

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN COUGNARD

## Groupes de torsion associés à des anneaux d'entiers

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 20, n° 1 (1978-1979),  
exp. n° 11, p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1978-1979\\_\\_20\\_1\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A7_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

GROUPES DE TORSION ASSOCIÉS À DES ANNEAUX D'ENTRIERS

par Jean COUGNARD (\*)

[Université de Franche-Comté, Besançon]

Résumé.

On désigne par  $N$  une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$  de groupe de Galois  $G$ , par  $O_N$  la clôture intégrale de  $\mathbb{Z}$  dans  $N$ , et par  $\mathfrak{M}$  un ordre maximal de  $\mathbb{Q}[G]$  contenant  $\mathbb{Z}[G]$ .

Dans un travail précédent [3], on a donné un exemple d'extension  $N/\mathbb{Q}$  sauvagement ramifiée telle que le  $\mathfrak{M}$ -module  $\mathfrak{M}O_N$  ne soit pas stablement libre, contrairement à ce qui se passe pour les extensions modérément ramifiées ([7], th. 11), les  $p$ -extensions et les extensions abéliennes ([2], [8]).

Le groupe  $G$ , utilisé dans [3], est un groupe métacyclique d'ordre  $pq$  ( $p$  et  $q$  premiers). Dans cet exemple si, au lieu de considérer  $\mathfrak{M}O_N$ , on fait l'extension des scalaires  $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ , on obtient un  $\mathfrak{M}$ -module isomorphe à  $\mathfrak{M}O_N \oplus T$  où  $T$  est un  $\mathfrak{M}$ -module fini, et on a le résultat suivant [4] :

THÉORÈME. - Lorsque  $G$  est un groupe métacyclique d'ordre  $pq$  ( $p$  et  $q$  premiers), les classes de  $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$  et de  $\mathfrak{M}$  sont les mêmes dans le groupe de Grothendieck  $G_0(\mathfrak{M})$  de la catégorie des  $\mathfrak{M}$ -modules de type fini.

On remarque aisément que le théorème est encore vrai si  $N/\mathbb{Q}$  est une  $p$ -extension [4] ou une extension abélienne [1]. Dans ce dernier cas, ainsi que lorsque  $G$  est un groupe quaternionien d'ordre 8, on peut décrire explicitement le groupe de torsion  $T$  [5].

Etant donnés deux ordres maximaux  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  de  $\mathbb{Q}[G]$ , il existe un isomorphisme canonique entre  $G_0(\mathfrak{M})$  et  $G_0(\mathfrak{M}')$ ; si ces ordres contiennent  $\mathbb{Z}[G]$  la question se pose de savoir si les images de  $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$  et  $\mathfrak{M}' \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$  se correspondent dans cet isomorphisme. Si oui, est-ce que le théorème énoncé ci-dessus reste valable ?

Additif. - Dans l'exposé 33 du 11 juin 1979 de ce même séminaire Stephen M. J. WILSON montre que la réponse à ces questions est négative.

---

(\*) Texte reçu le 17 septembre 1979.

Jean COUGNARD, E. R. A. O 0654 C. N. R. S., Laboratoire de Mathématiques, Faculté des Sciences, Route de Gray, La Bouloie, 25030 BESANÇON CEDEX.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHATELAIN (Danièle). - Etude du  $O$ -module  $O \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$  pour une extension  $K/\mathbb{Q}$  abélienne de groupe  $G$ , avec  $O$  ordre maximal de  $\mathbb{Q}[G]$ ,  $O_K$  anneau des entiers de  $K$ , Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, 1976/77.
- [2] COUGNARD (Jean). - Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers des  $p$ -extensions, Comp. Math., Groningen, t. 33, 1976, p. 303-336.
- [3] COUGNARD (Jean). - Un contre-exemple à une conjecture de J. Martinet, "Algebraic number fields", Edited by A. Fröhlich, p. 539-559. - Academic Press, 1977.
- [4] COUGNARD (Jean). - Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré  $pq$  des rationnels, Comp. Math., Groningen (à paraître).
- [5] COUGNARD (Jean). - Groupes de torsion associés à des extensions quaternioniennes de degré 8 du corps des nombres rationnels, Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, 1977/78.
- [6] FRÖHLICH (A.). - Locally free modules over arithmetic orders, J. für die reine und angew. Math., t. 274/275, 1975, p. 112-138.
- [7] FRÖHLICH (A.). - Arithmetic and Galois-module structure for tame extensions, J. für die reine und angew. Math., t. 286/287, 1976, p. 380-440.
- [8] LEOPOLDT (H. W.). - Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers, J. für die reine und angew. Math., t. 201, 1959, p. 119-149.
-