Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Eugène Dubois
Georges Rhin

Approximations simultanées de deux nombres réels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1978-1979), exp. n° 9, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
20e année, 1978/79, n° 9, 13 p.

11 décembre 1978

APPROXIMATIONS SIMULTANÉES DE DEUX NOMBRES RÉELS

par Eugène DUBOIS et Georges RHIN (*)

Résumé. - Dans ce séminaire, nous proposons une nouvelle définition de la notion de meilleure approximation de zéro par une forme linéaire cubique, $p_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2$. L'algorithme fournissant ces meilleures approximations peut être considéré comme une généralisation du développement en fraction continue, il fournit des approximations simultanées de deux nombres réels et allie des propriétés de "bonne approximation", de "meilleure approximation" et il est périodique lorsque $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = \omega^2$, ω^3 étant un entier distinct d'un cube.

Abstract. - In this lecture, we give a new definition of best approximation of zero by a cubic linear form, $p_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2$. The algorithm which gives these best approximation may be considered as a continued fraction expansion generalisation. It gives simultaneous approximation of two real numbers, combines "good approximation" and "best approximation" properties and it is periodic when $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = \omega^2$, where ω^3 is a positive rational integer distinct from a cube.

1. Introduction.

Dans le cas d'un seul nombre réel α, l'algorithme des fractions continues répond de manière très satisfaisante aux questions d'approximation de α par des rationnels. Les réduites p_n/q_n du développement en fraction continue de α vérifient

(B1) $\quad |q_n \alpha - p_n| < 1/q_n$ (ce sont de "bonnes approximations" de α),

(M1) $\quad 0 < q < q_n \Longrightarrow |q\alpha - p| > |q_n \alpha - p_n|$, pour tout p,

ce sont les "meilleures approximations" de α.

Et les développements périodiques sont bien caractérisés, en particulier

(P1) le développement de $\alpha = \sqrt{D}$ (D entier non carré) est périodique.

Si maintenant on se donne deux nombres réels α_1, α_2, on veut construire des approximations rationnelles simultanées, b_1/b_0, b_2/b_0, ou des approximations de zéro par la forme linéaire $p_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2$ (b_i, p_i entiers). On peut espérer une propriété de bonne approximation, i. e.

$$\text{(B2)} \qquad \begin{cases} |b_i - b_0 \alpha_i| \; |b_0|^{1/2} < 1 & (i = 1, 2) \\ |p_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2| \; \max(p_1^2, p_2^2) < 1 \end{cases}.$$

D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe une infinité d'entiers vérifiant (B2) et, d'autre part, d'après les travaux de W. M. SCHMIDT [7], c'est le

(*) Texte reçu le 19 mars 1979.

Eugène DUBOIS, Cidex C-13, VILLONS LES BUISSONS, 14610 THAON.

meilleur degré d'approximation (exposant de b_0 ou de $\max(|p_1|\ ,\ |p_2|)$) que l'on peut obtenir lorsque α_1 et α_2 sont des nombres algébriques $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants avec 1 .

On dit que $(p_0\ ,\ p_1\ ,\ p_2)$ est une meilleure approximation de $(\alpha_1\ ,\ \alpha_2)$ si

(M2) $\forall\ (p_0'\ ,\ p_1'\ ,\ p_2') \in \underset{\sim}{\mathbb{Z}}^3$,

$$\max(p_1'^2\ ,\ p_2'^2) < \max(p_1^2\ ,\ p_2^2) \Longrightarrow |p_0' + p_1'\,\alpha_1 + p_2'\,\alpha_2| > |p_0 + p_1\,\alpha_1 + p_2\,\alpha_2| \ .$$

Enfin, on peut espérer une propriété de périodicité, en particulier lorsque

(P2) $\qquad \alpha_1 = \omega\ ,\ \alpha_2 = \omega^2\ ,\ \omega^3 = m$ (m entier distinct d'un cube).

Les principales généralisations de l'algorithme des fractions continues sont les suivantes.

L'algorithme de Jacobi-Perron [6] (1907). - Il fournit des approximations simultanées qui convergent vers α_1 et α_2 , mais on ne connait le degré d'approximation que si le développement est périodique et ce n'est pas toujours le meilleur. Du point de vue de la propriété de meilleure approximation, on ne sait rien, et les développements périodiques ne sont pas caractérisés. Lorsque $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = \omega^2$ ($\omega^3 = m$ entier), on connait des familles du type $m = D^3 \pm 3d$ ou $D^3 + 3D$, $D^3 + 6D$ qui donnent des développements périodiques. On pourra se reporter à [1] ou [4], mais pour un nombre aussi simple que $m = 4$, nous avons calculé 1954 pas du développement (faisant intervenir des entiers de l'ordre de 10^{222}) sans obtenir de période.

Par contre, cet algorithme peut s'appliquer à n ($n \geqslant 1$) nombres réels et la règle de passage d'un rang au suivant est très simple.

L'algorithme de G. Szekeres [8] (1970). - Il fournit des approximations simultanées et des approximations de zéro par une forme linéaire. Il semble fournir des meilleures approximations (M2). Ceci a été démontré sur un exemple ($\alpha_1 = 2\cos(2\pi/7)$, $\alpha_2 = \alpha_1^2$) par T. W. CUSIK [3]. G. SZEKERES introduit une notion de presque périodicité, mais il ne connait qu'un seul exemple où celle-ci est démontrée. Cet algorithme peut s'appliquer à plus de deux nombres réels, il semble assez lent (du point de vue rapidité de la convergence), mais il semble donner satisfaction à divers utilisateurs. Il y a aussi un algorithme de MINKOWSKI [5] basé sur les parallélipipèdes extrémaux (dans $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^3$). Il fournit une infinité de bonnes approximations mais son utilisation n'est pas commode.

Nous allons maintenant définir un algorithme qui, avec de petites nuances, aura les propriétés B (propositions 2 et 3), M (par définition) et P (théorème 1).

2. Définitions.

Soient α_1 , α_2 deux nombres réels supérieurs à 1 , p_0 , p_1 , p_2 trois entiers. Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} \Omega = (1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \alpha_2)\ ,\quad P = (p_0\ ,\ p_1\ ,\ p_2) \\ \psi(P) = P\Omega = p_0 + p_1\,\alpha_1 + p_2\,\alpha_2 \\ \mathcal{C}(P) = \frac{1}{2}((p_0 - p_1\,\alpha_1)^2 + (p_1\,\alpha_1 - p_2\,\alpha_2)^2 + (p_2\,\alpha_2 - p_0)^2) \end{cases}$$

$\mathcal{C}(P)$ peut aussi s'écrire

$$(2)\qquad \mathcal{C}(P) = \frac{3}{2}(p_0^2 + p_1^2\,\alpha_1^2 + p_2^2\,\alpha_2^2) - \frac{1}{2}(\psi(p))^2$$

$$(3)\qquad \mathcal{C}(P) = (p_0 + jp_1\,\alpha_1 + j^2\,p_2\,\alpha_2)(p_0 + j^2\,p_1\,\alpha_1 + jp_2\,\alpha_2)\ ,$$

où j vérifie $1 + j + j^2 = 0$.

DÉFINITION 1. - P est une meilleure approximation normale (m. a. n.) de Ω si, pour tout triplet d'entiers P' , distinct de P , vérifiant $0 < \psi(P') \leqslant \psi(P) \leqslant 1$, on a

$$\mathcal{C}(P') > \mathcal{C}(P)\ .$$

Nous conviendrons de ranger les m. a. n. P_k de façon que

$$1 \geqslant \psi(P_0) = \psi_0\ ,\quad \psi_k = \psi(P_k) > \psi_{k+1} = \psi(P_{k+1})\quad (k \geqslant 0)\ .$$

Cette suite est finie si, et seulement si, α_1 et α_2 sont rationnels.

En effet, d'après (2), pour tout $\epsilon > 0$ et $C > 0$, l'ensemble des triplets d'entiers P, vérifiant $0 < \psi(P) \leqslant \epsilon$ et $\mathcal{C}(P) < C$, est fini et donc P_k vérifie

$$(4)\qquad \mathcal{C}(P_k) = \min\{\mathcal{C}(P)\ ;\ 0 < \psi(P) < \psi(P_{k-1})\}\quad (k \geqslant 1)\ .$$

Alors, la construction des m. a. n. ne s'arrête que si $\{\psi(P)\ ;\ P \in \underset{\sim}{Z}^3\ ,\ \psi(P) > 0\}$ admet un minimum, ce qui équivaut à α_1 et α_2 rationnels. Dans le cas contraire, la suite $(\mathcal{C}(P_k))_{k\geqslant 0}$ est croissante et, d'après (2), tend vers l'infini.

Nous supposerons dans la suite que $1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \alpha_2$ vérifient

$$(5)\qquad 1 < \alpha_1 < \alpha_2 \text{ et } 1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \alpha_2 \text{ linéairement indépendants sur } Q\ .$$

De cette hypothèse, il résulte que $\psi(P) = \psi(P')$ si, et seulement si, $P = P'$. Si $1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \alpha_2$ sont $\underset{\sim}{Q}$-linéairement dépendants, l'étude $\psi(P)$ peut se traiter à l'aide des fractions continues.

DÉFINITION 2. - Soient $1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \alpha_2$ vérifiant (5) , $\Omega = (1\ ,\ \alpha_1\ ,\ \alpha_2)$, $(P_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des m. a. n. de Ω .

Pour $k \geqslant 1$, soit $\mathfrak{F}_k$ l'ensemble des éléments Q de $\underset{\sim}{Z}^3$ tels que

(i) $0 < \psi(Q) < \psi_{k-1} = \psi(P_{k-1})$;

(ii) $P_k\ ,\ Q\ ,\ P_{k-1}$ linéairement indépendants ;

(iii) $\mathcal{C}(Q)$ minimum pour les Q vérifiant (i) et (ii) .

Soit Q_k l'élément de $\mathfrak{S}_k$ tel que $\Phi_k = \psi(Q_k)$ soit minimum. On pose $Q_0 = (0 , 1 , 0)$.

Les éléments de la suite $(Q_k)_{k\geq 0}$ sont appelés les approximations normales auxiliaires de Ω .

Posons $P_{-1} = (0 , 0 , 1)$. Pour $k \geq 0$, soit $\mathfrak{L}_k$ la matrice dont les lignes sont P_k , Q_k , P_{k-1} . Nous montrerons (proposition 4) que $|\det \mathfrak{L}_k| = 1$. Nous dirons que $\mathfrak{L}_k$ est la k-ième base d'approximation de Ω .

Soient $\mathfrak{S}_k$ la matrice inverse de $\mathfrak{L}_k$, $A(k) = (a_0^{(k)} , a_1^{(k)} , a_2^{(k)})$, $B_k = (b_0^{(k)} , b_1^{(k)} , b_2^{(k)})$, $C_k = (c_0^{(k)} , c_1^{(k)} , c_2^{(k)})$ ses vecteurs colonnes.

Nous associons à la suite des m. a. n. de Ω les nombres

$$\alpha_1^{(k)} = \frac{\psi(Q_k)}{\psi(P_k)} = \frac{\Phi_k}{\psi_k} , \quad \alpha_2^{(k)} = \frac{\psi_{k-1}}{\psi_k} \quad (k \geq 0) , \tag{6}$$

et les matrices Λ_k définies par

$$\mathfrak{L}_{k+1} = \Lambda_k \mathfrak{L}_k \quad (k \geq 0) . \tag{7}$$

Définition 3. - Nous appellerons développement de α_1 , α_2 la suite $(\alpha_1^{(k)} , \alpha_2^{(k)})_{k\geq 0}$, et nous dirons qu'il est périodique si cette suite l'est.

Si on voulait restreindre ces définitions à un seul nombre réel α , on poserait

$$P = (p , q) , \quad \psi_1(P) = q\alpha + p , \quad \mathcal{C}_1(P) = |q\alpha - p| .$$

On peut alors montrer l'équivalence entre les m. a. n. définies par la définition 1 en remplaçant ψ et $\mathcal{C}$ par ψ_1 et $\mathcal{C}_1$, et les meilleures approximations au sens habituel (M1).

PROPOSITION 1. - Les m. a. n. de $(1 , \alpha)$ sont les couples

$$P_n = (-1)^{n-1} (-p_{n-1} , q_{n-1}) , \quad n \geq 0 ,$$

où p_n/q_n désigne la n-ième réduite du développement en fraction continue de α .

3. Propriétés générales.

PROPOSITION 2. - Soient (α_1 , α_2) deux nombres réels vérifiant (5) , $(P_k)_{k\geq 0}$ la suite des m. a. n. de $\Omega = (1 , \alpha_1 , \alpha_2)$.

Alors

$$\psi(P_k) \quad (P_{k+1}) \leq \theta = (18\alpha_1 \alpha_2)/(\pi\sqrt{3}) .$$

Pour montrer cette proposition, on considère l'ensemble $\mathcal{A}_C$ des points M dans $\underset{\sim}{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{C}(M) < C \\ |M.\Omega| < \psi(P_k) = \psi_k \end{cases} .$$

En considérant $V_0 = (\alpha_1\ \alpha_2\ ,\ \alpha_2\ ,\ \alpha_1)$, $V_1 = (\alpha_1\ \alpha_2\ ,\ -2\alpha_2\ ,\ \alpha_1)$, $V_2 = (\alpha_1\ \alpha_2\sqrt{3}\ ,\ 0\ ,\ -\alpha_1\sqrt{3})$ qui forment une base orthogonale relativement à la forme quadratique $\mathcal{C}$, en notant $M = XV_0 + YV_1 + ZV_2$. $\mathcal{A}_C$ est défini par

$$\begin{cases} 9\alpha_1^2\ \alpha_2^2(Y^2 + Z^2) < C \\ 3\alpha_1\ \alpha_2\ |X| < \psi_k \end{cases} .$$

Le volume du convexe $\mathcal{A}_C$ est donc $((8\pi\sqrt{3})/(18\alpha_1\ \alpha_2))C\psi_k$. Si ce volume est supérieur à 8 , $\mathcal{A}_C$ contient un point à coordonnées entières, d'où la proposition 2.

PROPOSITION 3. - Soient α_1 , α_2 deux nombres réels d'un corps cubique vérifiant (5). Il existe une constante positive $\delta = \delta(\alpha_1\ ,\ \alpha_2)$ tel que, pour tout $k \geqslant 0$, on ait

$$\psi_k\ \mathcal{C}(Q_{k+1}) \leqslant \theta^3\ \delta^2 .$$

La preuve utilise le théorème de Minkowski sur les minima successifs d'un convexe que l'on applique à $\mathcal{A}_C$. Pour tout P dans $\underset{\sim}{Z}^3$, la norme de $\psi(P)$ est minorée. On en déduit l'existence de δ tel que

$$\psi(P)\ \mathcal{C}(P) \geqslant \delta^{-1} . \tag{8}$$

Ceci permet de minorer les deux premiers minima successifs λ_1 , λ_2 de $\mathcal{A}_C$ et donc, avec le théorème de Minkowski, de majorer le troisième minimum λ_3 . Si $C\psi_k > \theta^3\ \delta^2$, on obtient $\lambda_3 < 1$ et donc $\mathcal{A}_C$ contient trois points linéairement indépendants parmi lesquels se trouve Q_{k+1} . D'où la proposition 3.

PROPOSITION 4. - Soient α_1 , α_2 deux nombres réels vérifiant (5), $\mathfrak{L}_k$, $\mathfrak{S}_k$, Λ_k définies au § 2.

Alors, pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$|\det \mathfrak{L}_k| = |\det \mathfrak{S}_k| = |\det \Lambda_k| = 1 .$$

On raisonne par récurrence. Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre k, et soit $d = |\det \mathfrak{L}_{k+1}| > 1$ et p un diviseur premier de d . On obtient une contradiction en prouvant l'existence d'un point

$$P = \frac{1}{p}(\ell_1\ P_{k+1} + \ell_2\ Q_{k+1} + \ell_3\ P_k)$$

vérifiant les conditions suivantes.

(i) $P \in \underset{\sim}{Z}^3$ et $|\psi(P)| < \psi_k$;

(ii) $\mathcal{C}(P) < \mathcal{C}(P_{k+1})$ ou $\mathcal{C}(P) < \mathcal{C}(Q_{k+1})$ et $\det(P\ ,\ P_{k+1}\ ,\ P_k) \neq 0$.

Pour obtenir (i), on exprime P_{k+1} , Q_{k+1} , P_k sur la base P_k , Q_k , P_{k-1} ; et on est ramené à résoudre dans $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ un système linéaire homogène de déterminant nul. Il admet une solution non triviale d'où l'on déduit ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 vérifiant $|\ell_i| \leqslant p/2$ et ℓ_1 ou $\ell_2 = 1$.

Ceci, dans le cas p impair (ou $p = 2$ avec l'un des ℓ_i égal à zéro) entraîne (i) puisque

$$1 + 2\,\frac{p-1}{2} = p \quad (\,0 + 1 + \frac{2}{2} \text{ respectivement}),$$

et la propriété (ii) puisque, si $\ell_2 \neq 0$,

$$\mathcal{C}(P) < \frac{1}{p^2}(|\ell_1| + |\ell_2| + |\ell_3|)^2 \max(\mathcal{C}(P_{k+1}) , \mathcal{C}(Q_{k+1}) , \mathcal{C}(P_k)) \leqslant \mathcal{C}(Q_{k+1}) ,$$

et, si $\ell_2 = 0$,

$$\mathcal{C}(P) < \frac{1}{p^2}(|\ell_1| + |\ell_3|)^2 \max(\mathcal{C}(P_{k+1}) , \mathcal{C}(P_k)) \leqslant \mathcal{C}(P_{k+1}) .$$

Il reste le cas $p = 2$ et $|\ell_1| = |\ell_2| = |\ell_3| = 1$ qui est un peu plus difficile.

Notons $R_1 = P_{k+1}$, $R_2 = Q_{k+1}$, $R_3 = Q_k$.

ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 valent ± 1 et ne sont pas tous de même signe pour obtenir (i). Notons $\varepsilon_k = -\ell_i\,\ell_j$ pour (i , j , k) décrivant les permutations de $\{1 , 2 , 3\}$. Le choix de $(\ell_1 , \ell_2 , \ell_3)$ équivaut au choix de $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3$ tels que

$$\{\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3\} = \{-1 , +1 , +1\} .$$

Notons, pour i , j , dans $\{1 , 2 , 3\}$

$$R_i = x_i V_0 + y_i V_1 + z_i V_2 , \quad R_i' = (y_i , z_i) ,$$
$$\|R_i'\|^2 = y_i^2 + z_i^2 , \quad \langle R_i' , R_j' \rangle = y_i y_j + z_i z_j .$$

On vérifie alors, en notant $\mathcal{B}$ la forme bilinéaire associée à $\mathcal{C}$, que

$$\mathcal{C}(R_i) = 9\alpha_1^2 \alpha_2^2 \|R_i'\|^2 , \quad \mathcal{B}(R_i , R_j) = 9\alpha_1^2 \alpha_2^2 \langle R_i' , R_j' \rangle .$$

D'autre part, puisque R_1 , R_3 sont des m. a. n. et, d'après l'inégalité de Schwartz, on a

$$-2\mathcal{C}(R_1) \leqslant 2\mathcal{B}(R_1 , R_3) < \mathcal{C}(R_3) = \min(\mathcal{C}(R_1) , \mathcal{C}(R_3)) ,$$
$$-2\mathcal{C}(R_2) \leqslant 2\mathcal{B}(R_2 , R_1) < \mathcal{C}(R_1) = \min(\mathcal{C}(R_2) , \mathcal{C}(R_1)) ,$$
$$-2\mathcal{C}(R_2) \leqslant 2\mathcal{B}(R_2 , R_3) < \mathcal{C}(R_3) = \min(\mathcal{C}(R_2) , \mathcal{C}(R_3)) .$$

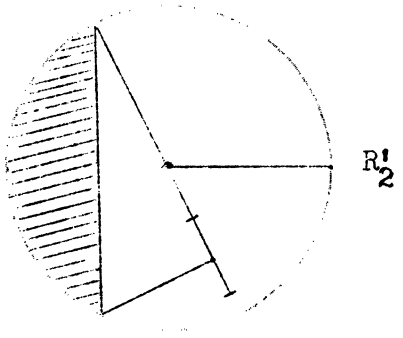
Et on cherche à majorer l'expression

$$\mathcal{C}(P) = \frac{1}{4}(\mathcal{C}(R_1) + \mathcal{C}(R_2) + \mathcal{C}(R_3) - 2\varepsilon_1\,\mathcal{B}(R_2 , R_3) - 2\varepsilon_2\,\mathcal{B}(R_3 , R_1) - 2\varepsilon_3\,\mathcal{B}(R_1 , R_2)).$$

Si l'un des $\mathcal{B}(R_i , R_j)$ est supérieur à $-\frac{1}{2}\mathcal{C}(R_2)$. Supposons, par exemple, que $2\mathcal{B}(R_2 , R_3) \geqslant -\mathcal{C}(R_2)$. Nous choisissons alors $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon$, $\epsilon_3 = -\epsilon$, avec $\epsilon = \pm 1$ tel que

$$\epsilon_2 \ \mathcal{B}(R_3 , R_1) + \epsilon_3 \ \mathcal{B}(R_1 , R_2) \geqslant 0 .$$

Alors $\mathcal{C}(P) < \frac{1}{4}(3\mathcal{C}(R_2) + \mathcal{C}(R_2) + 0) = \mathcal{C}(R_2)$. Il reste à montrer que si $2\mathcal{B}(R_1,R_2)$ et $2\mathcal{B}(R_3 , R_2)$ sont inférieurs à $-\mathcal{C}(R_2)$, alors on a $2\mathcal{B}(R_1 , R_3) \geqslant -\mathcal{C}(R_2)$. En exprimant ces propriétés sur R_i' , cela résulte de propriétés géométriques simples, R_1' et R_3' étant nécessairement dans la région hachurée, leur produit scalaire est $\geqslant -\frac{1}{2}\|R_2'\|^2$.



THÉORÈME 1. - Soient α_1 , α_2 deux nombres réels vérifiant (5), $(P_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des m. a. n. de $\Omega = (1 , \alpha_1 , \alpha_2)$, $\psi_k = P_k \Omega = \psi(P_k)$.

Pour $k \geqslant 0$, notons

$$\mathcal{L}_k = \begin{pmatrix} p_0^{(k)} & p_1^{(k)} & p_2^{(k)} \\ q_0^{(k)} & q_1^{(k)} & q_2^{(k)} \\ r_0^{(k)} & r_1^{(k)} & r_2^{(k)} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{S}_k = \begin{pmatrix} a_0^{(k)} & b_0^{(k)} & c_0^{(k)} \\ a_1^{(k)} & b_1^{(k)} & c_1^{(k)} \\ a_2^{(k)} & b_2^{(k)} & c_2^{(k)} \end{pmatrix} .$$

Alors on a

$$\psi_k \max(p_1^{(k)2} , p_2^{(k)2}) \ll 1 , \tag{9}$$

$$|b_i^{(k)} - \alpha_i b_0^{(k)}| \ |b_0^{(k)}|^{1/2} \ll 1 , \quad i = 1 , 2 , \tag{10}$$

où les constantes dans $\ll$ sont calculables en fonction de α_1 et α_2 .

Ceci est, d'après W. M. SCHMIDT [7], le meilleur degré d'approximation que l'on peut obtenir lorsque α_1 et α_2 sont algébriques.

Pour obtenir (9), il suffit d'appliquer la proposition 2 puisque, d'après (2), on a $\mathcal{C}(P_k) \geqslant \max(p_0^{(k)2} , p_1^{(k)2} , p_2^{(k)2})$ et puisque $\psi_{k-1} > \psi_k$.

Par définition de $\mathcal{L}_k$, on a

$$\begin{pmatrix} \psi_k \\ \Phi_k \\ \psi_{k-1} \end{pmatrix} = \mathfrak{L}_k \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} ,$$

et donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{S}_k \begin{pmatrix} \psi_k \\ \Phi_k \\ \psi_{k-1} \end{pmatrix} .$$

Soit, avec $\alpha_0 = 1$,

$$\alpha_i = a_i^{(k)} \psi_k + b_i^{(k)} \Phi_k + c_i^{(k)} \psi_{k-1} , \quad i = 0 , 1 , 2 .$$

Il en résulte que

$$b_2^{(k)} - \alpha_2 b_0^{(k)} = \psi_k (b_2^{(k)} a_0^{(k)} - b_0^{(k)} a_2^{(k)}) + \psi_{k-1} (b_2^{(k)} c_0^{(k)} - b_0^{(k)} c_2^{(k)}$$

$$= (\det \mathfrak{L}_k)^{-1} (- r_1^{(k)} \psi_k + p_1^{(k)} \psi_{k-1}) .$$

D'autre part, en utilisant (2) et la proposition 4, on a

$$|b_0^{(k)}| = |p_1^{(k)} r_2^{(k)} - p_2^{(k)} r_1^{(k)}| \ll C(P_k) < C(P_{k+1}) ,$$

$$\max(p_1^{(k)2} , p_2^{(k)2}) \ll C(P_{k+1}) , \quad \max(r_1^{(k)2} , r_2^{(k)2}) \ll C(P_k) < C(P_{k+1}) ,$$

et donc, d'après les propositions 2 et 4, on a

$$|b_2^{(k)} - \alpha_2 b_0^{(k)}| \, |b_0^{(k)}|^{1/2} \ll 1 ,$$

ce qui prouve (10), pour $i = 2$. On procède de même pour $i = 1$.

THÉORÈME 2. - Soient α_1 , α_2 deux nombres réels d'une extension cubique non totalement réelle vérifiant (5), et, pour $k \geqslant 0$, P_k , Q_k , ψ_k ; Φ_k , $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$ définis au § 2. Alors la suite $(\alpha_1^{(k)} , \alpha_2^{(k)})_{k \geqslant 0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

D'après les propositions 2 et 3 , on a

$$|\pi(\psi_k)| < \delta_1 \, |\psi_k| \, C(P_k) \leqslant \delta_1 \theta ,$$

$$|\pi(\Phi_k)| \leqslant \delta_1 \, |\Phi_k| \, C(Q_k) \leqslant \delta_1 \, |\psi_{k-1}| \, C(Q_k) \leqslant \delta_1 \theta^2 \delta^2 .$$

Dans ces inégalités, les constantes de droite ne dépendent que de α_1 et α_2 , et donc les Φ_k et les ψ_k ne prennent qu'un nombre fini de valeurs modulo les unités de $K = \mathbb{Q}(\alpha_1 , \alpha_2)$. Soient ζ_i , $i = 1 , \ldots , N$, une famille de représentants.

D'autre part, d'après les propositions 2 et 3 et (8), on a

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_2^{(k)} = \dfrac{\psi_{k-1}}{\psi_k} = \dfrac{\psi_{k-1}\,\mathcal{C}(P_k)}{\psi_k\,\mathcal{C}(P_k)} \leqslant \theta\delta \quad \text{et} \quad \alpha_2^{(k)} > 1 \\ \dfrac{1}{\alpha_1^{(k)}} = \dfrac{\psi_k}{\Phi_k} = \dfrac{\psi_k\,\mathcal{C}(Q_k)}{\Phi_k\,\mathcal{C}(Q_k)} \leqslant \theta^3\,\delta^2 \quad \text{et} \quad \alpha_1^{(k)} \leqslant \alpha_2^{(k)} \leqslant \theta\delta \end{cases}.$$

Soit η_0 une unité fondamentale positive de K

$$\alpha_2^{(k)} = \eta_0^{u_2}\,\frac{\zeta_i}{\zeta_j}\,, \quad \alpha_1^{(k)} = \eta_0^{u_1}\,\frac{\zeta_k}{\zeta_j}\,,$$

où i , j , k sont des fonctions de k dans $(1\ ,\ N)$ et u_1 , u_2 des entiers dépendants de k .

Les relations (11) permettent de borner les entiers u_2 et u_1 . Alors $\alpha_1^{(k)}$ et $\alpha_2^{(k)}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

4. Cas des corps cubiques purs.

THÉORÈME 3. - *Soient m un entier positif qui ne soit pas un cube, $\omega = \sqrt[3]{m}$. Le développement de $(\omega\ ,\ \omega^2)$ est périodique et fournit l'unité fondamentale de $\underset{\sim}{Z}[\omega]$.*

Dans ce cas, d'après (3), $\mathcal{C}$ vérifie une propriété de multiplicativité puisque

$$(12)\qquad \psi(P)\ \mathcal{C}(P) = \mathcal{N}(\psi(P))\ ,$$

où $\mathcal{N}$ désigne la norme de l'extension $\underset{\sim}{Q} \longrightarrow \underset{\sim}{Q}(\omega)$.

Si η est une unité de $\underset{\sim}{Z}[\omega]$ et $\psi(P) = \eta \in]0\ ,\ 1[$, alors P est une m. a. n. puisque, pour tout P' tel que $\psi' = \psi(P') < \eta$, on a

$$\mathcal{C}(P') = \frac{\mathcal{N}(\psi')}{\psi'} > \frac{1}{\eta} = \mathcal{C}(P)\ .$$

L'unité fondamentale η_0 de $\underset{\sim}{Z}[\omega]$ (dans $]0\ ,\ 1[$) est donc un élément de la suite des m. a. n.

Si $(P_k\ ,\ Q_k\ ,\ P_{k-1})$ est une base d'approximation, on déduit facilement de (12) que $(P_\ell\ ,\ Q_\ell\ ,\ P_{\ell-1})$ définie par

$$\psi(P_\ell) = \eta\psi(P_k)\ , \quad \psi(Q_\ell) = \eta\psi(Q_k)\ , \quad \psi(P_{\ell-1}) = \eta\psi(P_{k-1})$$

est une base d'approximation. Et donc tous les éléments du développement $(\Lambda_\ell\ ,\ \alpha_1^{(\ell)}\ ,\ \alpha_2^{(\ell)})$ se reproduisent à partir du rang h . (Si P tel que $\psi(P) = \eta$ est la m. a. n. de rang h .)

D'où la périodicité du développement avec une prépériode de longueur 1 .

Remarquons que ceci restreint en dimension 1 avec les fonctions ψ_1 et $\mathcal{C}_1$ définies au § 2 , et la proposition 1 prouve que le développement par l'algorithme des

fractions continues de $\alpha = \sqrt{D}$ (D entier non carré) est périodique avec une pré-période de longueur 1 .

Nous donnons dans le tableau ci-dessous la longueur ℓ de la période qui est aussi le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir l'unité fondamentale, pour $1 < m \leq 20$.

m	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ℓ	1	3	3	5	5	2	1	3	4	8	5	3	5	10	6	5	6	5

5. Quelques exemples numériques.

(a) Exemple 1.

G. SZEKERES [8] (P. 132) applique son algorithme à

$$\xi_1 = (\text{Log } \tfrac{3}{2})/\text{Log } 2 = 0,58\ldots \quad \text{et} \quad \xi_2 = (\text{Log } \tfrac{5}{4})/\text{Log } 2 = 0,32\ldots$$

et donne les approximations simultanées correspondant aux 25 premiers pas du développement de ξ_1 , ξ_2 . V. BRUN et PIPPING avaient déjà étudié cette question en liaison avec des questions musicales.

Nous donnons (table 1) les dix premiers pas de notre algorithme appliqué, pour pouvoir comparer facilement les résultats à

$$\alpha_1 = \text{Log}(\tfrac{3}{2})/\text{log}(\tfrac{5}{4}) = 1,8170595 ,$$
$$\alpha_2 = \text{Log } 2/\text{Log}(\tfrac{5}{4}) = 3,1062837 ,$$

Toutes les approximations simultanées (tirées de $\mathcal{S}_k$) sont incluses dans la liste sortie après 2 pas par G. SZEKERES (à l'exeeption de 11 , 20 , 34 que nous sortons à la place de 11 , 21 , 34). Cet algorithme semble donc donner une convergence plus rapide.

(b) Exemple 2.

T. W. CUSIK [3] a étudié le développement par l'algorithme de G. Szekeres dans le cas particulier $\xi_1 = \theta^2 - 1$, $\xi_2 = \theta - 1$, où θ ($= 2\cos(2\pi/7)$) est la racine positive de $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

Soit $\theta = 2\cos(2\pi/7) = 1,24697960$, $\theta' = -0,44504186$ un conjugué de θ et $\varphi = (\theta')^{-1}$. θ , φ est un système fondamental d'unités pour $\underset{\sim}{Q}(\theta)$. Partant de ces résultats antérieurs sur les approximations diophantiennes d'une forme linéaire basés sur la connaissance des unités, T.W. CUSICK montre que les nombres γ_{nj} (forme linéaire en $1, \xi_1, \xi_2$) déterminées par l'algorithme de Szekeres appliqué à ξ_1 , ξ_2 sont toutes des unités de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$ et contiennent toutes les meilleures approximations de 0 par la forme linéaire $x_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2$ (au sens M2). Il prouve aussi la conjecture de G. Szekeres, concernant la "presque périodicité" [8], sur cet exemple précis.

Les dix premiers pas de l'algorithme des m. a. n. appliqué à $\alpha_1 = \theta$, $\alpha_2^2 = \theta^2$ ne donne, lui aussi, que des unités de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$. Nous les exprimons en fonction de θ et de $\eta = -\theta' = 0{,}4450\ldots$

k	1	2	3	4	5	6
ψ_k	$\theta\eta^2$	$\theta^2\eta^4$	$\theta\eta^4$	$\theta^2\eta^6$	$\theta^3\eta^8$	$\theta^2\eta^8$
Φ_k	$\theta\eta$	η^2	$\theta^2\eta^5$	$\theta^2\eta^5$	$\theta\eta^6$	$\theta^3\eta^9$
$\alpha_1^{(k)}$	η^{-1}	$\theta^{-2}\eta^{-2}$	$\theta\eta$	η^{-1}	$\theta^{-2}\eta^{-2}$	$\theta\eta$
$\alpha_2^{(k)}$	$\theta^{-1}\eta^{-2}$	$\theta^{-1}\eta^{-2}$	θ	$\theta^{-1}\eta^{-2}$	$\theta^{-1}\eta^{-2}$	θ

et $\Lambda_4 = \Lambda_1$, $\Lambda_5 = \Lambda_2$, $\Lambda_6 = \Lambda_3$ mais $\Lambda_7 \neq \Lambda_1$.

On semble obtenir un début de période, mais au rang 7 une petite perturbation se produit. Du fait de l'approximation obtenue (théorème 1) et puisque $\theta \longrightarrow \underset{\sim}{Q}(\theta)$ est totalement réelle, le développement ne peut pas être périodique. Le plus surprenant est que l'équation caractéristique de ce "début de période", c'est-à-dire $\det(\Lambda_3\,\Lambda_2\,\Lambda_1 - XI) = 0$ a ses racines dans $\underset{\sim}{Q}(\theta)$.

(c) Exemple 3.

Soit α la racine réelle de $X^3 - X^2 - 1 = 0$. Le développement de $(\alpha\ ,\ \alpha^2)$ est (pour $k \leqslant 72$) purement périodique avec une période de longueur 13 et de plus les ψ_k et Φ_k sont des puissances de $\theta = \alpha^2 - \alpha = \alpha^{-1}$. Le triplet $(\psi_k\ ,\ \Phi_k\ ,\ \psi_{k-1})$ ne prend que des valeurs $(\theta^n\ ,\ \theta^{n-1}\ ,\ \theta^{n-2})$ ou $(\theta^n\ ,\ \theta^{n+1}\ ,\ \theta^{n-1})$.

(d) Exemple 4 (famille de développements périodiques). - Pour l'algorithme de Szekeres, le seul exemple de développement périodique connu est le cas du développement de $(\alpha\ ,\ \alpha^2)$, où α est racine de $X^3 - X - 1 = 0$. Les dix premiers pas de l'algorithme des m. a. n. appliqué à $(\alpha\ ,\ \alpha^2)$ semble indiquer une période de longueur 4 .

C'est seulement dans les corps cubiques purs que nous savons, pour l'instant, démontrer la périodicité d'un développement. Nous obtenons (théorème 3) beaucoup plus que l'algorithme de Jacobi-Perron où pendant de nombreuses années, beaucoup d'efforts ont été faits pour trouver quelques familles de développements périodiques. Dans ce sens, le 1er résultat que nous obtenons est le suivant. Si m est un entier positif distinct d'un cube , $\omega = m^{1/3}$, le développement par l'algorithme des m. a. n. de $(\omega\ ,\ \omega^2)$ est périodique avec une période de longueur 1 si, et seulement si, $m = D^3 + 1$, où D est un entier positif. Il suffit pour cela de démontrer que $\psi_1 = \omega - [\omega]$ et d'utiliser $N(\psi_1) = \pm 1$.

Table 1 : $\alpha_1 = 1.81705949$, $\alpha_2 = 3.10628372$.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k = \\ \Phi_k = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\psi_k) \\ c(\Phi_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(k)} & b_0^{(k)} & c_0^{(k)} \\ a_1^{(k)} & b_1^{(k)} & c_1^{(k)} \\ a_2^{(k)} & b_2^{(k)} & c_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}} & \frac{b_1^{(k)}}{b_0^{(k)}} & \frac{c_1^{(k)}}{c_0^{(k)}} \\ \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}} & \frac{b_2^{(k)}}{b_0^{(k)}} & \frac{c_2^{(k)}}{c_0^{(k)}} \end{bmatrix}$$

Au rang $k = 0$, $\Lambda_0 = I$; $\psi_0 = 1$, $\Phi_0 = \alpha_1$, $\psi_{-1} = \alpha_2$, $\mathcal{L}_0 = I$.

Rang $k = 1$.

-1	1	0	-1	0	0	0.87	0.61D1	0	0	1			
-1	-1	1	-1	-1	1	0.28	0.20D2	1	0	1			1.
1	0	0	1	0	0			1	1	2			2.

Rang $k = 2$.

-1	0	1	2	-1	0	0.18	0.10D2	1	0	1			
0	1	0	-1	-1	1	0.28	0.20D2	1	0	2	1.		2.
1	0	0	-1	1	0			2	1	3	2.		3.

Rang $k = 3$.

-1	1	0	-3	0	1	0.10	0.28D2	1	1	4			
-2	-1	1	-4	4	-1	0.16	0.12D3	2	2	7	2.	2.	1.75
1	0	0	2	-1	0			4	3	12	4.	3.	3.

Rang $k = 4$.

-1	0	1	5	-1	-1	0.76D-1	0.57D2	4	1	6			
-1	1	0	-1	4	-2	0.55D-1	0.14D3	7	2	11	1.75	2.	1.833
1	0	0	-3	0	1			12	3	19	3.	3.	3.166

Rang $k = 5$.

0	1	0	-1	4	-2	0.55D-1	0.14D3	1	6	10			
-1	0	1	-8	1	2	0.29D-1	0.16D3	2	11	18	2.	1.833	1.800
1	0	0	5	-1	-1			3	19	31	3.	3.166	3.100

Rang $k = 6$.

0	1	0	-8	1	2	0.29D-1	0.16D3	6	10	11			
-1	0	1	6	-5	1	0.21D-1	0.19D3	11	18	20	1.833	1.800	1.818
1	0	0	-1	4	-2			19	31	34	3.166	3.100	3.091

Rang $k = 6$.

0	1	0	-8	1	2	0.29D-1	0.16D3	6	10	11			
-1	0	1	6	-5	1	0.21D-1	0.19D3	11	18	20	1.833	1.800	1.818
1	0	0	-1	4	-2			19	31	34	3.166	3.100	3.091

Rang $k = 7$.

0	1	0	6	-5	1	0.21D-1	0.19D3	10	11	17			
-1	0	1	7	3	-4	0.26D-1	0.34D3	18	20	31	1.800	1.818	1.823
1	0	0	-8	1	2			31	34	53	3.100	3.091	3.117

Rang $k = 8$.

-1	0	1	-14	6	1	0.86D-2	0.48D3	17	11	38			
-1	1	0	1	8	-5	0.51D-2	0.68D3	31	20	69	1.823	1.818	1.816
1	0	0	6	-5	1			53	34	118	3.117	3.091	3.105

Rang $k = 9$.

0	1	0	1	8	-5	0.51D-2	0.68D3	49	38	55			
-1	-1	1	19	-19	5	0.75D-2	0.27D4	89	69	100	1.816	1.815	1.818
1	0	0	-14	0	1			152	118	171	3.102	3.105	3.109

Rang $k = 10$.

-1	0	1	-15	-2	6	0.35D-2	0.87D3	93	38	104			
1	1	-1	34	-17	-1	0.37D-2	0.31D4	169	69	189	1.817	1.816	1.817
1	0	0	1	8	-5			289	118	323	3.107	3.105	3.105

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (L.). - The Jacobin-Perron algorithm. Its theory and applications. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 207).

[2] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to the geometry of numbers. - Berlin, Springer-Verlag, 1959 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 99).

[3] CUSIK (T. W.). - The Szekeres multidimensional continued fraction, Math. of comp., t. 31, 1977, p. 280-317.

[4] DUBOIS (E.) et PAYSANT-LE ROUX (R.). - Algorithme de Jacobi-Perron dans les extensions cubiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 183-186.

[5] MINKOWSKI (H.). - Zur Theorie der Kettenbrücke, Ann. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 13, 1896, p. 41-60 ; Gesammelte Abhandlungen, vol. 1, p. 278-292. - Leipzig, Teubner, 1911.

[6] PERRON (O.). - Grundlägen für eine Theorie des jacobischen Kettenburchalgorithm, Math. Annalen, t. 64, 1907, p. 1-76.

[7] SCHMIDT (W. M.). - On simultaneous approximation of two algebraic numbers by rationals, Acta Math., Uppsala, t. 119, 1967, p. 27-50.

[8] SZEKERES (G.). - Multidimensional continued fractions, Ann. Univ. Sc. Budapest Eötvos Sect. Math., t. 13, 1970, p. 113-140.