Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Jean Coquet

# Corrélation de suites arithmétiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 20, n° 1 (1978-1979), exp. n° 15, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 15, 12 p.



29 janvier 1979

# CORRÉLATION DE SUITES ARITHMÉTIQUES

par Jean COQUET (*)
[Université de Valenciennes]

## I. Introduction

### I.1. Mesure spectrale.

$\mathcal{S}$ désigne la famille introduite par WIENER [30], formée des suites $g=(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes possédant la propriété suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{N}\,, \quad \gamma(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} g(n+t)\,\overline{g(n)} \quad \text{existe.}$$

Lorsque $g \in \mathcal{S}$, la suite $\gamma$ est appelée la corrélation de $g$. Il est naturel de prolonger $\gamma$ à $\mathbb{Z}$ en posant $\gamma(-t) = \overline{\gamma(t)}$. Ce prolongement étant une fonction définie positive de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, le théorème de Bochner-Herglotz [29] dit que $\gamma$ est transformée de Fourier d'une mesure borélienne positive $\mu$ sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ :

$$\forall\, t \in \mathbb{N}\,, \quad \gamma(t) = \int_{\mathbb{T}} e(tx)\, d\mu(x)\,.$$

$\mu$ est appelée mesure spectrale de $g$.

### I.2. Décomposition de $\mu$ et comportement harmonique de $g$.

$\mu$ se décompose, de manière unique, en somme de 3 termes

$$\mu = \mu^a + \mu^{ac} + \mu^S\,,$$

où $\mu^a$ est atomique, $\mu^{ac}$ absolument continue et $\mu^S$ singulière.

Deux cas sont particulièrement intéressants.

1° $\mu$ est diffuse ($\mu^a = 0$) : J.-P. BERTRANDIAS démontre [2] que

$$\mu^a = 0 \iff \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t<N} |\gamma(t)|^2 = 0\,.$$

$g$ est alors dite pseudo-aléatoire.

Ceci implique que le spectre de Fourier-Bohr de $g$ est vide, autrement dit,

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,, \quad \frac{1}{N} \sum_{n<N} g(n)\, e(-\alpha n) \to_{N\to\infty} 0\,.$$

La réciproque est fausse ($g(n) = e(\sqrt{n})$).

Si, $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$, $g$ est dite pseudo-aléatoire au sens de BASS [1].

---

(*) Texte reçu en novembre 1979.
Jean COQUET, Département de Mathématiques, Université de Valenciennes, 59326 AULNOY-LES-VALENCIENNES.

2° $\mu$ est atomique ($\mu = \mu^a$) : J.-P. BERTRANDIAS démontre [2] que cette propriété de $\mu$ est équivalente à $\forall\ \varepsilon > 0$ , $\exists\ E_\varepsilon \subset \underset{\sim}{N}$ , relativement dense ([1]) tel que :

$$\forall\ t \in E_\varepsilon\ ,\quad \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} |g(n+t) - g(n)| \leqslant \varepsilon\ .$$

$g$ est dite moyenne-presque-périodique. Notons que les suites presque-périodiques-$B_1$ sont moyenne-presque-périodiques, la réciproque étant fausse ($g(n) = e(\sqrt{n})$) .

## I.3. Les suites étudiées.

Différents types de suites arithmétiques sont étudiées ici : les suites q-multiplicatives, les suites multiplicatives ainsi que d'autres suites au paragraphe IV. Rappelons quelques définitions [12].

Soit $q \geqslant 2$ un entier naturel. Tout entier naturel $n$ se développe de manière unique en base $q$ .

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n) q^r \quad \text{où} \quad a_r(n) \in \{0\ ,\ \dots\ ,\ q-1\}\ ,\quad \forall\ r \in \underset{\sim}{N}\ .$$

Une suite $g : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}$ est dite q-multiplicative si $g(0) = 1$ et

$$g(n) = \prod_{r=0}^{+\infty} g(a_r(n) q^r)\ ,\quad \forall\ n \in \underset{\sim}{N}\ .$$

Une suite $f : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}$ est dite q-additive si $f(0) = 0$ et

$$f(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} f(a_r(n) q^r)\ ,\quad \forall\ n \in \underset{\sim}{N}\ .$$

En particulier, la somme des chiffres en base $q$ ($s(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n)$) est q-additive.

# II. Les suites q-multiplicatives

Ces suites ont donné lieu à de nombreuses études (BÉSINEAU, DELANGE, GEL'FOND, KAKUTANI, KAMAE, MAHLER, MENDÈS FRANCE, ...).

On peut retenir en particulier concernant la somme des chiffres :

1° Dans sa thèse, MENDÈS FRANCE démontre que la suite de terme général $e(s(n)/q)$, q-multiplicative, est pseudo-aléatoire au sens de BERTRANDIAS, mais pas au sens de BASS [22].

2° Reprenant la technique de MENDÈS FRANCE, BÉSINEAU [3] démontre que la suite $e(\alpha s(n))$ est pseudo-aléatoire si, et seulement si, $\alpha(q-1) \notin \underset{\sim}{Z}$ . Ce résultat lui permet de résoudre un problème de GEL'FOND [13] concernant la densité asymptotique de $\{n \in \underset{\sim}{N}\ ;\ s_1(n) \equiv a_1 \bmod b_1 \text{ et } s_2(n) \equiv a_2 \bmod b_2\}$ , $s_1$ et $s_2$ désignant les sommes des chiffres dans deux bases différentes $q_1$ et $q_2$ .

---

([1]) La distance de deux points consécutifs de $E_\varepsilon$ est majorée.

II.1. Le résultat principal.

Prolongeant les travaux de BÉSINEAU et MENDÈS FRANCE, j'ai obtenu [5] le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit $g$ une suite q-multiplicative de module 1, soit $f$ une q-additive réelle telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $g(n) = e(f(n))$.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(A) $g$ est à spectre vide,

(B) $g$ est pseudo-aléatoire,

(A') Pour tout $\alpha$ réel, $\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{a=0}^{q-1} \|f(aq^r) - \alpha aq^r\|^2 = +\infty$,

(B') $\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{2\leqslant a\leqslant q} \|f(aq^r) - af(q^r)\|^2 = +\infty$.

On sait que (B) $\Rightarrow$ (A). Le fait que (A') $\Rightarrow$ (B') est une conséquence de l'inégalité diophantienne suivante :

LEMME 1. - Soit $(c_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ; soit

$$\alpha_0 = c_0 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{q^r}((c_r - qc_{r-1}) \text{ , où } ((x)) = \begin{cases} \{x\} \text{ si } 0 \leqslant \{x\} \leqslant \frac{1}{2} \\ -1 + \{x\} \text{ si } \frac{1}{2} < \{x\} < 1 \end{cases}.$$

On a, pour tout $\alpha$ réel,

$$\frac{q^2}{4} \sum_{r=0}^{+\infty} \|c_r - \alpha_0 q^r\|^2 \leqslant \sum_{r=0}^{+\infty} \|c_{r+1} - qc_r\|^2 \leqslant (q^2+1) \sum_{r=0}^{+\infty} \|c_r - \alpha q^r\|^2 .$$

La preuve de (A) $\Rightarrow$ (A') est basée sur une caractérisation des suites q-multiplicatives à spectre vide ([5], [6] page 12) donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit $g$ une suite q-multiplicative de module $\leqslant 1$. Le spectre de $g$ est vide si, et seulement si, pour tout $\alpha$ réel,

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{a=0}^{q-1} (1 - \mathrm{Re}(g(aq^r)e(-\alpha aq^r))) = +\infty .$$

La démonstration du théorème 2, moyennant la remarque que $(g(n)e(-\alpha n))$ est aussi une suite q-multiplicative, se réduit à une caractérisation des suites q-multiplicatives ayant une valeur moyenne nulle [12].

Reste à prouver que (B') $\Rightarrow$ B.

II.2. Existence de la corrélation.

PROPOSITION. - Toute suite q-multiplicative $g$ de module 1 appartient à $\mathbb{S}$.

BÉSINEAU [3] a démontré ce résultat dans le cas où $g(n) = e(\alpha s(n))$. J'en donne ici une démonstration plus simple. Soit $g^{(k)}$ la suite q-multiplicative tronquée

définie par :

$$g^{(k)}(n) = \prod_{r<k} g(a_r(n)q^r)$$

$g^{(k)}$ , étant périodique de période $q^k$ , possède une corrélation $\gamma^{(k)}$ . D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{n<N} |g(n+t)\overline{g(n)} - g^{(k)}(n+t)\overline{g^{(k)}(n)}| &\leq 2\ \mathrm{Card}\{n<N\ ;\ g(n+t)\overline{g(n)} \neq g^{(k)}(n+t)\overline{g^{(k)}(n)}\} \\ &\leq 2\ \mathrm{Card}\{n<N\ ;\ [(n+t)/q^k] \neq [n/q^k]\} \\ &\leq 2t(N+1)/q^k ,\end{aligned}$$

$t$ étant fixé, il résulte de l'inégalité précédente que la suite $(g(n+t)\overline{g(n)})_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est presque-périodique-$B_1$ . Elle a donc une valeur moyenne $\gamma(t)$ donnée par

$$\gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \gamma^{(k)}(t) .$$

II.3. Des relations de récurrence.

Pour $k \in \underset{\sim}{N}$ , on définit la suite $f_k$ , q-additive et la suite $g_k$ , q-multiplicative par

$$f_k(n) = f(q^k n) \quad \text{et} \quad g_k(n) = g(q^k n) = e(f_k(n)) .$$

Notons $\gamma_k$ la corrélation de $g_k$ . Un théorème dû à WIENER, affirme que toute suite définie positive a une corrélation. Nous désignerons par $\Gamma_k$ (resp. $\Gamma$) la corrélation de $\gamma_k$ (resp. $\gamma$) . Le fait que $g$ soit pseudo-aléatoire se traduit donc par $\Gamma(0) = 0$ .

II.3.1. Relations entre les $\gamma_k$ .

LEMME 2. - Pour tout $a \in \{0 , \dots , q-1\}$ , tout $u \in \underset{\sim}{N}$ et tout $k \in \underset{\sim}{N}$ , on a :

$$\gamma_k(qu + a) = \frac{1}{q}(\gamma_{k+1}(u)\Delta_{a,k} + \gamma_{k+1}(u+1)\Delta'_{a,k})$$

où

$$\Delta_{a,k} = \sum_{0\leq b<q-a} g_k(b+a)\overline{g_k(b)} \quad \text{et} \quad \Delta'_{a,k} = \sum_{q-a\leq b<q} g_k(b+a-q)\overline{g_k(b)} .$$

On conviendra que $\Delta_{q,k} = 0$ et $\Delta'_{q,k} = q$ . Les relations du lemme 2 se transmettent matriciellement aux $\Gamma_k$ .

II.3.2. Relations entre les $\Gamma_k$ .

Pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$ , posons

$$N_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k & \overline{B_k} \\ D_k & E_k & F_k \\ \overline{D_k} & \overline{F_k} & \overline{E_k} \end{bmatrix} \quad \text{où,} \quad \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{q^3}\sum_{a=0}^{q-1}(|\Delta_{a,k}|^2 + |\Delta'_{a,k}|^2) \\ B_k &= \frac{1}{q^3}\sum_{a=0}^{q-1}\Delta'_{a,k}\,\overline{\Delta_{a,k}} \\ D_k &= \frac{1}{q^3}\sum_{a=0}^{q-1}(\Delta_{a+1,k}\,\overline{\Delta_{a,k}} + \Delta'_{a+1,k}\,\overline{\Delta'_{a,k}}) \\ E_k &= \frac{1}{q^3}\sum_{a=0}^{q-1}\Delta'_{a+1,k}\,\overline{\Delta_{a,k}} \\ F_k &= \frac{1}{q^3}\sum_{a=0}^{q-1}\Delta_{a+1,k}\,\overline{\Delta'_{a,k}} \end{aligned}$$

Le lemme 2 donne après quelques calculs le résultat suivant.

LEMME 3. - Pour tout $\ell \in \underset{\sim}{N}$ ,

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) \\ \Gamma(1) \\ \Gamma(-1) \end{bmatrix} = N_0\, N_1 \cdots N_\ell \begin{bmatrix} \Gamma_{\ell+1}(0) \\ \Gamma_{\ell+1}(1) \\ \Gamma_{\ell+1}(-1) \end{bmatrix}$$

II.4. Fin de la preuve de (B') $\Longrightarrow$ (B).

Nous distinguons deux cas

1° la série $(S_1)$ : $\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{2\leqslant a\leqslant q-1}\|f_r(a) - af_r(1)\|^2$ diverge $(q \geqslant 3)$ ,

2° la série $(S_2)$ : $\sum_{r=0}^{+\infty}\|f_{r+1}(1) - qf_r(1)\|^2$ diverge.

II.4.1. Cas où $(S_1)$ diverge.

On définit sur l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes la norme suivante [22] :

$$|||[a_{ij}]||| = \max_i(\sum_i |a_{ij}|) .$$

Posons

$$a_0 = \inf\{a \in \{2 , \ldots , q - 1\} ; \ \sum_{r=0}^{+\infty}\|f_r(a) - af_r(1)\|^2 = +\infty\}$$

et

$$\omega_k = f_k(a_0) - f_k(a_0 - 1) - f_k(1) .$$

On peut alors majorer $|||N_k|||$ :

LEMME 4. - $\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$ , $|||N_k||| \leqslant 1 - 4q^{-3}\|\omega_k\|^2$ .

D'autre part, $\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$ , $0 \leqslant |\Gamma_k(1)| = |\Gamma_k(-1)| \leqslant |\Gamma_k(0)| \leqslant 1$ .

Donc, d'après le lemme 3, et le lemme 4,

$$\Gamma(0) \leqslant \prod_{k=0}^{\ell}(1 - \frac{4}{q^3}\|\omega_k\|^2) , \quad \forall\, \ell \in \underset{\sim}{N} .$$

Il ne reste plus qu'à remarquer, d'après la définition de $a_0$ , que $\sum_{k=0}^{+\infty}\|\omega_k\|^2 = +\infty$ .

II.4.2. Cas où $(S_2)$ diverge.

On se ramène au 1er cas (divergence de $(S_1)$) en changeant de base. On remarque en effet que, si $d = q^2$ , toute suite q-additive (resp. q-multiplicative) est d-additive (resp. d-multiplicative).

La divergence de $(S_2)$ implique celle de

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{2\leq a<d} \|f(aq^r) - af(q^r)\|^2 ,$$

donc celle de l'une au moins des deux séries suivantes :

$$(S_1^*) \quad \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{2\leq a<d} \|f(ad^s) - af(d^s)\|^2$$

$$(S_1^{**}) \quad \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{2\leq a<d} \|f_1(ad^s) - af_1(d^s)\|^2 .$$

Si $(S_1^*)$ diverge, $g = e(f)$ , d-multiplicative, est pseudo-aléatoire.

Si $(S_1^{**})$ diverge, $g_1 = e(f_1)$ , d-multiplicative, est pseudo-aléatoire donc $g$ l'est aussi d'après le lemme 3.

II.5. Précisions sur la mesure spectrale.

Si l'on pose $u = 0$ et $a = q - 1$ dans la relation du lemme 2, on obtient :

$$|\gamma_{k+1}(0)| \leq q|\gamma_k(q - 1)| + (q - 1)|\gamma_{k+1}(1)| .$$

D'autre part, $g$ étant de module 1 , pour tout $t \in \underset{\sim}{N}$ , pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$ , $\gamma_k(t) = \gamma(tq^k)$ , d'où il apparait que :

$$|\gamma(0)| \leq q|\gamma(q^{k+1} - q^k)| + (q - 1)|\gamma(q^{k+1})| .$$

Il est donc impossible que $g$ soit pseudo-aléatoire au sens de BASS (si tel était le cas, on aurait $\gamma(0) = 0$ , alors que, manifestement, $\gamma(0) = 1$ ).

La mesure spectrale de $g$ ne peut donc pas être absolument continue. En fait, KAMAE, MENDÈS FRANCE et COQUET [7] ont démontré, par une technique différente de celle qui est exposée dans les paragraphes II.3 et II.4, le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - La mesure spectrale d'une suite q-multiplicative de module 1 est atomique ou singulière.

En fait, c'est une classe de suites un peu plus générale qui a été étudiée. Soit $\mathcal{Q} = (q_r)_{r\in\underset{\sim}{N}^*}$ une suite d'entiers $\geq 2$ . On pose $p_0 = 1$ et $p_k = \prod_{1\leq r\leq k} q_r$ pour $k \in \underset{\sim}{N}^*$ . Il est évident que tout entier naturel $n$ se développe en base $\mathcal{Q}$ sous la forme :

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n)p_r \quad \text{où} \quad a_r(n) \in \{0 , \dots , q_{r+1} - 1\} , \quad \forall\, r \in \underset{\sim}{N} .$$

La suite $g : \underset{\sim}{N} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ est dite $\mathcal{Q}$-multiplicative si $g(0) = 1$ et

$$g(n) = \prod_{r=0}^{+\infty} g(a_r(n)p_r) , \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} \text{ (voir [4])}.$$

Nous avons démontré le nouveau théorème.

THÉORÈME 3'.

1° La mesure spectrale d'une suite 2-multiplicative de module 1 est atomique ou diffuse.

2° Dans le cas où 2 est bornée, si la mesure spectrale est diffuse, elle est singulière.

Dans ma thèse, j'ai prouvé que la dernière assertion était vraie aussi, 2 étant quelconque, dans le cas où $g$ est complètement 2-additive, autrement dit satisfait à la condition :

$$g(ap_r) = (g(p_r))^a \ , \quad \forall\, r \in \underset{\sim}{N} \ , \quad \forall\, a \in \{0 \ , \ \dots \ , \ q_{r+1} - 1\} \ .$$

Récemment, Martine QUÉFFELEC [26] a précisé, dans le cas pseudo-aléatoire, que la mesure spectrale (diffuse) était singulière ou absolument continue. Elle a donné également un exemple de suite 2-multiplicative pseudo-aléatoire au sens de BASS. Mais on ne sait pas s'il existe une telle suite dont la mesure spectrale soit absolument continue.

## II.6. Mesures spectrales étrangères.

KAMAE a démontré [17] (voir aussi [18]) le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Soient $q_1$ et $q_2$ deux entiers $\geqslant 2$, premiers entre eux, et $s_1(n)$ (resp. $s_2(n)$) la somme des chiffres de $n$ en base $q_1$ (resp. $q_2$). Soit $\alpha_1$ réel tel que $\alpha_1(q_1 - 1) \notin \underset{\sim}{Z}$, soit $\alpha_2$ réel tel que $\alpha_2(q_2 - 1) \notin \underset{\sim}{Z}$. Les suites $(e(\alpha_1 s_1(n)))$ et $(e(\alpha_2 s_2(n)))$ ont des mesures spectrales étrangères.

Martine QUÉFFELEC [27] a amélioré récemment ce résultat, montrant, sans condition sur $q_1$ et $q_2$, que les mesures spectrales de $e(\alpha_1 s_1)$ et $e(\alpha_2 s_2)$ sont égales ou étrangères.

## II.7. Retour à la moyenne-presque-périodicité.

Les théorèmes 1 et 3 montrent que toute suite q-multiplicative de module 1 dont le spectre est non-vide, est moyenne-presque-périodique. Dans ma thèse, j'ai donné une autre démonstration de ce résultat basée sur le théorème 2, la caractérisation par J.-P. BERTRANDIAS des suites moyenne-presque-périodiques et l'inégalité suivante du type TURAN-KUBILIUS :

LEMME 5. - Soit $N \in \underset{\sim}{N}^*$. Soit $\nu$ l'entier naturel défini par $q^\nu \leqslant N < q^{\nu+1}$. Soit $f$ une suite q-additive réelle. On a :

$$\sum_{n<N} \left(f(n) - \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r)\right)^2 \leqslant N \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{a=0}^{q-1} f^2(aq^r) \ .$$

Je ne développe pas cette démonstration puisque des arguments semblables sont utilisés au paragraphe III. Je signale toutefois que le lemme 5 permet de prouver

que le produit de deux suites $g_1$ et $g_2$, respectivement $q_1$-multiplicative et $q_2$-multiplicative de module 1, à spectre non vide, est une suite à spectre non vide [6].

Enfin, un lemme analogue au lemme 5 concernant la suite des nombres premiers, obtenu à partir de résultats classiques de crible, m'a permis de démontrer [10] le théorème suivant prouvé par KATAI [19] dans le cas où $q$ est puissance d'un nombre premier impair, à l'aide d'arguments plus compliqués.

THÉORÈME 5. - *Soit $g$ une suite $q$-multiplicative de module $\leqslant 1$. Si la série $\sum_{r=0}^{+\infty} [\sum_{a=0}^{q-1}(1 - g(aq^r))]$ converge (en particulier, si $g$ a une valeur moyenne non nulle sur $\underset{\sim}{N}$), $g$ a une valeur moyenne sur la suite des nombres premiers donnée par*

$$H(g) = \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{a=1,(a,q)=1}^{q-1} g(a)\right) \times \prod_{r=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} g(aq^r)\right) .$$

## III. Les suites multiplicatives

### III.1. Les suites moyenne-presque-périodiques.

L'étude harmonique des suites multiplicatives fait apparaître deux différences majeures avec les suites $q$-multiplicatives :

(a) on ne sait pas à l'heure actuelle démontrer que toute suite multiplicative de module $\leqslant 1$ possède une corrélation,

(b) certaines suites multiplicatives à spectre vide ont une mesure spectrale absolument continue (comparer au théorème 3).

Par contre, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - *Si une suite $g$, multiplicative de module $\leqslant 1$, a un spectre non vide, elle est moyenne-presque-périodique.*

### III.2. Les idées de la démonstration.

Une démonstration détaillée du théorème 6 se trouve dans [6] et [9] : elle ne fait pas appel au calcul de la corrélation mais à la caractérisation due à J.-P. BERTRANDIAS des suites moyenne-presque-périodiques.

Je donne ici les idées de la preuve dans un cas particulier ; dans le cas général, une difficulté surgit, causée par l'annulation périodique d'un caractère de Dirichlet. Je démontre ici le résultat suivant.

PROPOSITION. - *Soit $g$ une suite multiplicative de module 1 telle que*

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n\leqslant N} g(n) \right| > 0 .$$

*Alors $g$ est moyenne-presque-périodique.*

Rappelons d'abord un résultat de HALÁSZ [14] : avec l'hypothèse de la proposition, il existe $u$ réel tel que

$$(1) \qquad \sum_p \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(g(p)p^{-2i\pi u})) < +\infty .$$

On définit la suite $h$, multiplicative de module 1, par $h(n) = g(n)n^{-2i\pi u}$ et la suite $f$ additive réelle par

$$h(p^\alpha) = e(f(p^\alpha)) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} < f(p^\alpha) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall\, \alpha \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}^*, \quad \forall\, p \text{ premier.}$$

D'après (1),

$$(2) \qquad \sum_{(p,\alpha)} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} < +\infty ,$$

la somme étant étendue aux couples $(p, \alpha)$, où $p$ est premier et $\alpha \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}^*$.

D'autre part, on utilise l'inégalité de Turan-Kubilius [20].

LEMME 6. - *Il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* $N \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}^*$ *et toute suite additive réelle* $f$,

$$\sum_{n\leq N}(f(n) - \sum_{p\leq N} \frac{f(p)}{p})^2 \leq cN \sum_{p^\alpha \leq N} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, d'après (2), il existe $k$ tel que

$$(3) \qquad \sum_{p^\alpha \geq k} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \leq \frac{\varepsilon^2}{16\pi^2 c} .$$

On définit la suite additive tronquée $f_k$ par :

$$f_k(n) = \sum_{p^\alpha \geq k,\, p^\alpha \| n} f(p^\alpha) .$$

L'inégalité de Turan-Kubilius, appliquée à $f_k$, donne, d'après (3) :

$$(4) \qquad \sum_{n\leq N}(f_k(n + t) - f_k(n))^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2}(N + t) .$$

D'autre part, si $t \in m_k \underset{\sim}{\mathbb{N}}^*$ où $m_k = \prod_{p<k} p^{\alpha_p+1}$ avec $\alpha_p = \max(\alpha / p^\alpha < k)$,

$$(5) \qquad f(n + t) - f(n) = f_k(n + t) - f_k(n) .$$

On déduit de (4) et (5) que, si $t \in m_k \underset{\sim}{\mathbb{N}}^*$ (relativement dense),

$$(6) \qquad \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} |h(n + t) - h(n)| \leq \varepsilon ,$$

ce qui donne facilement

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} |g(n + t) - g(n)| \leq \varepsilon .$$

III.3. Remarques.

1° On peut préciser que la mesure spectrale de $g$ est concentrée sur $\underset{\sim}{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ (voir [11] pour le cas presque-périodique-$B_1$).

2° Pour les suites fortement multiplicatives $g$ de module 1 telles que $g(p) \longrightarrow_{p\to\infty} 1$, on peut préciser que la mesure spectrale de $g$ est atomique ou est la mesure de Haar sur le tore. Ceci est une conséquence facile de résultats de

KUBILIUS [20]. Pour certaines suites multiplicatives tronquées, on a un résultat analogue ([6], théorème IX.2).

## IV. Autre exemple

A l'aide du théorème 1, on constate facilement que si $f$ est la suite $q$-additive réelle définie par

$$f(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left[\frac{n}{q^k}\right] ,$$

$g = e(f)$ est pseudo-aléatoire si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{+\infty} \|b_k\|^2 = +\infty$ .

MENDÈS FRANCE a posé la question suivante : le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $q$ par un réel quelconque $\tau > 1$ ? Nous avons démontré que l'équivalence subsistait dans un cas important [8].

THÉORÈME 7. - Soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels $> 0$ telle que :

(H1) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{s_k} < +\infty$ ,

(H2) $(1 , \frac{1}{s_1} , \ldots , \frac{1}{s_k} , \ldots)$ est une famille libre sur $\mathbb{Q}$ .

Alors la suite de terme général $e(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k [\frac{n}{s_k}])$ est pseudo-aléatoire si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{+\infty} \|b_k\|^2 = +\infty$ .

On peut donc répondre affirmativement à la question posée dans le cas où $\tau$ est transcendant.

La démonstration, différente par la méthode employée de celle du théorème 1, est basée sur l'indépendance statistique des ensembles

$$E_k = \{n \in \mathbb{N} ; \{\frac{n}{s_k}\} \in A_k\} , \quad k \in \mathbb{N}^* ,$$

où les $A_k$ sont des sous-intervalles arbitraires de $[0 , 1[$ .

L'hypothèse (H1) du théorème 7 assure l'existence de la corrélation. Peut-être est-elle suffisante ? On peut dans l'énoncé du théorème remplacer (H2) par l'hypothèse suivante :

(H'2) Les nombres $s_k$ sont des rationnels $p_k/r_k \geqslant 1$ dont les numérateurs sont deux à deux premiers entre eux. (H'2) assure encore l'indépendance statistique des ensembles $E_k$ .

Je signale enfin que les suites mentionnées au théorème 7 peuvent être pseudo-aléatoires au sens de BASS ou non [6]. Peut-on préciser la nature de leur mesure spectrale ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (J.). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-69.

[2] BERTRANDIAS (J.-P.). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre $p$, Bull. Soc. math. France, mémoire 5, 1966, 106 p. (Thèse Sc. math., 1964).

[3] BÉSINEAU (J.). - Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres", Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 401-416.

[4] COQUET (J.). - Sur les fonctions $\mathcal{S}$-multiplicatives et $\mathcal{S}$-additives, Thèse 3e cycle, Orsay, 1975.

[5] COQUET (J.). - Sur les fonctions $q$-multiplicatives pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, p. 175-178.

[6] COQUET (J.). - Contribution à l'étude harmonique de suites arithmétiques, Thèse Sc. math., Orsay, 1978.

[7] COQUET (J.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.). - Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. math. France, t. 105, 1977, p. 369-384.

[8] COQUET (J.). - Sur certaines suites pseudo-aléatoires, Acta Scient. Math., Szeged, t. 40, 1978, p. 229-235.

[9] COQUET (J.). - Sur la mesure spectrale des suites multiplicatives, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 29, 1979, fasc. 3, p. 163-170.

[10] COQUET (J.). - On a result of Katai (en préparation).

[11] DABOUSSI (H.), DELANGE (H.). - Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module $\leq 1$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 657-660.

[12] DELANGE (H.). - Sur les fonctions $q$-additives ou $q$-multiplicatives, Acta Arithm., Warszawa, t. 21, 1972, p. 285-298.

[13] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives ou multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.

[14] HALÁSZ (G.). - Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, Acta Math. Acad. Sc. Hung., t. 19, 1968, p. 365-403.

[15] KAKUTANI (S.). - Ergodic theory of shift transformations, "Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical Statistics and Probability", Vol. 2, part 2, p. 405-414. - Berkeley, University of California, 1967.

[16] KAKUTANI (S.). - Strictly ergodic symbolic dynamical systems, "Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability", Vol. 2, p. 319-326. - Berkeley, University of California, 1972.

[17] KAMAE (T.). - Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures, Osaka J. of Math., t. 15, 1978, p. 569-574.

[18] KAMAE (T.). - Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by sums of digits to different bases, "Systèmes dynamiques, I", Astérisque, 1977, n° 49, p. 109-114.

[19] KATAI (I.). - A remark on $q$-additive and $q$-multiplicative functions, "Topics in number theory [1974. Debrecen]", p. 141-151. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1976 (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 13).

[20] KUBILIUS (J.). - Probabilistic methods in the theory of numbers. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Translations of mathematical Monographs, 11).

[21] MAHLER (K.). - The spectrum of an array ..., Part 2 : On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, J. Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 158-163.

[22] MENDÈS FRANCE (M.). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Anal. Math., Jerusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. 1966).

[23] MENDÈS FRANCE (M.). - Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 91-104.

[24] MENDÈS FRANCE (M.). - Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 163-167.

[25] MENDÈS FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1 , J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 1-15.

[26] QUÉFFELEC (M.). - Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. math. France, t. 107; 1979, p. 385-421.

[27] QUÉFFELEC (M.). - Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

[28] RAUZY (G.). - Propriétés statistiques des suites arithmétiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1976 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 15).

[29] TORTRAT (A.). - Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. - Paris, Masson, 1971.

[30] WIENER (N.). - The spectrum of an array ..., Part 1, J. Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 145-157.