Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL LAURENT

Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 13, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 13, 4 p.

15 janvier 1979

TRANSCENDANCE DE PÉRIODES D'INTÉGRALES ELLIPTIQUES

par Michel LAURENT (*)
[Univ. P. et M. Curie]

1. Historique du problème.

Le premier résultat relatif à des propriétés de transcendance d'intégrales elliptiques remonte à C. L. SIEGEL (1932) : si Λ est un réseau d'invariants g_2 et g_3 algébriques, alors au moins une des deux périodes fondamentales ω_1 et ω_2, engendrant le réseau Λ, est transcendante.

C'est cependant Th. SCHNEIDER (cf. [3]) qui, en 1936, apportait une contribution essentielle au sujet, démontrant notamment que si M_1 et M_2 sont deux points à coordonnées algébriques de la cubique E d'équation affine $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, et si θ est une forme différentielle sur E, de première ou de deuxième espèce, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, alors l'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} \theta$ est généralement un nombre transcendant (il n'y a algébricité que dans les cas triviaux). Th. SCHNEIDER démontre aussi la transcendance du quotient $\tau = \omega_2/\omega_1$, lorsque le réseau Λ n'admet pas de multiplication complexe, ainsi que des nombres ω_i/π $(i = 1, 2)$.

A partir de 1968, les idées nouvelles introduites par A. BAKER, ont permis d'obtenir des résultats d'indépendance linéaire concernant les périodes de deux intégrales elliptiques de première ou de deuxième espèce. Citons un énoncé, dû à D. MASSER (cf. [2]), qui regroupe les résultats de plusieurs travaux antérieurs : L'espace vectoriel engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}$ par les nombres $\{1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2\pi i\}$ a pour dimension 4 ou 6 suivant que Λ admet ou non une multiplication complexe. Dans cet énoncé, η_i $(i = 1, 2)$ désigne la quasi-période de la fonction zêta de Weierstrass associée au réseau Λ, i. e. $\eta_i = \zeta(z + \omega_i) - \zeta(z)$.

Nous donnons ici les premiers résultats obtenus concernant la transcendance de périodes d'intégrales elliptiques de troisième espèce.

2. Calcul des périodes des intégrales elliptiques.

Soient E la courbe elliptique d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, et Λ le réseau de $\mathbb{C}$ d'invariants algébriques g_2 et g_3 de telle sorte que $E_{\mathbb{C}}$ soit isomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda$.

Soit $R[X, Y]$ une fraction rationnelle, non nulle sur E, à coefficients algébriques. Introduisons la fonction elliptique φ, définie par $\varphi(z)=R[\wp(z),\wp'(z)]$,

---

(*) Texte reçu en novembre 1979.

Michel LAURENT, Mathématiques, UER 47, Université P. et M. Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

où $\wp$ désigne la fonction de Weierstrass associée au réseau Λ. Soit u_j $(1 \leq j \leq J)$ un système de représentants des différentes classes modulo Λ des pôles de φ n'appartenant pas à Λ. Alors on a la décomposition suivante :

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{J} c_j \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(u_j)}{\wp(z) - \wp(u_j)} + \psi(z) ,$$

où c_j désigne le résidu en u_j de la fonction φ, et où ψ est une fonction elliptique ayant tous ses résidus égaux à 0. Pour tout entier j $(1 \leq j \leq J)$, introduisons la fonction

$$f_j(z) = \sigma(z - u_j) \exp(\zeta(u_j)z)/\sigma(z)\, \sigma(u_j)$$

de telle sorte que

$$\frac{d}{dz} \log f_j(z) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(u_j)}{\wp(z) - \wp(u_j)} .$$

Soient γ un lacet de E, et γ^* le lacet correspondant de $\mathbb{C}/\Lambda$. Il est clair que $\omega = \int_\gamma \frac{dx}{y} = \int_{\gamma^*} dz$ appartient à Λ. Notons η la quasi-période associée à ω. La décomposition d'Hermite des fonctions elliptiques montre qu'il existe deux nombres algébriques a et b tels que :

$$\int_{\gamma^*} \psi(z)\, dz = a\omega + b\eta .$$

D'autre part, l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction σ montre qu'il existe un entier k_j $(1 \leq j \leq J)$ tel que :

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(u_j)}{\wp(z) - \wp(u_j)}\, dz = \omega\zeta(u_j) - \eta u_j + 2k_j \pi i ..$$

On a donc démontré le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ. – Soit θ une forme différentielle sur E, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Toute période p de θ est de la forme :

$$p = \sum_{j=1}^{J} c_j \lambda(u_j , \omega) + a\omega + b\eta .$$

Dans cette formule, ω appartient à Λ, η désigne la quasi-période associée, a, b et c_j $(1 \leq j \leq J)$ sont des nombres algébriques, u_j $(1 \leq j \leq J)$ désignent des nombres complexes tels que $\wp(u_j)$ soit algébrique, et l'on a posé $\lambda(u , \omega) = \omega\zeta(u) - \eta u$.

3. Enoncé des résultats.

Nous donnons d'abord deux énoncés de transcendance, et nous en déduisons quelques propriétés concernant la transcendance des périodes de certaines intégrales elliptiques de troisième espèce.

THÉORÈME 1. – Soient ω un élément non nul du réseau Λ et u un nombre complexe tel que $\wp(u)$ soit algébrique et tel que la classe de u modulo Λ n'appartienne pas au sous-groupe de torsion du groupe $\mathbb{C}/\Lambda$. Alors les quatre nombres 1, ω, η, $\lambda(u, \omega)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

THÉORÈME 2. - Supposons de plus que le réseau Λ admette une multiplication complexe, alors les cinq nombres 1, ω, η, $\lambda(u, \omega)$, $2\pi i$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

Les résultats du paragraphe 2, associés à certaines propriétés de $\mathbb{Q}$-linéarité en u de la fonction $\lambda(u, \omega)$ (cf. [1]) permettent alors de déduire de ces deux théorèmes les résultats suivants concernant une période p d'une forme différentielle θ sur E, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

THÉORÈME 3. - Si tous les résidus de la forme différentielle θ sont rationnels, alors le nombre p est nul ou transcendant.

THÉORÈME 4. - Si la forme différentielle θ a au plus deux pôles ayant un résidu non nul, alors le nombre p est nul ou transcendant.

THÉORÈME 5. - Supposons que le réseau Λ admette une multiplication complexe, et notons G le sous-groupe de E engendré par les pôles de θ ayant un résidu non nul. Si le rang sur $\mathbb{Z}$ du groupe G est majoré par 1, alors le nombre p est nul ou transcendant.

4. Schémas des démonstrations.

Pour les détails des démonstrations des théorèmes précédents, nous renvoyons à [1].

Soient ω un élément non nul du réseau Λ, et u un nombre complexe tel que $\wp(u)$ soit algébrique et tel que la classe de u modulo Λ n'appartienne pas au sous-groupe de torsion du groupe $\mathbb{C}/\Lambda$. Nous introduisons les fonctions f et f_* définies par :

$$f(z) = \sigma(z-u)\exp(\zeta(u)z)/\sigma(z)\,\sigma(u)\ ,$$

$$f_*(z) = f(z)\exp(-\lambda(u, \omega)z/\omega)\ .$$

La fonction f_* vérifie les propriétés suivantes :

(a) $f_*(z+\omega) = f_*(z)$.

(b) Si $r = p/q$ est un nombre rationnel non entier, alors $f_*(r\omega)$ est un nombre algébrique qui appartient au corps de nombres

$$\mathbb{Q}\left(\wp\left(\frac{\omega}{2q}\right),\ \wp'\left(\frac{\omega}{2q}\right),\ f_*\left(\frac{\omega}{q}\right),\ \wp(u),\ \wp'(u),\ g_2,\ g_3\right)$$

dont le degré est majoré par $c_1 q^3$. De plus, si h désigne la hauteur logarithmique absolue de Néron-Lang, on a :

$$h(f_*(r\omega)) \leqslant c_2\, q \log q\ .$$

Esquissons très brièvement la démonstration du théorème 1.

On suppose qu'il existe des nombres algébriques α , β , γ non tous nuls tels que $\alpha\omega + \beta\eta + \gamma\lambda(u , \omega)$ soit algébrique. On construit alors une fonction auxiliaire Φ de la forme

$$\Phi(z_1,z_2) = \sum_{\lambda_0} \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} p(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)(\alpha z_1+\beta\zeta(z_1)-\gamma z_2)^{\lambda_0} \wp(z_1)^{\lambda_1}(f(z_1)e^{z_2})^{\lambda_2}$$

qui admet un zéro de grande multiplicité aux points $\underset{\sim}{z} = (s + \frac{1}{2})\Omega$, où Ω désigne le vecteur de $\underset{\sim}{C}^2$ dont les coordonnées sont $(\omega , - \lambda(u , \omega))$, et où s décrit un certain ensemble d'entiers naturels. Les propriétés (a) et (b) ci-dessus permettent alors de faire une extrapolation du type Gel'fond-Baker aux points $\underset{\sim}{z}=(s+\frac{p}{q})\Omega$. La contradiction provient alors du fait que la fonction Φ admet un trop grand nombre de zéros.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LAURENT (M.). - Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques, J. für reine und angew. Math. (à paraître)

[2] MASSER (D.). - Some vector spaces associated with two elliptic functions, "Transcendence theory : Advances and applications", p. 101-119. - London, Academic Press, 1977.

[3] SCHNEIDER (Th.). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).