arithmétique, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 18e année, 1976/77, n° 3, 7 p.

[L 5] LANGEVIN (M.). - Facteurs premiers d'entiers en progression arithmétique, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année, 1977/78, n° 4, 7 p.

[L 6] LANGEVIN (M.). - Facteurs premiers d'entiers en progression arithmétique, Acta Arithm., Warszawa (à paraître).

[L 7] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers consécutifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1567-1570.

[L 8] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers voisins, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 491-493.

[M] MIGNOTTE (M.). - Sur les coefficients du binôme, Arch. der Math., t. 24, 1973, p. 162-163.

[R S] ROSSER (J. B.), SCHOENFELD (L.). - Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 64-94 ; et : Sharper bounds for the Čebyšev functions θ and ψ, Math. of Comp. 29, n° 129, 1975, p. 243-269.

[S] SELMER (E. S.). - On the number of prime divisors of a binomial coefficient, Math. Scand., t. 39, 1976, p. 271-281.

8. Autres énoncés récents.

Ne sont évoqués dans ce qui suit que les résultats sur les facteurs premiers des coefficients binomiaux en relation directe avec ceux qui précèdent.

ECKLUND (On prime divisors of the binomial coefficient, Pacific J. Math., t. 29, 1969, p. 267-270) a prouvé que, hormis le coefficient binomial $\binom{7}{3}$, $\binom{n+k}{k}$ (avec $2 \leqslant k \leqslant n$) admet toujours un facteur premier $\leqslant \frac{n+k}{2}$. Autrement dit, hormis la suite 5, 6, 7, on ne peut trouver k entiers consécutifs $n+1, n+2, \ldots, n+k$ tels que le produit de ceux d'entre eux qui ne sont pas premiers soit égal à $k!$.

ECKLUND, ERDÖS, SELFRIDGE (A new function associated with the prime factors, Math. of Comp., t. 28, 1974, p. 647-649) ont étudié la fonction

$$k \longmapsto g(k) = \inf\{m \ , \ p \mid \tbinom{m}{k} \Rightarrow p > k\} \ ,$$

donné un encadrement, et calculé d'assez nombreuses valeurs numériques.

ERDÖS, GRAHAM, RUZSA, STRAUS (On the prime factors of $\binom{2n}{n}$, Math. of Comp., t. 29, 1975, p. 83-92) ont étudié les facteurs premiers de $\binom{2n}{n}$, et notamment pour quelles valeurs de n, le coefficient $\binom{2n}{n}$ n'est pas divisible par p ou q (p, q nombres premiers donnés).

Ecrivons $\binom{n+k}{k} = uv = UV$, où u (resp. U) est le plus grand diviseur de $\binom{n+k}{k}$ vérifiant $P(u) < k$ (resp. $P(u) \leqslant k$).

ERDÖS, SELFRIDGE, ECKLUND, EGGLETON (On the prime factorization of binomial coefficients, J. Aust. math. Soc., t. 26, 1978, p. 257-269) ont montré qu'à douze exceptions près, on a toujours $u < v$ et que $V \geqslant U$ n'est possible que dans un nombre fini de cas. D'autres évaluations de u et v se trouvent dans un autre article d'ERDÖS et GRAHAM (On the prime factors of $\binom{n}{k}$, Fibonacci Quart., t. 14, 1976, p. 348-352).

EGGLETON et SELFRIDGE (Consecutive integers with no large prime factors, J. Aust. math. Soc., t. 22, 1976, p. 1-11) ont obtenu des minorants pour la fonction $g(k, m) = \inf\{n \ , \ \forall n' \geqslant n \ , \ P(n', m) > k\}$, lorsque $m \leqslant 5$. Par exemple, pour $k \geqslant 41$, il existe $n \geqslant k^3$ avec $P(n, 3) \leqslant k$.

On trouvera enfin de nombreux problèmes ouverts dans ce domaine : dans ERDÖS et SELFRIDGE (Some problems on the prime factors of consecutive integers, Illinois J. Math., t. 11, 1967, p. 428-430 ; et Some problems on the prime factors of consecutive integers, II , Proceedings of the Washington State University conference on number theory, 1971, p. 13-21. - Pullman, Pi Mu Epsilon and Department of Mathematics, 1971) ou ERDÖS (Some problems in number theory "Computers in number theory", p. 405-414. - London, Academic Press, 1971 ; Problems and results on number theoretic properties of consecutive integers and related questions, "Proceedings of the 5th Manitoba conference on numerical mathematics [1975. Winnipeg]", p. 405-414. - Winnipeg, Utilitas Math. Publ., 1976) ; Problems and results on consecutive integers, Publ. Math., Debrecen, t. 23, 1976, p. 271-282 ; et Some unconventional problems in number theory, Acta Math. Acad. Sc. Hung., t. 33, 1979, p. 71-80).

J'adresse à MM. Hubert DELANGE et Jean-Marc DESHOUILLERS, pour leurs intéressantes remarques lors de la relecture du manuscrit, mes plus sincères remerciements.