Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Kálmán Győry

Corps de nombres algébriques d'anneau d'entiers monogène

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1978-1979), exp. n° 26, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 26, 7 p.

7 mai 1979

CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES D'ANNEAU D'ENTIERS MONOGÈNE

par Kálmán GYÖRY (*)
[Univ. Debrecen]

1. Monogénéité des corps de nombres algébriques.

Soient $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{K}$ des corps de nombres algébriques, $\underset{\sim}{K}$ une extension de degré k de $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{Z}_L$ et $\underset{\sim}{Z}_K$ les anneaux d'entiers respectifs de $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{K}$. On dit que $\underset{\sim}{Z}_K$ est $\underset{\sim}{Z}_L$-monogène si $\underset{\sim}{Z}_K = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha]$ pour $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$. L'existence d'un tel élément α facilite considérablement l'étude de l'arithmétique de $\underset{\sim}{Z}_K$ et les calculs dans $\underset{\sim}{Z}_K$.

Considérons d'abord le cas où $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{Q}$. Si $\underset{\sim}{Z}_K$ est $\underset{\sim}{Z}$-monogène, nous dirons que $\underset{\sim}{K}$ est monogène. Il est bien connu que par exemple les corps quadratiques et les corps cyclotomiques $\underset{\sim}{K}$ sont monogènes et on peut facilement donner un générateur de $\underset{\sim}{Z}_K$. Nous pouvons donc supposer que $k \geq 3$. Si D_K désigne le discriminant de $\underset{\sim}{K}$ et $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$, alors le discriminant $D(\alpha)$ de α peut s'écrire sous la forme $D(\alpha) = 1^2(\alpha)\, D_K$. Ici $1(\alpha)$ est un entier rationnel qu'on appelle l'indice de α. Pour qu'on ait $\underset{\sim}{Z}_K = \underset{\sim}{Z}[\alpha]$ (i. e. que $1, \alpha, \ldots, \alpha^{k-1}$ constitue une base d'entiers dans $\underset{\sim}{K}$), il faut et il suffit que $1(\alpha) = \pm 1$.

Les entiers algébriques $\alpha, \alpha' \in \underset{\sim}{Z}_K$ sont dits équivalents si $\alpha' - \alpha \in \underset{\sim}{Z}$. Dans ce cas, $D(\alpha') = D(\alpha)$ et par suite $1(\alpha') = \pm 1(\alpha)$. Soit $1, w_2, \ldots, w_k$ une base d'entiers de $\underset{\sim}{K}$. Si α est un entier algébrique quelconque engendrant $\underset{\sim}{K}$, on a

$$\alpha = x_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k$$

où les x_i sont des entiers rationnels variables. Alors on peut aisément vérifier que

$$D(\alpha) = D(x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k) = F^2(x_2, \ldots, x_k)\, D_K,$$

où $F \in \underset{\sim}{Z}[x_2, \ldots, x_k]$ est une forme de degré $k(k-1)/2$ en $k-1$ variables. On appelle F l' "index form" de la base $1, w_2, \ldots, w_k$. La détermination des $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$ tels que $\underset{\sim}{Z}_K = \underset{\sim}{Z}[\alpha]$ est équivalente à la résolution de l'équation diophantienne

$$F(x_2, \ldots, x_k) = \pm 1 \tag{1}$$

en entiers rationnels $x_2, \ldots, x_k$.

(*) Texte reçu en mai 1979.
Kálmán GYÖRY, Institut de Mathématiques, Université Kossuth Lajos, 4010 DEBRECEN (Hongrie).

Si un nombre premier p divise tous les indices $1(\alpha)$, $\alpha \in Z_K$, p est appelé un diviseur commun des indices (d. c. i.) dans K. HENSEL ([24], [25]) a donné un critère pour qu'un nombre premier p soit un d. c. i. dans K. Il en résulte que tout d. c. i. est $< k$. Ce résultat de Hensel a été généralisé par HASSE [23] et PLEASANTS [34]. Ces théorèmes fournissent une condition nécessaire pour que Z_K soit engendré par un seul générateur ; notamment pour que K soit monogène, il faut qu'il n'existe aucun d. c. i. dans K. M. HALL ([22] pour $k = 3$) et PLEASANTS ([34] pour tout $k \geq 3$ pour lequel $k + 1$ est premier) ont démontré que cette condition n'est pas suffisante en général.

La monogénéité des corps cubiques et biquadratiques a été étudiée par plusieurs auteurs, parmi eux : NAGELL ([27], [28], [29], [30]), CARLITZ ([4], [5]), DELAUNAY [7], DELONE [DELAUNAY] et FADDEEV [8], DADE et TAUSSKY [6], PAYAN ([32], [33]), Mme GRAS ([10], [11], [12]), ARCHINARD [1], KNIGHT (voir [35]) et DUMMIT et KISILEVSKY [9]. Leurs travaux contiennent certaines conditions nécessaires d'existence d'un élément α tel que $Z_K = Z[\alpha]$ et, dans certains cas particuliers, donnent des conditions suffisantes de monogénéité. Les travaux de DELONE et FADDEEV, Mme GRAS et ARCHINARD contiennent des tables numériques mettant en évidence de nombreux corps cubiques monogènes. De plus, dans certains corps particuliers K, DELONE [7] et NAGELL [29] ont déterminé tous les entiers algébriques α vérifiant $Z_K = Z[\alpha]$.

Dans son travail [33] mentionné ci-dessus, PAYAN a obtenu un critère pour que certains corps cycliques de degré premier impair sur Q soient monogènes.

Dans le cas $k = 3$, le théorème de Thue montre que l'équation (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions en x_2, x_3 ([1]). Par conséquent, dans un corps cubique K, il y a au plus un nombre fini de $\alpha \in Z_K$, à équivalence près, qui engendrent Z_K. Quand $k \geq 3$, c'est-à-dire quand K est un corps de nombres quelconque de degré $k \geq 3$, cette dernière assertion sur la finitude des α peut être déduite d'un théorème de BIRCH et MERRIMAN [3]. Indépendamment de BIRCH et MERRIMAN, j'ai démontré ce résultat sur la finitude des α sous une forme effective [13]. Certaines généralisations ont été établies dans mes travaux ([14], [15], [16], [17] et [18]) et dans deux articles de TRELINA ([36], [37]).

Nous allons démontrer ici quelques généralisations de ces résultats. Soit L un corps de nombres algébriques de degré ℓ, et soit K une extension de degré $k \geq 3$ de L avec discriminant $D_K = D_{K/Q}$. Désignons par $D_{K/L}$ le discriminant de K/L. Les entiers algébriques α et $\alpha^* \in Z_K$ sont dits Z_L-équivalents si $\alpha - \alpha^* \in Z_L$. Dans ce cas, pour leurs discriminants, on a $D_{K/L}(\alpha) = D_{K/L}(\alpha^*)$. Il est connu (voir par exemple HASSE [23]) que

$$(D_{K/L}(\alpha)) = \mathfrak{I}^2(\alpha)\, D_{K/L} \tag{2}$$

([1]) D'après un théorème de BAKER [2], ces solutions peuvent être déterminées.

avec un idéal entier $\mathfrak{J}(\alpha)$ dans $\underset{\sim}{L}$. On appelle $\mathfrak{J}(\alpha)$ l'indice de α relatif à $\underset{\sim}{K}/\underset{\sim}{L}$.

THÉORÈME 1 (GYÖRY [17]). - *Soient $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{K}$ comme ci-dessus et soit $\mathfrak{J} \neq 0$ un idéal entier dans $\underset{\sim}{L}$ avec norm $\leq M$. S'il existe $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$ tel que $\mathfrak{J}(\alpha) = \mathfrak{J}$, alors α est $\underset{\sim}{Z}_L$-équivalent à un entier algébrique de la forme $\varepsilon\alpha^*$, où ε est une unité dans $\underset{\sim}{L}$ et* (2)

$$(3)\quad |\overline{\alpha^*}| < \exp\{(5\ell k^3)^{30\ell k^3}(|D_K|(\log|D_K|)^{\ell k})^{3(k-1)(k-2)}(|D_K|^{3(k-1)(k-2)/2+\log M)}\}.$$

Si $k = 2$, nous avons la majoration suivante

$$(3')\quad |\overline{\alpha^*}| < 2\{M^2|D_K|\}^{1/2\ell}\exp\{5^{\ell}(\log|D_L|)^{\ell-1}|D_L|^{1/2}\}$$

où D_L désigne le discriminant de $\underset{\sim}{L}$.

Pour démontrer ce théorème, nous avons utilisé un récent théorème de VAN DER POORTEN et LOXTON [38].

Une conséquence immédiate du théorème 1 est la suivante.

THÉORÈME 2 (GYÖRY [17]). - *Soient $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{K}$ comme ci-dessus. Supposons $\underset{\sim}{Z}_K = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha]$ où $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$. Alors α est $\underset{\sim}{Z}_L$-équivalent à un entier algébrique de la forme $\varepsilon\alpha^*$, où ε est une unité dans $\underset{\sim}{L}$ et*

$$(4)\quad |\overline{\alpha^*}| < \exp\{(5\ell k^3)^{30\ell k^3}(|D_K|^{3/2}(\log|D_K|)^{\ell k})^{3(k-1)(k-2)}\}.$$

Il est évident que si $\alpha - \varepsilon\alpha^* \in \underset{\sim}{Z}_L$, alors $\underset{\sim}{Z}_K = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha^*]$. Le théorème 2 donne un algorithme général pour reconnaître si $\underset{\sim}{Z}_K$ est $\underset{\sim}{Z}_L$-monogène ou non et pour déterminer tout $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$ vérifiant $\underset{\sim}{Z}_K = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha]$.

2. Nombre de générateurs de l'anneau d'entiers d'un corps de nombres algébriques.

En résolvant un problème posé par BROWKIN, PLEASANTS a obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 3 (PLEASANTS [34]). - *Soient $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{K}$ comme précédemment. Il existe une formule explicite permettant de calculer un entier $m(\underset{\sim}{K}, \underset{\sim}{L})$ tel que, si $\mu(\underset{\sim}{K}, \underset{\sim}{L})$ désigne le nombre minimal de générateurs de la $\underset{\sim}{Z}_L$-algèbre $\underset{\sim}{Z}_K$, on ait :*

$$m(\underset{\sim}{K}, \underset{\sim}{L}) \leq \mu(\underset{\sim}{K}, \underset{\sim}{L}) \leq \sup(2, m(\underset{\sim}{K}, \underset{\sim}{L})).$$

PLEASANTS a prouvé que si $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{Q}$, alors $m < [(\log k/\log 2) + 1]$. De plus, il a démontré qu'il existe des corps de nombres algébriques $\underset{\sim}{K}$ de degré arbitrairement grand sur $\underset{\sim}{Q}$ tels que $m = 1$ et $\underset{\sim}{Z}_K$ non monogène, i. e. que le théorème 3 ne permet pas de décider si un corps de nombres est monogène. Les théorèmes 3 et 2 ensemble nous permettent de déterminer le nombre minimal de générateurs de $\underset{\sim}{Z}_K$

(2) $|\overline{\alpha}|$ désigne le maximum des valeurs absolues des conjugués d'un nombre algébrique α.

sur $\underset{\sim}{Z}_L$.

3. Ordres monogènes.

Maintenant, nous généralisons le théorème 2 aux ordres d'un corps de nombres. Soit $\mathcal{O}$ un ordre de $\underset{\sim}{Z}_L$ dans $\underset{\sim}{K}$, c'est-à-dire un sous-anneau de $\underset{\sim}{Z}_K$ contenant $\underset{\sim}{Z}_L$, qui est un $\underset{\sim}{Z}_L$-module complet (autrement dit, il contient $k = [\underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{L}]$ éléments linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{L}$). $\mathcal{O}$ est dit monogène s'il existe $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O} = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha]$.

Dans le cas particulier $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{Q}$, j'ai établi un algorithme pour reconnaître si $\mathcal{O}$ est monogène ou non, et pour déterminer tous les α vérifiant $\mathcal{O} = \underset{\sim}{Z}[\alpha]$ ([15], [17]). Indépendamment l'un de l'autre, TRELINA [37] et GYÖRY et PAPP [21] ont généralisé ce théorème au cas p-adique. Récemment, j'ai amélioré et généralisé ces résultats ([19], [20]). Dans [37], [21], [19] et [20], les résultats sont énoncés en termes d'un "index form" d'une base de $\mathcal{O}$ et donnent des bornes effectives pour les solutions de (1). De plus, dans [21], [19] et [20] nos résultats sont démontrés dans le cas plus général où $\underset{\sim}{L}$ est un corps de nombres quelconque et l'ordre $\mathcal{O} \subseteq \underset{\sim}{Z}_K$ a une base d'entiers sur $\underset{\sim}{L}$. Nous démontrons maintenant ce résultat en toute généralité, sans aucune restriction concernant $\underset{\sim}{L}$ ou $\mathcal{O}$.

THÉORÈME 4. - Soient $\underset{\sim}{L}$ et $\underset{\sim}{K}$ comme plus haut, et soit $\mathcal{O}$ un ordre de $\underset{\sim}{Z}_L$ dans $\underset{\sim}{Z}_K$ avec conducteur $f_{\mathcal{O}}$. Si $\mathcal{O} = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha]$ pour un $\alpha \in \mathcal{O}$, alors α est $\underset{\sim}{Z}_L$-équivalent à un nombre de la forme $\varepsilon\alpha^*$, où ε est une unité dans $\underset{\sim}{L}$, $\alpha^* \in \mathcal{O}$ et

$$|\overline{\alpha^*}| < \exp\{(5k^3)^{30k^3} (|D_K|(\log|D_K|)^k)^{3(k-1)(k-2)} \tag{5}$$
$$(|D_K|^{3(k-1)(k-2)/2} + \log|N_{K/Q}(f_{\mathcal{O}})|)\} .$$

En utilisant le théorème 5 au lieu du théorème 1, on pourrait sans difficulté généraliser le théorème 4 au cas p-adique.

Démonstration du théorème 4. - Soient $\mathfrak{D}_{K/L}$ et $\mathfrak{D}_{K/L}(\mathcal{O})$ respectivement les différentes de K/L et $\mathcal{O}$. $\mathfrak{D}_{K/L}(\mathcal{O})$ est l'idéal engendré par les différentes $\mathfrak{D}_{K/L}(\alpha)$ des éléments α de $\mathcal{O}$. Alors, par définition du conducteur (voir par exemple [31] et [34]),

$$\mathfrak{D}_{K/L}(\mathcal{O}) = f_{\mathcal{O}}\, \mathfrak{D}_{K/L}$$

d'où, pour les discriminants, on obtient

$$D_{K/L}(\mathcal{O}) = N_{K/L}(f_{\mathcal{O}})\, D_{K/L} . \tag{6}$$

Comme $\mathcal{O} = \underset{\sim}{Z}_L[\alpha]$, $\alpha \in \mathcal{O}$, on a $\mathfrak{D}_{K/L}(\mathcal{O}) = (\mathfrak{D}_{K/L}(\alpha))$ et $D_{K/L}(\mathcal{O}) = (D_{K/L}(\alpha))$. Donc, il résulte de (6) que

$$(D_{K/L}(\alpha)) = N_{K/L}(f_{\mathcal{O}})\, D_{K/L} .$$

Par suite,

$$N_{K/L}(f_\Theta) = \mathfrak{J}^2(\alpha) \quad \text{et} \quad |N_{L/Q}(\mathfrak{J}(\alpha))| = |N_{K/Q}(f_\Theta)|^{1/2} .$$

Maintenant (5) résulte du théorème 1.

4. Sur les diviseurs premiers des indices des entiers algébriques.

Nous présentons enfin une généralisation p-adique du théorème 1. Désignons par $Q_1 , \dots , Q_t$ $(t \geq 0)$ les idéaux premiers distincts qui divisent $D_{K/L}$, et par Q $(Q = 2$ si $t = 0)$ le maximum des nombres premiers divisibles par $Q_1 , \dots , Q_t$ respectivement. Soient $\mathfrak{P}_1 , \dots , \mathfrak{P}_s$ s (≥ 0) idéaux premiers distincts dans $\underset{\sim}{L}$, divisant des nombres premiers $\leq P$. Notons S le monoïde multiplicatif des entiers algébriques de $\underset{\sim}{L}$ qui ne sont divisibles par aucun idéal premier différent de $\mathfrak{P}_1 , \dots , \mathfrak{P}_s , Q_1 , \dots , Q_t$. En généralisant certains résultats antérieurs concernant les nombres algébriques d'indice donné (voir GYÖRY [15], [17], [18] et TRELINA [37]), nous démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soient $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{K}$ et S comme ci-dessus, et soit $\mathfrak{J}$ un idéal entier dans $\underset{\sim}{L}$ qui n'est divisible par aucun idéal premier différent de $\mathfrak{P}_1 , \dots , \mathfrak{P}_s$. Supposons qu'il existe $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_K$ tel que $\mathfrak{J}(\alpha) = \mathfrak{J}$. Alors, α est $\underset{\sim}{Z}_L$-équivalent à un nombre de la forme $\eta\alpha^*$, où $\eta \in S$, $\alpha^* \in \underset{\sim}{Z}_K$ et

$$(7) \quad |\overline{\alpha^*}| < \exp\{c_1 |D_L|^{1/2(P+Q)^{\ell n}[c_2(s+t+1)^{30}(\log(P+Q))^2(|D_K|^{3/2k}(\log|D_K|)^{\ell})^n]^{sn+4}}\}$$

avec $n = k(k-1)(k-2)$, $c_1 , c_2 > 0$ étant des constantes effectivement calculables ne dépendant que de ℓ et k .

Quand $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{Q}$, d'après un théorème de HENSEL [26], on a

$$|D_K| \leq Q^{t(k-1)} \, e^{tk^2}$$

ce qui donne dans (7) une borne supérieure pour $|\overline{\alpha^*}|$ dépendant seulement de k , s , t , P et Q .

Démonstration du théorème 5. - En vertu de (2), nous avons $D_{K/L}(\alpha) \in S$. Ainsi, on peut appliquer la majoration (4') du théorème 2 de notre travail [18], et on obtient que α est $\underset{\sim}{Z}_L$-équivalent à un nombre de la forme $\eta\alpha^*$, où $\eta \in S$ et α^* est un entier algébrique dans $\underset{\sim}{K}$ vérifiant

$$|\overline{\alpha^*}| < \exp\{c_3 |D_L|^{1/2(P+Q)^{\ell n}[c_4(s+t+1)^{30}(\log(P+Q))^2(|D_K|^{3/2k}(\log|D_K|)^{\ell})^n]^{sn+4}}\}$$

avec des constantes $c_3 , c_4 > 0$ effectivement calculables qui ne dépendent que de ℓ et k . Cela prouve (7).

Je saisis l'occasion pour remercier Michel WALDSCHMIDT et l'Université Pierre et Marie Curie pour leur hospitalité durant mon séjour en France.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARCHINARD (G.). - Extensions cubiques cycliques de $\mathbb{Q}$ dont l'anneau des entiers est monogène, Enseign. Math., Genève, t. 20, 1974, p. 179-203.

[2] BAKER (A.). - Contributions to the theory of Diophantine equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, t. 263, 1968, p. 173-208.

[3] BIRCH (B. J.) and MERRIMAN (J. R.). - Finiteness theorems for binary forms with given discriminant, Proc. London math. Soc., t. 25, 1972, p. 385-394.

[4] CARLITZ (L.). - On abelian fields, Trans. Amer. math. Soc., t. 35, 1933, p. 122-136.

[5] CARLITZ (L.). - A note on common index divisors, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 688-692.

[6] DADE (E. C.) and TAUSSKY (O.). - On the different in orders in an algebraic number field and special units connected with it, Acta Arithm., Warszawa, t. 9, 1964, p. 47-51.

[7] DELAUNAY [DELONE] (B. N.). - Über die Darstellung der Zahlen durch die binären kubischen Formen von negativer Diskriminante, Math. Z., t. 31, 1930, p. 1-26.

[8] DELONE (B. N.) and FADDEEV (D. K.). - The theory of irrationalities of the third degree. - Providence, American mathematical Society, 1964 (American mathematical Society. Translations of mathematical Monographs, 10).

[9] DUMMIT (D. S.) and KISILEVSKY (H.). - Indices in cyclic cubic fields, "Number theory and algebra", p. 29-42. - New York, Academic Press, 1977.

[10] GRAS (M.-N.). - Sur les corps cubiques cycliques dont l'anneau des entiers est monogène, Annales scient. Univ. Besançon, 3e série, 1973, fasc. 6, 26 pages.

[11] GRAS (M.-N.). - Nombre de classes, unités et bases d'entiers des extensions cubiques cycliques de $\mathbb{Q}$, Journées arithmétiques [1973, Grenoble], Bull. Soc. math. France, Mémoire 37, 1974, p. 101-106.

[12] GRAS (M.-N.). - Lien entre le groupe des unités et la monogénéité des corps cubiques cycliques, Publ. math. Univ. Besançon, 1975/76, fasc. 1, 19 pages.

[13] GYÖRY (K.). - Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 419-426.

[14] GYÖRY (K.). - Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, II, Publ. Math., Debrecen, t. 21, 1974, p. 125-144.

[15] GYÖRY (K.). - Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné, III, Publ. Math., Debrecen, t. 23, 1976, p. 141-165.

[16] GYÖRY (K.). - Polynomials with given discriminant, "Topics in number theory" [1974. Debrecen], p. 65-78. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1976 (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 13).

[17] GYÖRY (K.). - On polynomials with integer coefficients and given discriminant, IV, Publ. Math., Debrecen, t. 25, 1978, p. 155-167.

[18] GYÖRY (K.). - On polynomials with integer coefficients and given discriminant, V : p-adic generalizations, Acta Math. Acad. Sc. Hungar., t. 32, 1978, p. 175-190.

[19] GYÖRY (K.). - On the greatest prime factors of decomposable forms at integer points (à paraître).

[20] GYÖRY (K.). - Explicit upper bounds for the solutions of some diophantine equations (à paraître).

[21] GYÖRY (K.) and PAPP (Z. Z.). - On discriminant form and index form equations (à paraître).

[22] HALL (M.). - Indices in cubic fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 43, 1937, p. 104-108.

[23] HASSE (H.). - Zahlentheorie. - Berlin, Akademie-Verlag, 1949.

[24] HENSEL (K.). - Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler einer Gattung, J. reine angew. Math., t. 113, 1894, p. 128-160.

[25] HENSEL (K.). - Über die Fundamentalgleichung und die ausserwesentlichen Discriminantentheiler eines algebraischen Körpers, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 1897, p. 254-260.

[26] HENSEL (K.). - Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Math. Annalen, t. 55, 1902, p. 305-336.

[27] NAGELL (T.). - Zur Theorie der kubischen Irrationalitäten, Acta Math., Uppsala, t. 55, 1929, p. 33-65.

[28] NAGELL (T.). - Quelques résultats sur les diviseurs fixés de l'index des nombres entiers d'un corps algébrique, Arkiv för Mat., t. 6, 1966, p. 269-289.

[29] NAGELL (T.). - Sur les discriminants des nombres algébriques, Arkiv för Mat., t. 7, 1967, p. 265-282.

[30] NAGELL (T.). - Quelques propriétés des nombres algébriques du quatrième degré, Arkiv för Mat., t. 7, 1969, p. 517-525.

[31] NARKIEWICZ (W.). - Elementary and analytic theory of algebraic numbers. - Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1974.

[32] PAYAN (J.-J.). - Ordres monogènes des corps cycliques de degré premier, Séminaire de Théorie des nombres, Grenoble, 1971/72.

[33] PAYAN (J.-J.). - Sur les classes ambiges et les ordres monogènes d'une extension cyclique de degré premier impair sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire, Arkiv för Mat., t. 11, 1973, p. 239-244.

[34] PLEASANTS (P. A. B.). - The number of generators of the integers of a number field, Mathematika, London, t. 21, 1974, p. 160-167.

[35] SCHMIDT (W. M.). - Applications of Thue's method in various branches of number theory, "Proceedings of the international Congress of mathematicians [1974. Vancouver]", vol. 1, p. 177-185. - Montreal, Canadian mathematical Congress, 1975.

[36] TRELINA (L. A.). - On algebraic integers with discriminants containing fixed prime divisors [en russe], Mat. Zametki, t. 21, 1977, p. 289-296.

[37] TRELINA (L. A.). - On the greatest prime factor of an index form [en russe], Dokl. Akad. Nauk BSSR, t. 21, 1977, p. 975-976.

[38] VAN DER POORTEN (A. J.) and LOXTON (J. H.). - Multiplicative relations in number fields, Bull. Austral. math. Soc., t. 16, 1977, p. 83-98 ; Corregindum and addendum, t. 17, 1977, p. 151-156.