

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

FAOUZIA LAZAMI

**Sur les éléments de  $S \cap [1, 2[$**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 20, n° 1 (1978-1979),  
exp. n° 3, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1978-1979\\_\\_20\\_1\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A2_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉLÉMENTS DE  $S \cap [1, 2[$   
 par Faouzia LAZMI (\*)

Résumé. - Connaissant les éléments de  $S' \cap [1, 2[$ , nous allons montrer qu'il est possible de déterminer les éléments de  $S \cap [1, 2 - \lambda[$ , pour tout réel  $\lambda$  de  $]0, 1[$ . Plus précisément, nous montrerons que tous les éléments (à l'exception peut-être d'un nombre fini d'entre eux) de  $S \cap [1, 2 - \lambda[$  sont zéros d'un polynôme du type  $A \pm z^t P$ , où  $A/P$  est associée à un élément de  $S' \cap [1, 2[$ .

Introduction. - Soient  $S$  l'ensemble des nombres de Pisot et  $\lambda$  un réel de  $]0, 1[$ . Si  $S'$  est l'ensemble dérivé de  $S$ , et  $Q$  est le polynôme réciproque du polynôme minimal associé à un élément  $\theta$  de  $S'$  ( $Q(0) = 1$ ), on sait qu'il existe  $A \in \mathbb{Z}[z]$  vérifiant

$$|A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{sur } |z| = 1,$$

avec l'égalité en un nombre fini de points.

Nous dirons que  $A/Q$  est associée à  $\theta$ .

Dans [1], les éléments de  $S' \cap [1, 2[$ , ainsi que les fractions  $A/Q$  qui leur sont associées, ont été déterminés.

Définition. - Si  $A/Q$  est associée à un  $\theta \in S'$ , et si

$$P(z) = \epsilon z^s Q\left(\frac{1}{z}\right), \quad B(z) = \epsilon' z^h A\left(\frac{1}{z}\right)$$

( $s = d^\circ Q$ ,  $h = d^\circ A$ ,  $|\epsilon| = |\epsilon'| = 1$  choisis tels que  $P(0)$  et  $B(0)$  positifs).

On définit le polynôme  $D$  par

$$z^t D(z) = PQ - \epsilon \epsilon' z^{s-h} AB, \quad \text{avec } D(0) \neq 0.$$

Nous aurons besoin de certaines propriétés des polynômes  $D$  associés aux éléments de  $S' \cap [1, 2[$ .

Remarque. - Si  $A/Q$  est associée à un  $\theta \in S' \cap [1, 2[$ , alors on a

-  $D(0) = 1$  ;

- Si  $\frac{A}{Q} \neq \frac{A_n}{Q_n} = \frac{(1-z)(1+z^n)}{1-2z+z^n(1-z)}$ , alors  $D$  a tous ses zéros sur  $|z| = 1$  ;

- Si  $\frac{A}{Q} = \frac{A_n}{Q_n}$ , alors  $D_n(z) = (1-z+z^n)(1-z^{n-1}+z^n)$ .

1. Quelques propriétés des polynômes  $D_n$ .

Soient  $\alpha_{i_n}$  les zéros de  $D_n$ , alors on a la proposition suivante.

(\*) Texte reçu le 24 janvier 1979.

PROPOSITION 1. - Pour tout  $n \geq 2$ , soit  $p_n = \prod_{|\alpha_{i_n}| > 1} |\alpha_{i_n}|$ , alors  $p_n < 2$ .

La démonstration complète de ce résultat est due à D. BOYD [2].

Définition. - Nous dirons que  $U \in \mathbb{Z}[z]$  vérifie la propriété (P) s'il existe  $V \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $V \neq 0$ , tel que

$$|V(z)| \leq |U(z)| \quad \text{sur } |z| = 1,$$

avec l'égalité en un nombre fini de points.

PROPOSITION 2. - Si  $D_n$  vérifie la propriété (P), alors le polynôme  $E_n$  associé est tel que  $d^\circ E_n \geq 2n - 2$  et réalise une des égalités suivantes :

$$E_n(z) = \begin{cases} (1 - z^{n-1})(1 + z^n)U(z), & \text{si } n = 2p \\ (1 - z^{n-1})\frac{(1 + z^n)}{(1 + z)}U(z), & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases},$$

ou

$$S_n(z) = \begin{cases} (1 - z^{n-1})^2 (1 + z^n)^2 K(z), & \text{si } n = 2p \\ (1 - z^{n-1})^2 \left(\frac{1 + z^n}{1 + z}\right)^2 K(z), & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases},$$

avec  $z^k S_n(z) = D_n^2 - e^h z^{2n-h} E_n \tilde{E}_n$ ,  $h = d^\circ E_n$  et  $\tilde{E}_n$  le réciproque de  $E_n$ .

La démonstration de cette proposition découle du fait que, si  $\alpha_i$  sont les zéros de  $1 - z^{n-1}$  et  $\beta_i$  ceux de  $1 + z^n$ , et si

$$|E_n(z)| \leq |1 - z + z^n|^2 \quad \text{sur } |z| = 1,$$

alors on a

$$|E_n(\alpha_i)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |E_n(\beta_i)| \leq 1,$$

et par suite

$$\prod_{i=1}^{n-1} |E_n(\alpha_i)| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n |E_n(\beta_i)| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

On montre ensuite que, si  $\alpha_{i_0}$  est zéro de  $E_n$ , il en est de même pour tous les  $\alpha_i$  et les  $\beta_j$ .

Pour une démonstration complète, voir [6].

LEMME. - Soient  $U \in \mathbb{Z}[z]$  et  $\tilde{U}$  son polynôme réciproque. Supposons que  $\tilde{U}(0) = 1$  et que  $\alpha = \prod_{|\alpha_i| > 1} |\alpha_i| < 2$ , où les  $\alpha_i$  sont les zéros de  $U$ . Alors, il n'existe pas de polynômes  $V \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $V \neq 0$ , tel que  $d^\circ V > d^\circ U$  et

$$|V(z)| \leq |U(z)| \quad \text{sur } |z| = 1,$$

avec l'égalité en un nombre fini de points (Propriété (i)).

Démonstration. - Supposons l'existence de  $V$  vérifiant (i) et tel que  $d^\circ V > d^\circ U$ .  
On a

$$|U|^2 = |S_1| + |V|^2 \quad \text{sur } |z| = 1,$$

où

$$S_1(z) = \tilde{V} - \epsilon_1 \epsilon_1' z^{v-u} U\tilde{U}$$

et

$$|U|^4 = 4|V|^2 |S_1| + [ |U|^2 - 2|V|^2 ]^2 = |S_2| + |L_2|^2 \quad (\text{sur } |z| = 1)$$

avec  $L_2 = 2\tilde{V} - \epsilon_1 \epsilon_1' z^{v-u} U\tilde{U}$  et  $S_2 = 4V^2 S_1$ . Nous avons  $L_2(0) = 2$ ,  $S_2(0) = 4$  et  $d^\circ L_2 > d^\circ U^2$ . Par récurrence, on montre que

$$|U|^{2^p} = |S_p| + |L_p|^2 \quad \text{sur } |z| = 1,$$

avec  $S_p(0) = 2^{2^p} - 2 = L_p^2(0)$ .

Considérons  $f = S_p/U^{2^{p-1}}$  et  $f' = L_p^2/U^{2^p}$ . Comme conséquences de l'identité de Jensen et de la convexité de la fonction exponentielle, nous avons l'inégalité suivante

$$1 \geq \frac{|S_p(0)|}{\alpha^{2^p}} \rho_p + \frac{L_p^2(0)}{\alpha^{2^p}} \rho_p^2,$$

où  $\rho_p^{-1}$  et  $\rho_p'^{-1}$  sont respectivement le produit des zéros de  $S_p$  et  $L_p$  intérieurs au disque unité.

Par la suite, nous aurons

$$\alpha^{2^p} \geq 2^{2^p-2} + 2^{2^p-2} = 2^{2^p-1}, \quad \forall p \geq 2,$$

et cette inégalité est absurde pour  $p$  assez grand.

**THÉOREME.** - Si  $D$  est associé à un élément  $\theta \in S' \cap (1, 2[$ , alors  $D$  ne vérifie pas la propriété (P).

Le résultat est immédiat si  $D \neq D_n$ , si  $D = D_n$ , compte tenu de ce qui précède, on montre que  $D_n$  ne vérifie pas la propriété (P) (pour tout  $n \geq 2$ ). Voir [6].

## 2. Définition et propriétés des familles $\rho_\lambda$ .

**Définition.** - Pour  $0 < \lambda < 1$ ,  $\rho_\lambda$  est l'ensemble des polynômes  $U \in \mathbb{Z}[z]$  tels que

-  $U(0) = 1$  ;

-  $U$  n'a qu'un seul zéro  $\frac{1}{\theta}$  dans  $|z| \leq 1$ , et  $1 < \theta \leq 2 - \lambda$ .

**THÉOREME.** - De toute suite infinie d'éléments de  $\rho_\lambda$ , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément dans tout compact de  $|z| < \frac{1}{2}$  vers une fraction rationnelle.

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurions besoin d'étudier certaines familles de fractions rationnelles.

Notations. - Si  $Q_\nu$  est une suite infinie d'éléments de  $\mathbb{P}^\lambda$ , soit  $P_\nu$  le polynôme réciproque de  $Q_\nu$ . Nous savons, alors, que  $(P_\nu/Q_\nu)^\lambda \rightarrow (L/Q)$ ,  $L/Q$  est associée à un élément de  $S' \cap (1, 2[$ . D'autre part,

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{L}{Q} + z^{\lambda(\nu)} \frac{K_\nu}{QQ_\nu},$$

avec  $\lambda(\nu) \rightarrow \infty$  quand  $\nu \rightarrow \infty$ .

Soit  $H_\nu$  le polynôme réciproque de  $K_\nu$ .

$z^k H_\nu = PQ_\nu - \epsilon \epsilon' z^{s-h} BP_\nu$ , et on a alors le résultat suivant.

PROPOSITION. - La famille  $K_\nu/H_\nu$  est une famille compacte de fractions rationnelles. De plus, pour  $\nu \geq \nu_0$ ,  $(K_\nu/H_\nu) = (K/H)$  de rang fini.

Démonstration. -  $|K_\nu/H_\nu| = 1$  sur  $|z| = 1$ . De plus, si  $H_\nu(z) = C_{0\nu} + C_{1\nu}z + \dots$ , et si  $\alpha_j^\nu$  sont les zéros de  $H_\nu$  situés dans  $0 < |z| \leq 1$ , pour  $1 \leq j \leq r$ , en appliquant l'identité de Jensen, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log} |H_\nu(e^{it})| dt = \text{Log} |C_{0\nu}| - \sum_{j=1}^r \text{Log} |\alpha_j^\nu|$$

or  $|H_\nu(e^{it})| \leq 2|PQ_\nu(e^{it})|$ , d'où  $\text{Log} |C_{0\nu}| - \sum_{j=1}^r \text{Log} |\alpha_j^\nu| \leq 4 \text{Log} 2$  ce qui donne

1°  $\pi |\alpha_j^\nu| > \frac{1}{16}$  (donc les zéros de  $H_\nu$  dans  $|z| < 1$  sont dans une couronne fixe).

2°  $|C_{0\nu}| < 16$ . On peut donc supposer que  $C_{0\nu} = q$ , en fait on peut montrer que  $|H_\nu(0)| = 1$ .

Donc  $K_\nu/H_\nu$  est une famille compacte, et par suite

$$\frac{K_\nu}{H_\nu} \rightarrow \frac{K}{H} \text{ avec } |H(0)| = 1.$$

Montrons que  $|K| = |H|$  sur  $|z| = 1$ .

$$\frac{K_\nu}{Q_\nu} = \frac{K_\nu}{H_\nu} \frac{H_\nu}{Q_\nu} \rightarrow \frac{K}{H} \frac{D}{Q}.$$

Comme  $|H(0)| = 1$  et que  $Q_\nu$  n'a qu'un seul zéro dans  $|z| < 1$ , nécessairement on a soit  $H$  divise  $D$ , soit tous les zéros de  $H$  sont sur  $|z| = 1$ . Si  $H$  divise  $D$  et  $\frac{K}{H}$  de rang infini, on aurait  $D$  vérifie la propriété (P), ce qui est faux.

Donc on a soit  $\frac{K}{H} = \delta$  avec  $\delta \neq 1$ , soit

$$\frac{K}{H} = \begin{cases} \delta \frac{1 - z + z^n}{1 - z^{n-1} + z^n} \\ \text{ou} \\ \delta \frac{1 - z^{n-1} + z^n}{1 - z + z^n} \end{cases}$$

Démonstration du théorème. - De l'égalité  $(K/H) = (K/H)$ , on tire

$$\begin{cases} W_\nu Q_\nu = QH + z^{\lambda_\nu - k + s - h} & \text{ee' BK} \\ W_\nu P_\nu = \Lambda H + z^{\lambda_\nu - k} & \text{PK} \end{cases},$$

avec  $W_\nu$  un diviseur de  $D$ . On peut donc supposer que  $W_\nu = W$ . Par suite, si  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $Q_\nu \rightarrow (QH/W)$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

Comme corollaire du théorème, nous allons avoir les polynômes minimaux associés aux éléments de  $S \cap (1, 2 - \lambda)$ . Pour  $\alpha \in S \cap (1, 2 - \lambda)$ , soit  $U$  le polynôme minimal de  $\alpha$ .

THÉOREME. - Les éléments  $\alpha \in S \cap (1, 2 - \lambda)$ , sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, sont tels que

$$U = \frac{\Lambda + \delta z^t P}{W},$$

où  $t$  est un entier positif,  $\Lambda/Q$  une fraction rationnelle associée à un élément de  $S' \cap (1, 2[$ ,  $\delta = \pm 1$  et  $W$  un diviseur du polynôme  $D$  associé à  $\Lambda/Q$ .

Démonstration. - De tout sous-ensemble infini de  $S \cap (1, 2 - \lambda)$ , on peut extraire une suite  $\alpha_\nu$  telle que

$$U_\nu = \frac{\Lambda H + z^{\lambda_\nu - k} PK}{W}.$$

Si  $(\Lambda/Q) \neq (\Lambda_\nu/Q_\nu)$ , alors  $\frac{K}{H} = \delta$  et on a

$$U_\nu = \frac{\Lambda + \delta z^{\lambda_\nu - k} P}{W}.$$

Si  $(\Lambda/Q) = (\Lambda_\nu/Q_\nu)$  alors

$$\frac{K}{H} = \begin{cases} \delta \frac{1 - z + z^n}{1 - z^{n-1} + z^n} \\ \text{ou} \\ \delta \frac{1 - z^{n-1} + z^n}{1 - z + z^n} \\ \text{ou} \\ \delta \end{cases}.$$

Dans le 1er cas, nous aurons alors

$$(ii) \quad U_\nu = \frac{\Lambda(1 - z^{n-1} + z^n) + \delta z^{\lambda_\nu - k} P(1 - z + z^n)}{W}.$$

Compte tenu d'un résultat bien connu, à savoir que les polynômes  $1 - z + z^n$  divisés par leurs facteurs cyclotomiques sont irréductibles, on aura  $W = 1$  ou éventuellement  $W = 1 - z + z^2$  (si  $n = 2 \pmod{6}$ ).

En appliquant le théorème de Rouché au polynôme réciproque du numérateur du second membre de (ii), on montre que ce second membre admet "beaucoup" de zéros dans

$|z| \geq 1$  et ne peut donc pas définir un élément de  $S$ .

Le 2<sup>e</sup> cas se traite de la même façon. Par suite, nous aurons dans tous les cas :

$$\frac{K}{H} = \pm 1 = \delta \quad \text{et} \quad U_{\nu} = \frac{A + \delta z^{\nu} P}{W}.$$

Pour finir, remarquons que, réciproquement, pour tout  $A/Q$  associée à un élément de  $S \cap (1, 2[$ , on peut déterminer les conditions sur  $\delta$  et  $p$  pour que  $Q + \delta z^p B$  admette un seul zéro  $\frac{1}{\alpha}$  dans  $|z| < 1$  et tel que  $1 < \alpha < 2$ , ce qui permet d'avoir la liste des polynômes (à l'exception peut-être d'un nombre fini d'entre eux) admettant comme seul zéro dans  $|z| > 1$  un élément de  $S \cap (1, 2 - \lambda)$  pour tout  $0 < \lambda < 1$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMARA (M.). - Ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3<sup>e</sup> série, t. 83, 1966, p. 215-270.
- [2] BOYD (D.). - Pisot numbers and the width of meromorphic functions (à paraître).
- [3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3<sup>e</sup> série, t. 70, 1953, p. 105-133.
- [4] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3<sup>e</sup> série, t. 81, 1964, p. 165-188.
- [5] SALEM (R.). - A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.
- [6] TALMOUDI (F.). - Familles particulières de polynômes de  $\mathbb{Z}[z]$ , Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Tunis, 1975.
- [7] TALMOUDI (F.). - Sur les nombres de  $S \cap (1, 2[$ , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 285, 1977, Série A, p. 969-971.
- [8] TALMOUDI (F. LAZAMI). - Sur les nombres de  $S \cap (1, 2[$ , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287, 1978, Série A, p. 739-741.