Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

GUY HENNIART

Comptage de représentations de groupes de Galois locaux

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 17, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 17, 6 p.

26 février 1979

COMPTAGE DE REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE GALOIS LOCAUX

par Guy HENNIART (*)
[Université Paris-Sud, Orsay]

Résumé. - Soit F un corps local non archimédien, à corps résiduel fini, de caractéristique p. Son groupe de Galois absolu G_F n'a de représentations primitives que quand leur degré est une puissance de p. Nous exposons ici les résultats de E. W. ZINK sur les représentations projectives de degré p : il compte, à conducteur minimal donné, le nombre de telles représentations primitives. Nous examinons les conséquences de ce calcul pour les conjectures de Langlands.

Abstract. - Let F be a non-archimedean local field, whose residue field is finite and has characteristic p. Its absolute Galois group G_F has primitive representations only when their degree is a power of p. We present here results due to E. W. ZINK on such projective representations of degree p : he counts their number when the minimal conductor is given. We then look at some consequences of this computation concerning conjectures due to Langlands.

1. Introduction.

Un des buts principaux de l'arithmétique est la connaissance du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$, dit groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$. Plus modestement, notre but est d'étudier les groupes de Galois absolus $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, quand p parcourt l'ensemble des nombres premiers. Il n'est pas plus difficile, et d'ailleurs aussi indispensable, d'étudier plus généralement le groupe $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, où F est un corps local non archimédien quelconque, à corps résiduel fini. Plus brièvement, nous appellerons un tel corps un corps local, et nous noterons p sa caractéristique résiduelle.

Un des moyens d'étudier G_F est d'examiner ses représentations (pour nous, représentation signifiera toujours représentation continue de dimension finie). Comme G_F est un groupe profini, une telle représentation $\rho : G_F \to GL(V)$, où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, se factorisera par un quotient fini.

Le cas où V est de dimension 1 est bien connu : c'est la théorie du corps de classes local. Pour étudier le cas général, il nous faut faire appel à la notion d'induction. Soit donc une extension finie K de F. Le groupe G_K est alors canoniquement un sous-groupe fermé d'indice fini de G_F, et si $\rho : G_K \to GL(V)$ est une représentation de G_K, l'on peut considérer son induite à G_F, notée $\mathrm{Ind}_K^F(\rho)$: on fait agir G_F par translation à droite sur les fonctions continues de G_F dans V qui se transforment, par translation à gauche d'éléments de G_K, selon la représentation ρ.

(*) Texte reçu le 1er octobre 1979
Guy HENNIART, Att. Rech. CNRS, 11 rue Ruhmkorff, 75017 PARIS.

Parmi les representations de G_F , on peut donc distinguer les représentations induites, i. e. induites par une représentation du groupe de Galois d'une extension finie K de F distincte de F , et celles qui ne le sont pas. Si l'on parle uniquement de représentations irréductibles, ce qui est loisible, nous utiliserons les termes imprimitives et primitives respectivement.

Deux faits essentiels nous permettent d'avancer dans la classification des représentations de G_F . Le premier, presque évident, est qu'une représentation irréductible de G_F est, soit primitive, soit induite d'une représentation primitive du groupe de Galois G_K d'une extension finie non triviale de F . Le second, dû à H. KOCH [Ko], est que toute représentation primitive de G_F est de degré une puissance de p . En particulier, les représentations irréductibles de G_F dont le degré n'est pas divisible par p sont induites de caractères d'un groupe G_K , et l'on est ramené en ce cas à la théorie du corps de classes local.

On possède en fait de nombreux renseignements plus précis sur les représentations primitives. Il nous faut pour cela parler de représentations projectives de G_F : il s'agit tout simplement de représentations continues de G_F dans le groupe projectif $PGL(V)$ associé à un espace vectoriel V de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$. Si $R : G_F \to GL(V)$ est une représentation (linéaire), on peut composer avec la projection π_V de $GL(V)$ sur $PGL(V)$ pour obtenir une représentation projective $r = \pi_V \circ R$. On dit que R est un relèvement de r ; les autres relèvements de r sont les tordues de R par les représentations de degré 1 de G_F . On démontre que toute représentation projective de G_F possède un relèvement. Les propriétés d'irréductibilité et de primitivité passent aux représentations projectives.

On possède alors, grâce à H. KOCH [Ko], une classification des représentations projectives primitives de G_F . Cette classification est particulièrement simple quand le degré des représentations considérées est p . Un fait important est que, si F est de caractéristique nulle, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations projectives primitives de degré donné.

Ce n'est plus vrai si F est de caractéristique p . Néanmoins, dans tous les cas, à une représentation projective quelconque r de G_F , on associe son exposant $a(r)$ qui est le minimum des exposants $a(R)$ des conducteurs d'Artin des relèvements R de r . On montre alors que, même si F est de caractéristique non nulle, il n'y a qu'un nombre fini de représentations projectives primitives de G_F , de degré et exposant donnés.

E.-W. ZINK [Zi] calcule, quand F est un corps local de caractéristique nulle, le nombre de représentations projectives primitives de G_F , de degré p (la caractéristique résiduelle) et d'exposant fixé. Le choix du degré p est imposé par deux considérations. La première, nous l'avons dit, est que la classification de Koch est plus simple dans ce cas. La seconde, plus importante, est que l'on peut, dans ce cas, calculer l'exposant $a(r)$ grâce à la structure de r [Bu], ce qui est encore impossible dans le cas général.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons les résultats de ZINK. Pour les démonstrations, nous renvoyons à [Zi]. Dans le dernier paragraphe enfin, nous formulons une conjecture, qui sera vérifiée sous peu [He], et qui est un cas très particulier des conjectures de Langlands.

2. Les résultats de ZINK.

On suppose pour l'instant, ainsi que le fait ZINK, que F est de caractéristique nulle, et l'on s'intéresse aux représentations projectives primitives $r : G_F \to PGL_p(\mathbb{C})$ de degré p. Le premier résultat de ZINK décrit les exposants possibles pour de telles représentations : notons e_F l'indice de ramification de F sur $\mathbb{Q}_p$, et i_t le t-ième nombre entier premier à p ; alors les exposants possibles sont les nombres $a_t = p + i_t$ où t parcourt les entiers de 1 à $(p+1)e_F$.

Appelons donc $Pr(s)$ le nombre de (classes d'isomorphisme de) représentations projectives primitives de degré p de G_F, d'exposant $a_s = p + i_s$. On considère alors des vecteurs $\underset{\sim}{x}^t$, pour chaque entier naturel t, de longueur $e = p + 1$ et de composantes appartenant à $\{x_0 , x_1 , x_2\}$. Ils sont définis de la façon suivante :

(a) pour $p = 2$, on pose $\underset{\sim}{x}^t = (x_0 , x_2 , x_1)$ pour tout t.

(b) pour p impair, on impose $\underset{\sim}{x}^t = \underset{\sim}{x}^r$ si t et r sont congrus modulo$(p-1)/2$. Il reste donc à définir $\underset{\sim}{x}^t$ pour t compris entre 0 et $(p-3)/2$ inclus. On pose alors $t' = ((p-3)/2) - t$. Le vecteur $\underset{\sim}{x}^t$ a alors pour composantes, dans l'ordre, $(t'+1)$ fois la lettre x_0, une fois la lettre x_2, t' fois la lettre x_1, t fois la lettre x_0, une fois la lettre x_2, $t+1$ fois la lettre x_1 :

$$\underset{\sim}{x}^t = (x_0,\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{t'},x_2,\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{t'},\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{t},x_2,\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{t},x_1) .$$

On peut alors exprimer de façon commode (sic) le principal résultat de ZINK. Le cardinal du corps résiduel de F est noté q.

THÉORÈME. – <u>On a l'égalité de vecteurs</u>

$$(Pr(te+1) , \dots , Pr((t+1)e)) = q^{2t} \underset{\sim}{x}^t$$

<u>pour chaque entier</u> t <u>variant de</u> 0 <u>à</u> $e_F - 1$, <u>pourvu que l'on donne aux lettres</u>

x_0 , x_1 , x_2 les valeurs suivantes :

$$x_0 = q - 1$$
$$x_1 = q(q - 1)$$
$$x_2 = \frac{p-1}{2}.\frac{q^2-1}{p+1} \quad \text{si } p \text{ est impair}$$
$$x_2 = \frac{4}{3}(q^2 - 1) \quad \text{si } p \text{ vaut } 2 .$$

Remarquons que, si p vaut 2 , ces résultats étaient déjà connus de TUNNELL [Tu].

Avant quelques remarques sur ce résultat, donnons deux corollaires plus suggestifs.

COROLLAIRE 1. - Quand t varie de 0 à $e_F - 1$, on a

$$\sum_{s=te+1}^{(t+1)e} \Pr(s) = \left(\frac{p+1}{2} - \frac{2}{p+1}\right)q^{2t}(q^2 - 1) \quad \text{si } p \text{ est impair,}$$
$$= \frac{4}{3}\, q^{2t}(q^2 - 1) \quad \text{si } p \text{ vaut } 2 .$$

COROLLAIRE 2. - On a

$$\sum_{s=1}^{(p+1)e_F} \Pr(s) = \left(\frac{p+1}{2} - \frac{2}{p+1}\right)(p^{2[F:\mathbb{Q}_p]} - 1) \quad \text{si } p \text{ est impair,}$$
$$= \frac{4}{3}(p^{2[F:\mathbb{Q}_p]} - 1) \quad \text{si } p \text{ vaut } 2 .$$

Remarquons que ce corollaire est dû à A. WEIL [We] dans le cas où p est pair.

Que se passe-t-il donc si F est de caractéristique p ? Ce cas n'est pas traité dans [Zi], mais on peut facilement adapter les méthodes de cet article : les exposants possibles sont alors les entiers $a_t = p + i_t$ où t parcourt les entiers positifs. Le corollaire 1 et le théorème restent valables pour tout entier naturel t , mais le corollaire 2 est faux, puisqu'il y a alors une infinité de représentations de G_F , projectives primitives et de degré p . Cela rend d'ailleurs le théorème plus intéressant : on a décomposé ces représentations en paquets finis, suivant l'exposant.

3. Quelques conséquences.

Ces conséquences sont pour l'instant encore conjecturales [He].

CONJECTURE. - Fixons une uniformisante π_F de F^* , et un entier positif t . Considérons alors les représentations linéaires R de G_F , de degré p , irréductibles, et vérifiant $a(R) = p + i_t$ et $\det R(\pi_F) = 1$. Le nombre de telles représentations devrait être

$$p(q - 1)^2\, q^{i_t - 1} .$$

Cette conjecture a été vérifiée pour $p = 2$ par J. TUNNELL [Tu]. La méthode de vérification d'une telle conjecture est d'ailleurs claire dans son principe (et néanmoins malaisée à mettre en oeuvre, cf. la compléxité des résultats de ZINK). On connaît le nombre de représentations cherchées qui sont primitives. Il suffit donc de s'intéresser à celles qui sont imprimitives : on prend une extension K de degré p de F, un caractère χ de G_K, de degré 1, et on induit de G_K à G_F ; on obtient alors une représentation du type voulu, et toutes s'obtiennent de cette façon. Cependant plusieurs difficultés se présentent aux différents pas de la vérification. La première est que les extensions K de F ne sont pas toutes cycliques si p est impair, on ne peut donc pour les décrire, utiliser directement la théorie du corps de classes local. Ensuite, il faut donner des conditions sur le caractère χ de G_K pour que son induite à G_F soit irréductible, et aussi contrôler l'exposant de cette représentation induite en fonction de celui de χ. Enfin, la plus grande difficulté est sans doute l'existence de représentations dites multiplement imprimitives, c'est-à-dire qui soient irréductibles et puissent être induites à partir de plusieurs extensions de F, de degré p sur F mais non conjuguées au-dessus de F (Pour plus de précisions et de résultats, voir [He]).

Il se pose à l'esprit deux questions : D'où vient cette conjecture ? Pourquoi est-elle d'expression simple alors que le théorème de Zink est si compliqué ?

De la seconde question je dirai simplement que cette situation reflète notre mauvaise connaissance des représentations considérées (connaissance qui est d'ailleurs aussi mauvaise, sinon plus, dans le cas global).

Pour répondre à la première question, on peut dire que cette conjecture est un cas très particulier des conjectures de Langlands, et que sa vérification fournirait un exemple et une illustration numériques de ces conjectures générales. Plus précisément, considérons une algèbre à division D, centrale sur F et d'indice p sur F. Les conjectures de Langlands prédisent en ce cas l'existence d'une bijection $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ entre les réprésentations irréductibles de degré p de G_F et les représentations irréductibles d'image finie du groupe multiplicatif $D^\times$ de D. Cette bijection devrait conserver les facteurs L et ε et, en particulier, les exposants définis de part et d'autre (*). On ne connaît une telle correspondance que pour $p = 2$ ([Ku], [Tu]).

Dans le cas où p est impair quelconque, ce que signifie notre conjecture est que si la correspondance de Langlands existe et est injective, alors elle est surjective. Il semblerait que des progrès soient récemment intervenus pour le cas $p = 3$.

(*) Notons $\mathfrak{p}_D$ l'idéal maximal de D et, pour chaque entier positif i, U_D^i le groupe $1 + \mathfrak{p}_D^i$; on notera aussi U_D^0 le groupe des unités de D. Si R est une représentation de $D^\times$, continue d'après nos conventions, son noyau contient un des groupes U_D^i, et l'exposant de R est alors $j + p - 1$, si j est le plus petit entier i tel que le noyau de R contienne U_D^i. La condition $\det R(\pi_F)=1$ correspond, du côté des représentations de $D^\times$ à la condition que le caractère central de la représentation considérée prenne la valeur 1 sur π_F.

BIBLIOGRAPHIE

[Bu] BUHLER (J.). - Icosahedral Galois representations. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1978 (Lecture Notes in Mathematics, 554).

[He] HENNIART (G.). - Représentations de degré premier de groupes de Galois locaux (Travail en cours de rédaction).

[Ko] KOCH (H.). - Classification of the primitive representations of the Galois groups of local fields, Invent. Math., Berlin, t. 40, 1977, p. 195-216.

[Ku] KUTZKO (P.). - Local Langlands conjecture for GL(2) , 1978 (manuscrit).

[Tu] TUNNELL (J. B.). - On the local Langlands conjecture for GL(2) , Invent. Math., Berlin, t. 46, 1978, p. 179-200.

[We] WEIL (A.). - Exercices dyadiques, Invent. Math., Berlin, t. 27, 1974, p. 1-22.

[Zi] ZINK (E.-W.). - Counting primitive projective representations of local Galois groups, Berlin, 1979 (Preprint).