

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

KHYRA GÉRARDIN

Un résultat sur le quotient de Hadamard des séries rationnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1978-1979), exp. n° 12, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A8_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN RÉSULTAT SUR LE QUOTIENT DE HADAMARD DES SÉRIES RATIONNELLES

par Khyra GÉRARDIN (*)

[Université Paris-VIII]

Rappels. - Soient X un ensemble fini, et X^* le monoïde libre qu'il engendre ; A étant l'anneau des entiers algébriques, $A^{\text{rat}}\langle X \rangle$ désigne l'algèbre des séries rationnelles sur X à coefficients dans A [8].

Rappelons qu'une série formelle $a = \sum_{f \in X^*} (a, f) f$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier $p \geq 1$, une représentation μ de X^* dans $M_p(A)$, une matrice R de $M_p(A)$ telle que, pour tout mot f de X^* , on ait :

$$(a, f) = \text{Tr } R \mu f \quad [8].$$

On peut toujours se ramener au cas où la matrice R est la matrice E_{p1} dont le seul coefficient non nul est le coefficient $(p, 1)$.

Il est facile de voir que l'algèbre $A^{\text{rat}}\langle X \rangle$ est stable pour le produit de Hadamard où, rappelons-le, le produit de Hadamard $a \odot b$ de deux séries a et b est défini de la manière suivante :

$$\text{si } a = \sum_f (a, f) f \text{ et } b = \sum_f (b, f) f, \text{ alors } a \odot b = \sum_f [(a, f) \times (b, f)] f.$$

On s'intéresse ici au problème inverse : Etant données deux séries rationnelles a et b , à coefficients entiers algébriques, à quelles conditions la série $c = \sum_f (c, f) f$, définie de la manière suivante :

$$(c, f) = \begin{cases} = \frac{(a, f)}{(b, f)} & \text{si } (b, f) \neq 0 \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est-elle rationnelle ?

Rappelons quelques résultats obtenus dans le cas où l'alphabet X est réduit à une lettre, le monoïde libre X^* étant le monoïde additif $\mathbb{N}$.

THÉOREME 1 [7]. - Si la série b a deux pôles, et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors la série c est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

(*) Texte reçu le 31 mai 1979.

Khyra GÉRARDIN, 12 rue Beccaria, 75012 PARIS.

THÉOREME 2 [1]. - Si la série b a un pôle de module strictement supérieur aux modules des autres pôles et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors elle est rationnelle.

Ces deux résultats restent valables lorsque l'alphabet X a au moins deux lettres [3]. Par contre, le théorème suivant

THÉOREME 2' [1]. - Si la série b a trois pôles, et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors elle est rationnelle.

n'est plus valable lorsque l'alphabet X a au moins deux lettres. En effet, la démonstration de D. G. CANTOR, à une variable, utilise le résultat de MALHER concernant la répartition des zéros d'une série rationnelle à une variable. Il est connu que les zéros d'une série rationnelle à une variable forment un sous-ensemble rationnel de $\mathbb{N}$ [6]. Ce résultat n'est plus valable lorsque l'alphabet X a au moins deux lettres. Donnons un contre-exemple.

Soit $X = (x, y)$ un alphabet à deux lettres, et soit $a = \sum_f (a, f)f$ la série rationnelle sur X^* , définie par la représentation μ et la matrice R , où

$$\mu x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mu y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout mot f de X^* , nous avons :

$$(a, f) = \text{Tr } R \mu f = (|f|_x - |f|_y),$$

où $|f|_x$ (resp. $|f|_y$) désigne le nombre d'occurrences de la lettre x (resp. y) dans le mot f . Les coefficients de la série a sont nuls pour tous les mots f qui ont autant d'occurrences de la lettre x que de la lettre y .

Or cet ensemble n'est pas un sous-ensemble rationnel du monoïde libre X^* .

Au lieu de considérer l'anneau des entiers algébriques nous pouvons travailler sur un anneau qui est un $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini [10].

Supposons l'alphabet $X = (x, y)$.

CONJECTURE. - Si la série $b = \sum_f (b, f)f$ admet une représentation μ de X^* dans $M_p(\mathbb{N})$, et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors elle est rationnelle.

Le cas où $\mu x = \lambda \mu y$, λ étant un entier, la matrice μx , admettant une valeur propre de module strictement supérieur aux modules des autres valeurs propres, se traite comme le cas du théorème [3].

Nous avons le théorème suivant.

THÉOREME 3. - Si la représentation μ associée à la série b est une repré-

sentation de X^* dans $M_2(\mathbb{N}^*)$, alors la série c est rationnelle sur l'anneau A .

Démonstration du théorème 3. - La démonstration du théorème 3 se fait en examinant les différents cas.

Il est facile de voir que toute matrice de $M_2(\mathbb{N}^*)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Il existe un cas qui se traite exactement comme le cas où les matrices μ_x et μ_y sont proportionnelles c'est le cas où l'algèbre, engendrée par les matrices μ_x , μ_y et R , est une algèbre triangulisable sur $\mathbb{C}$. Esquissons rapidement la démonstration.

Soient α et β (resp. α' et β') les valeurs propres de la matrice μ_x (resp. μ_y) , avec les conditions :

$$\alpha > |\beta| \quad \text{et} \quad \alpha' > |\beta'| .$$

Les valeurs propres de toute matrice μ_f sont donc :

$$\begin{cases} \alpha_f = \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} \\ \beta_f = \beta^{|f|_x} \beta'^{|f|_y} \end{cases}$$

où $|f|_x$ (resp. $|f|_y$) désigne le nombre d'occurrences de la lettre x (resp. y) dans le mot f .

Le coefficient (b, f) du mot f dans la série b est donc de la forme :

$$(b, f) = r\alpha_f - s\beta_f = r\alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} - s\beta^{|f|_x} \beta'^{|f|_y} .$$

Le coefficient (c, f) du mot f dans la série c s'écrit donc :

$$(c, f) = \frac{(a, f)}{r\alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} - s\beta^{|f|_x} \beta'^{|f|_y}} .$$

Comme β/α et β'/α' sont en valeurs absolues plus petites que 1 , il existe une longueur des mots f à partir de laquelle l'inégalité

$$(I) \quad \left| \frac{s}{r} (\beta/\alpha)^{|f|_x} (\beta'/\alpha')^{|f|_y} \right| < 1$$

a lieu.

En ne considérant que les mots f pour lesquels nous avons l'inégalité (I), nous pouvons écrire :

$$(c, f) \times \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} = \frac{(a, f)}{r - s(\beta/\alpha)^{|f|_x} (\beta'/\alpha')^{|f|_y}} .$$

Donc pour tout entier $p \geq 1$, nous avons le développement suivant :

$$(I') \quad (c, f) \times \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} = \frac{(a, f)}{r[1 - \frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]} \\ = \frac{(a, f)}{r} + \frac{(a, f)}{r} \times \frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y} + \dots + \frac{(a, f)}{r}[\frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^p \\ + \frac{(a, f)}{r}(\frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y})^{p+1} \sum_{n \geq 0} [\frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^n.$$

La série de terme général

$$\frac{(a, f)}{r} + \frac{(a, f)}{r} \times \frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y} + \dots + \frac{(a, f)}{r}[\frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^p$$

est rationnelle comme combinaison linéaire de produit de Hadamard de séries rationnelles.

En examinant les déterminants de Hankel de la série de terme général

$$\frac{(a, f)}{r}[\frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^{p+1} \sum_{n \geq 0} [\frac{s(\beta)}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^n,$$

nous voyons que l'on peut mettre en facteur, dans chaque ligne "d'indice g ", le coefficient

$$(\beta/\alpha)^{|g|_x} \times (\beta'/\alpha')^{|g|_y}$$

et, dans chaque colonne "d'indice h ", le coefficient :

$$(\beta/\alpha)^{|h|_x} \times (\beta'/\alpha')^{|h|_y}.$$

Or β/α et β'/α' sont en module strictement inférieur à 1. Les déterminants de Hankel de la série considérée tendent vers zéro très vite. Les déterminants de Hankel de la série de terme général

$$(c, f) \times \alpha^{|f|_x} \times \alpha'^{|f|_y}$$

tendent vers zéro très vite lorsque la longueur des mots f croît.

Or ce sont des entiers algébriques. Ils sont donc nuls à partir d'une certaine longueur des mots f ; la série c est donc rationnelle [2], ce qui démontre le théorème 1 dans ce cas.

Examinons le cas général, et voyons le comportement des valeurs propres en fonction de la longueur des mots

1. Cas où $\det \mu_x = \det \mu_y = 0$.

Rappelons un lemme dont la démonstration figure déjà en [5].

LEMME 1. - Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{Z})$ ayant une valeur propre entière, alors

il existe une matrice P de $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que PAP^{-1} soit une matrice triangulaire.

Démonstration du lemme 1. - Soit p la valeur propre entière de la matrice A , et soit $V = (x_0, y_0)$ un vecteur propre de A associé à p tel que les entiers x_0 et y_0 soient premiers entre eux. Il est facile de voir qu'un tel vecteur existe.

x_0 et y_0 étant premiers entre eux, il existe deux entiers z et t tels que l'on ait $zx_0 - ty_0 = 1$.

Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} z & -t \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix}.$$

On a $\det P = 1$, d'où $P \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Calculons PAP^{-1} :

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} z & -t \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & t \\ y_0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ o & q \end{pmatrix}$$

ce qui démontre le lemme 1.

Grâce au lemme 1, nous pouvons étudier un sous-cas très particulier du cas où $\det \mu x = \det \mu y = 0$, c'est le cas où, pour tout mot f de XX^* , la matrice $P_f \cdot \mu f \cdot (P_f)^{-1}$ est une matrice diagonale, et $P_f \in GL_2(\mathbb{Z})$. Il est facile de voir par récurrence sur la longueur des mots f que la valeur propre non nulle de la matrice μf est de la forme

$$a_f \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y},$$

où α (resp. α') est la valeur propre non nulle de la matrice μx (resp. μy), a_f étant un entier strictement positif, et $|f|_x$ (resp. $|f|_y$) étant le nombre d'occurrences de la lettre x (resp. y) dans le mot f .

Faisons rapidement cette démonstration :

Soit α_f la valeur propre non nulle de la matrice μf . Par hypothèse, α_f est de la forme $a_f \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y}$, α_f étant un entier, le lemme 1 permet d'affirmer l'existence d'une matrice P_f de $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que la matrice $P_f \cdot \mu f \cdot (P_f)^{-1}$ soit une matrice diagonale.

Soit S la matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que la matrice $SP_f \mu x (SP_f)^{-1}$ soit une matrice diagonale dont le coefficient $(1, 1)$ soit égal à α .

En calculant la trace de la matrice

$$SP_f \mu f (SP_f)^{-1} \cdot SP_f \mu x (SP_f)^{-1},$$

qui est égale à la trace de la matrice $\mu f \mu x$, nous voyons que cette trace s'écrit :

$$a a_f \alpha^{|f|_x+1} \alpha' |f|_y = a_{fx} \alpha^{|f|_x+1} \alpha' |f|_y ,$$

a étant un entier qui ne dépend que de la matrice S et qui est égal au produit de ses termes diagonaux.

Il existe une autre démonstration de ce résultat qui est très simple.

La matrice μx s'écrit $\mu x = \alpha \mu_1 x$, où $\mu_1 x$ est une matrice idempotente de $M_2(\mathbb{Z})$.

De même, μy s'écrit $\mu y = \alpha' \mu_1 y$, où $\mu_1 y$ est une matrice idempotente de $M_2(\mathbb{Z})$.

Donc, pour tout mot f , la matrice μf s'écrit

$$\mu f = \alpha^{|f|_x} \alpha' |f|_y \times \mu_1 f ,$$

μ_1 étant la représentation définie par les matrices $\mu_1 x$ et $\mu_1 y$, et

$$a_f = \text{Tr } \mu_1 f .$$

Le terme général de la série b s'écrit donc :

$$\text{Tr } R \mu f = r_f a_f \alpha^{|f|_x} \alpha' |f|_y ,$$

r_f étant le coefficient $(1, 1)$ de la matrice R dans la base où la matrice μf est diagonale.

Il est immédiat que les séries de terme général r_f , a_f et a_f sont rationnelles. Démontrons que la série de terme général r_f est rationnelle et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

En effet, pour tout entier $p \geq 1$, nous avons

$$\text{Tr } R(\mu f)^p = r_f (\alpha_f)^p = r_f (a_f)^p \alpha^{p|f|_x} \alpha'^{p|f|_y} .$$

Si g et h sont deux mots du monoïde libre X^* , alors :

$$\text{Tr } R \mu g (\mu f)^p \mu h = r_{gf^p h} a_{gf^p h} \alpha^{|g|_x + p|f|_x + |h|_x} \alpha'^{|g|_y + p|f|_y + |h|_y} .$$

$$\text{Or } \text{Tr } R \mu g (\mu f)^p \mu h = \text{Tr } \mu h R \mu g (\mu f)^p = r' \alpha^{p|f|_x} \alpha'^{p|f|_y} (a_f)^p .$$

Si l'on écrit la représentation μ sous la forme :

$$\mu f = \alpha^{|f|_x} \alpha' |f|_y \times (\mu_1 f) ,$$

alors

$$a_{gf^p h} = \text{Tr } \mu_1 g (\mu_1 f)^p (\mu_1 h) = \text{Tr } \mu_1 h \mu_1 g (\mu_1 f)^p = r'' (a_f)^p ,$$

d'où

$$r_{gf^p h} = \frac{r'}{r''} \alpha^{-|g|_x - |h|_x} \alpha'^{-|g|_y - |h|_y} ,$$

d'où

$$r_{gf^p h} = r_{gf^{p'} h}, \quad \forall p, p' \geq 1, \quad \forall f \in XX^*, \quad \forall g, h \in X^*.$$

Les déterminants de Hankel de la série de terme général r_f sont presque tous nuls. Cette série est donc rationnelle. La représentation minimale γ qui lui est associée est telle que, pour toute matrice γf et pour tout entier p , on a :

$$\gamma f = (\gamma f)^p.$$

Cette représentation minimale est donc finie [9]. Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ les valeurs distinctes de la série de terme général r_f . Il est facile de voir que, pour tout entier p_i , $1 \leq i \leq k$, la série $a_i = \sum_{f | r_f = p_i} f$ est rationnelle. Donc, pour tout i , la série $a'_i = \sum_{f | r_f = p_i} 1/p_i f$ est rationnelle.

La série de terme général $1/r_f$ qui est égale à la somme de k séries rationnelles est donc rationnelle.

Pour terminer la démonstration, il reste à voir que la série de terme général $1/a_f$ est rationnelle. La représentation μ_1 est engendrée par deux idempotents de $M_2(\mathbb{Z})$ qui sont $\mu_1 x$ et $\mu_1 y$.

Soit a_f la valeur propre non nulle de la matrice $\mu_1 f$. Pour tout couple de mots g et h de X^* , nous avons

$$\begin{aligned} a_{gf^p h} &= \text{Tr } \mu_1 g(\mu_1 f)^p \mu_1 h = \text{Tr } \mu_1 h \cdot \mu_1 g(\mu_1 f)^p \\ &= a'_{gh} (a_f)^p. \end{aligned}$$

Donc les déterminants de Hankel de la série de terme général $1/a_f$ sont presque tous nuls.

La série de terme général $1/a_f$ est donc rationnelle.

La série $c = \sum_f (c, f)f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques, ce qui termine la démonstration du théorème 1 dans ce cas.

Le cas général se traite comme ce cas particulier.

La matrice μx ayant une valeur propre entière, le lemme 1 montre qu'il existe une matrice P de $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que la matrice $P\mu x P^{-1}$ soit une matrice triangulaire supérieure. Il est facile de voir qu'il existe une matrice Q de $GL_2(\mathbb{Q})$ telle que la matrice $Q P \mu x (Q P)^{-1}$ soit une matrice diagonale avec $\det Q = 1$.

Si α est la valeur propre non nulle de la matrice μx , la matrice μx s'écrit donc $\mu x = \alpha \mu_1 x$, où $\mu_1 x$ est un idempotent de $M_2(\mathbb{Q})$; de même, la matrice μy s'écrit $\mu y = \alpha' \mu_1 y$, α' étant la valeur propre non nulle de la matrice $\mu_1 y$, et $\mu_1 y$ étant un idempotent de $M_2(\mathbb{Q})$. Les matrices $\mu_1 x$ et $\mu_1 y$ définissent une représentation de X^* dans $M_2(\mathbb{Q})$.

Les raisonnements qui ont été faits précédemment sur l'anneau A sont valables sur le corps $\mathbb{Q}$. La série c est rationnelle sur le corps $\mathbb{Q}$. Or l'anneau A est un anneau de Fatou [8]. La série c est donc rationnelle sur l'anneau A .

2. Cas où $\det(\mu x)^2 + \det(\mu y)^2$ n'est pas nul et l'algèbre engendrée par les matrices μf n'est pas une algèbre triangulisable sur $\underline{R}$.

L'algèbre enveloppante du monoïde engendré par les matrices μf n'étant pas triangulisable sur $M_2(\underline{R})$ est dans ce cas particulier une algèbre irréductible.

Soient α_f et β_f les valeurs propres de la matrice μf avec la condition

$$\alpha_f > |\beta_f|.$$

Nous pouvons supposer que la matrice R est la matrice E_{21} dont le seul coefficient non nul est le coefficient $(2, 1)$ et qui est égal à 1 [8]. Dans ce cas, le coefficient du mot f dans la série b s'écrit :

$$(b, f) = \text{Tr } R\mu f = r_f(\alpha_f - \beta_f).$$

Énonçons un lemme dont la démonstration est essentiellement technique.

LEMME 2. - La série $\sum_f (r_f \times \alpha_f) f$ est rationnelle sur $\underline{R}$.

Démonstration. - La démonstration est faite dans le cas où $\beta_f \neq 0$, car lorsque $\beta_f = 0$ le lemme 2 est trivial.

Si la matrice μf s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ses valeurs propres α_f et β_f sont respectivement égales à :

$$\frac{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

et

$$\frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

La série $\sum_f (\text{Tr } R\mu f) f \odot \sum_f \text{Tr}(\mu f) f$ est rationnelle. Son terme général s'écrit :

$$r_f(\alpha_f - \beta_f)(\alpha_f + \beta_f) = r_f(\alpha_f^2 - \beta_f^2),$$

donc la série de terme général $r_f(a + d) \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}$ est rationnelle, et par conséquent la série de terme général $r_f(\alpha_f)^2$ est rationnelle.

La série de terme général $\text{Tr}(\mu f)^{-1}$ est rationnelle. En effet, pour tout mot f de X^* , nous avons :

$$\text{Tr}(\mu f)^{-1} = \text{Tr}^t (\mu f)^{-1},$$

et l'application $f \mapsto \text{Tr}^t (\mu f)^{-1}$ étant le produit de deux anti-homomorphismes est un homomorphisme.

La série de terme général :

$$r_f(\alpha_f)^2 \left(\frac{1}{\alpha_f} + \frac{1}{\beta_f} \right) = r_f(\alpha_f)^2 \left[\frac{1}{\alpha_f} + \frac{\alpha_f}{ad - bc} \right]$$

est rationnelle, ce qui s'écrit :

$$(1) \quad r_f \alpha_f + r_f \frac{(\alpha_f)^3}{ad - bc}.$$

Il est facile de voir, par récurrence sur p , que la série $\sum_f [\text{Tr } R(\mu f)^p] f$ est rationnelle pour tout entier $p \geq 1$.

En particulier, la série de terme général :

$$(2) \quad r_f \left[(\alpha_f)^3 - \frac{(\text{ad} - \text{bc})^3}{(\alpha_f)^3} \right]$$

est rationnelle, ce qui permet d'écrire la rationalité de la série de terme général :

$$r_f \cdot \left[\alpha_f (\text{ad} - \text{bc}) + \frac{(\text{ad} - \text{bc})^3}{(\alpha_f)^3} \right] = r_f (\alpha_f (\text{ad} - \text{bc}) + (\beta_f)^3),$$

ce qui démontre la rationalité de la série de terme général $\sum_{f \in X^*} (r_f \cdot a_f) f$, ce qui démontre le lemme 2.

La série de terme général r_f est rationnelle ; en effet, la série $\sum_f (\text{Tr}(\mu f)^{-1}) f$ étant rationnelle, la série :

$$\sum_f (r_f \alpha_f) f \odot \sum_f \text{Tr}(\mu f^{-1}) f$$

est rationnelle. Son terme général s'écrit :

$$r_f \alpha_f \times \left(\frac{1}{\alpha_f} + \frac{\alpha_f}{\text{ad} - \text{bc}} \right) = r_f + \frac{r_f (\alpha_f)^2}{\text{ad} - \text{bc}}.$$

La série de terme général $r_f (\alpha_f)^2 / (\text{ad} - \text{bc})$ étant rationnelle, il est immédiat que la série de terme général r_f est rationnelle.

Ceci permet de prouver que la série de terme général r_f^{-1} est rationnelle, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ainsi que la rationalité de la série de terme général β_f / α_f .

En effet, pour tout mot f de X^* , r_f est le coefficient $(1, 1)$ de la matrice R dans la base où la matrice μf est diagonale.

Donc, pour tout mot f de X^* et pour tout entier $p \geq 1$, nous avons :

$$r_{f^p} = r_f.$$

Plus généralement, si h et g sont deux mots quelconques du monoïde libre X^* , nous avons :

$$\text{Tr } R_{\mu g}(\mu f)^p \mu h = r_{gf^p h} \cdot (\alpha_{gf^p h} - \beta_{gf^p h}).$$

$$\text{Tr } R_{\mu g}(\mu f)^p \mu h = \text{Tr } \mu h R_{\mu g}(\mu f)^p = r_1^p (\alpha_f)^p + r_2^p (\beta_f)^p, \quad \forall p \geq 1.$$

$\alpha_{gf^p h}$ et $\beta_{gf^p h}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mu g(\mu f)^p \mu h$ qui sont les mêmes que celles de la matrice $\mu h \mu g(\mu f)^p$. Elles sont donc de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_{gf^p h} = (u \alpha_f^p + t \beta_f^p + \sqrt{(u \alpha_f^p - t \beta_f^p)^2 + 4vw (\alpha_f \beta_f)^p}) / 2 \\ \beta_{gf^p h} = (u \alpha_f^p + t \beta_f^p - \sqrt{(u \alpha_f^p - t \beta_f^p)^2 + 4vw (\alpha_f \beta_f)^p}) / 2 \end{cases}$$

u, t, v, w étant des nombres réels.

En identifiant les deux expressions de $\text{Tr } R_{\mu g}(\mu f)^p \mu_h$, nous obtenons :

$$r_{gf^p h} \cdot \sqrt{(u\alpha_f^p - t\beta_f^p)^2 + 4vw(\alpha_f \beta_f)^p} = r_1'(\alpha_f)^p + r_2'(\beta_f)^p.$$

$$(r_{gf^p h})^2 \cdot [(u\alpha_f^p - t\beta_f^p)^2 + 4vw(\alpha_f \beta_f)^p] = [r_1'(\alpha_f)^p + r_2'(\beta_f)^p]^2.$$

Ce qui donne, après calculs, puisque cette égalité a lieu pour tout entier p ,

$$\begin{cases} (r_{gf^p h})^2 \times u^2 = r_1'^2 \\ (r_{gf^p h})^2 \times t^2 = r_2'^2 \\ (r_{gf^p h})^2 (-2ut + 4vw) = 2r_1' \cdot r_2' \end{cases}$$

d'où

$$r_{gf^p h} = \varepsilon \cdot \frac{r_1'}{u}, \quad \forall p \geq 1, \quad \text{avec} \quad \varepsilon \cdot \frac{r_1'}{u} > 0.$$

La série rationnelle de terme général r_f ne prend qu'un nombre fini de valeurs comme le montre sa représentation minimale [9]. La série de terme général r_f^{-1} est donc rationnelle, ce qui démontre en même temps la rationalité des séries suivantes :

$$\sum_f (\alpha_f) f, \quad \sum_f (\alpha_f)^{-1} f, \quad \sum_f \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right) f \quad \text{et} \quad \sum_f \frac{|\beta_f|}{\alpha_f} \cdot f.$$

Donc, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_f (\beta_f/\alpha_f)^p f$ est rationnelle.

Nous allons démontrer que la série de terme général $(c, f) \times r_f \times \alpha_f$ est rationnelle, et comme nous avons vu que la série $\sum_f (r_f^{-1} \times \alpha_f^{-1}) f$ était rationnelle, on en déduit que la série c est rationnelle.

Pour tout entier n , la série de terme général $(c, f) \times r_f \times \alpha_f$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (c, f) \times r_f \times \alpha_f &= \frac{(a, f)}{1 - (\beta_f/\alpha_f)} = (a, f) \left[1 + \frac{\beta_f}{\alpha_f} + \dots + \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)^n \right] \\ &\quad + (a, f) \times \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1 - (\beta_f/\alpha_f)}. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer qu'il existe un certain entier $n \geq 1$, et une certaine longueur des mots f_0 à partir de laquelle nous avons l'inégalité

$$\left| (a, f) \times \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)^{n+1} \right| < 1,$$

pour tout mot f dont la longueur est au moins égale à f_a .

Connaissant la majoration des coefficients d'un déterminant, il est facile de majorer ce déterminant [3].

Donc les déterminants de Hankel de la série de terme général

$$(a, f) \times \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1 - (\beta_f/\alpha_f)}.$$

tendent vers 0 lorsque la longueur des mots f augmentent. Il en est de même des déterminants de Hankel de la série de terme général $(c, f) \times r_f \times \alpha_f$. Comme ce sont des entiers algébriques, ils sont nuls à partir d'une certaine longueur des mots f .

La série $\sum_f (c, f) \times r_f \times \alpha_f^f$ est rationnelle. Donc la série c est rationnelle.

La série de terme général $(d, f) = |\beta_f|/\alpha_f$ est rationnelle, comme nous l'avons vu précédemment.

Soit $\bar{\mu}$ sa représentation minimale [8]. Si $\bar{N}$ est le degré de cette représentation, nous savons qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\bar{\mu}^f = \sum_{(s,t) \in S \times T} (d, sft) \pi(s, t) \quad [8],$$

où S et T sont des sous-ensembles du monoïde libre X^* ayant chacun $\bar{N}$ mots, et $\pi(s, t)$ étant une matrice carrée $\bar{N} \times \bar{N}$ réelle pour tout couple de mots (s, t) de $S \times T$.

Or, pour tout entier p et pour tout mot f , nous avons :

$$(d, f^p) = |\beta_f^p|/\alpha_f^p = (d, f)^p.$$

Il est facile de voir que, pour tout triplet de mots s, f, t , nous avons :

$$(d, sft) = (d, tsf).$$

D'où

$$\bar{\mu}^{f^p} = \sum_{(s,t) \in S \times T} (d, sf^p t) \pi(s, t) = \sum_{(s,t) \in S \times T} (d, tsf^p) \pi(s, t).$$

Si le terme général de la série d s'écrit :

$$(d, f) = \text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}^f, \text{ où } \bar{u} \text{ est une matrice de } M_{\bar{N}}(\mathbb{R}),$$

alors :

$$(d, sf^p t) = \text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}^s (\bar{\mu}^f)^p \bar{\mu}^t = \text{Tr } \bar{\mu}^t \bar{u} \bar{\mu}^s (\bar{\mu}^f)^p.$$

Or nous avons vu que, pour tout mot f de XX^* et pour tout entier p , nous avons :

$$(d, f^p) = |\beta_f^p|/\alpha_f^p = (d, f)^p = \text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}^{f^p} = (\text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}^f)^p$$

d'où $\text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}^{f^p} = \gamma^p$, où $|\gamma| < 1$.

D'autre part, pour tout couple de mots (s, t) de $S \times T$, nous avons :

$$(d, sf^p t) = \sum_{1 \leq i \leq \bar{N}} \delta_{st}^{(f)(i)} \times \gamma_f^{ip}$$

d'où

$$\bar{\mu}f^p = \sum_{(s,t) \in S \times T} (d, sf^p t) \pi(s, t)$$

$$\text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}f^p = \sum_{(s,t) \in S \times T} (d, sf^p t) \text{Tr } \bar{u} \pi(s, t) = \left(\sum_{(s,t) \in S \times T} (d, sft) \text{Tr } \bar{u} \pi(s, t) \right)^p.$$

Pour tout entier p , nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq \bar{N}} \sum_{(s,t) \in S \times T} \delta_{st}^{(f,i)} \gamma_f^{ip} \text{Tr } \bar{u} \pi(s, t) \\ = \left(\sum_{1 \leq i \leq \bar{N}} \sum_{(s,t) \in S \times T} \delta_{st}^{(f,i)} \gamma_{if}^i \text{Tr } \bar{u} \pi(s, t) \right)^p. \end{aligned}$$

L'unicité de l'écriture des termes d'une série rationnelle montre que

$$(d, sf^p t) = \delta_{st}^f \gamma_f^p.$$

Or, pour tout entier p et pour tout mot f de X^* , $|(d, sf^p t)| < 1$, d'où $|\gamma_f| < 1$, d'où

$$\bar{\mu}f = \sum_{(s,t) \in S \times T} (d, sft) \pi(s, t) = \sum_{(s,t) \in S \times T} \delta_{st}^{(f)} \times \gamma_f \times \pi(s, t).$$

$\bar{\mu}$ est donc une représentation du monoïde libre X^* dans l'ensemble des matrices $\bar{N} \times \bar{N}$ à coefficients dans $] -1 + 1[$.

Si m est le coefficient des matrices $\bar{\mu}x$, $\bar{\mu}y$ telle que :

$$|(\bar{\mu}x)_{i,j}| \leq |m|, \quad \forall 1 \leq i, j \leq \bar{N}$$

et

$$|(\bar{\mu}y)_{i,j}| \leq |m|, \quad \forall 1 \leq i, j \leq \bar{N},$$

il est immédiat que, pour toute matrice $\bar{\mu}f$, on a :

$$|(\bar{\mu}f)_{i,j}| \leq |m|^{|f|} \bar{N}^{2|f|-2}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq \bar{N}$$

d'où

$$\text{Tr } \bar{u} \bar{\mu}f \leq A_m |f| \bar{N}^{2|f|-2}$$

pour tout mot f dans XX^* .

La série de terme général (a, f) étant rationnelle, soit N' le degré de la représentation minimale qui lui est associée. Il est facile de trouver deux matrices M' et V , à coefficients entiers algébriques, dont deux d'ordre N' , telles que :

$$|(a, f)| \leq \text{Tr } VM' |f|$$

d'où

$$|(a, f)| \times |\beta_f|/\alpha_f \leq \text{Tr } VM' |f| \times A_m |f| \bar{N}^{2|f|-2}.$$

Si $|A_m| |f| \bar{N}^{2|f|-2} < 1$, pour tout mot f de XX^* , il existe alors un entier n , et un mot f_0 tels que

$$|(a, f) \times (|\beta_f|/\alpha_f)^{n+1}| \leq \text{Tr } VM' |f| \times (A_m |f| \bar{N}^{2|f|-2})^{n+1} < 1$$

pour tout mot f dont la longueur est au moins égale à celle de f_0 .

Ceci termine la démonstration dans ce cas.

Lorsque $|A_m|f| \overline{N}^{2|f|-2} > 1$, on raisonne sur la série de terme général :

$$(c, f) \times \overline{N}^{-2|f|+2}.$$

car il est immédiat que la série de terme général $\overline{N}^{-2|f|+2}$ est rationnelle.

3. Etude du cas $\det \mu x = 0$, $\det \mu y \neq 0$.

La série c s'écrit dans ce cas comme somme des deux séries :

$$c = \sum_{n \geq 0} (c, y^n) y^n + \sum_{|f|_x \geq 1} (c, f) f.$$

La série $\sum_{n \geq 0} (c, y^n) y^n$ est rationnelle [7].

Examinons la série de terme général (c, f) pour tous les mots f qui ont au moins une occurrence de la lettre x .

Or

$$(c, f) = \frac{(a, f)}{\text{Tr } R \mu f} \text{ et } \text{Tr } R \mu f = r_f(a + d)$$

si la matrice μf s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De la même manière que précédemment, nous voyons que la série de terme général r_f est rationnelle et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Si g est un mot de X^* , alors :

$$\text{Tr } R \mu g \mu f^p = r_{gf^p}(a + d)^p = r_{gf}(a + d)^p.$$

Les déterminants de Hankel de la série de terme général $(\text{Tr } R \mu f)^{-1}$ sont presque tous nuls.

La série $\sum_{|f|_x \geq 1} (c, f) f$ est donc rationnelle comme produit de Hadamard de deux séries rationnelles, ce qui termine la démonstration dans tous les cas où la représentation μ est de degré 2.

Remarque. - Le cas où la représentation μ est de degré au moins égal à 3 nécessite deux hypothèses supplémentaires qui sont les suivantes :

1° Pour tout mot f de XX^* , la matrice μ_f est irréductible sur $\underline{R}$.

2° La matrice μf est inversible.

Sous ces deux hypothèses nous avons le lemme suivant dont la démonstration est essentiellement technique.

LEMME 3. - Les fonctions symétriques des valeurs propres des matrices μ_f sont des fonctions rationnelles.

Le problème qui n'est pas encore résolu est le suivant :

Si α_f est la valeur propre réelle de la matrice μ_f , dont le module est supérieur strictement aux modules des autres valeurs propres, alors la série $\sum_f (\alpha_f)^f$ est-elle rationnelle ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CANTOR (D. G.). - On arithmetic properties of Taylor series of rational functions, Pacific J. Math., t. 41, 1972, p. 329-334.
 - [2] FLIESS (M.). - Sur certaines familles de séries formelles, Thèse d'état, Université Paris-7, 1972.
 - [3] GÉRARDIN (K.). - Quotient de Hadamard de séries rationnelles en variables non commutatives, "Séries formelles en variables non commutatives et applications, Actes de la 5e Ecole de printemps d'informatique théorique [1977. Vieux-Boucau]", p. 119-134. - Paris, Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, Ecole Nationale Supérieure des techniques avancées, 1978.
 - [4] GÉRARDIN (K.). - Quotients d'Hadamard de séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 17e année, 1975/76, n° 5, 11 p.
 - [5] LAMÈCHE (K.) [GÉRARDIN (K.)]. - Extension d'un théorème de G. Polya à des séries rationnelles à variables non commutatives. - Thèse 3e cycle, Université de Paris, 1970.
 - [6] MAHLER (K.). - Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor Koeffizienten rationaler Funktionen, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., t. 63, 1972, p. 50-60.
 - [7] PATHIAUX (M.). - Algèbre de Hadamard de fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 977-980.
 - [8] SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - On the definition of a family of automata, Inform. and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.
 - [9] SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - Finite counting automata, Inform. and Control, t. 5, 1962, p. 91-107.
 - [10] UCHIYAMA (S.). - On a theorem of G. Polya, Proc. Japan Acad., t. 41, 1965, p. 517-520.
-