W. Dale Brownawell

Travaux récents de Ju. V. Nesterenko

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1977-1978), exp. nº 35, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 35, 6 p.

20 mars 1978

TRAVAUX RÉCENTS DE Ju. V. NESTERENKO

par W. Dale BROWNAWELL

Aujourd'hui, je voudrais faire part d'un travail récent de Ju. V. NESTERENKO sur la multiplicité du zéro de certaines fonctions au point $z = 0$. Cette fonction est un polynôme des fonctions algébriquement indépendantes $f_1, \ldots, f_m$, solutions du système d'équations différentielles algébriques

(1) $$f_i' = F_i(f_1, \ldots, f_m) ,$$

$i = 1, \ldots, m$, $F_i(x_1, \ldots, x_m) \in \underset{\sim}{C}[x_1, \ldots, x_m]$.

Si le système (1) est linéaire, les coefficients des F_i $(i = 1, \ldots, m)$ peuvent plus généralement être polynômiaux, et NESTERENKO a alors donné des majorations précises [3]. Quant aux applications en théorie des nombres transcendants, ces majorations permettent de rendre effective la mesure d'indépendance algébrique des valeurs de E fonctions, en fonction du degré du polynôme. Quand zéro est un point régulier du système (1) (et bien-sûr $F_i(x_1, \ldots, x_m) \in \underset{\sim}{A}(x)[x_1, \ldots, x_m]$), cette mesure est même effective.

1. Idéaux.

NESTERENKO utilise les idéaux homogènes $\mathfrak{A}$ dans $\underset{\sim}{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$. Il définit

$$O(\mathfrak{A}) = \min_{P\in\mathfrak{A}} \operatorname{ord}_{z=0} P(f_0, \ldots, f_m) .$$

De cette manière, on généralise le problème de la majoration de la multiplicité du zéro d'une fonction en utilisant la théorie des ideaux (homogènes) de polynômes.

(a) On peut alors raisonner par récurrence sur la hauteur. La hauteur d'un idéal (homogène) premier $\mathfrak{p}$ est r , s'il existe une chaîne d'idéaux (homogènes) premiers

$$\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p} ,$$

et si aucune chaîne n'est plus longue. La hauteur $h(\mathfrak{A})$ d'un idéal (homogène) $\mathfrak{A}$ est la plus petite hauteur des idéaux (homogènes) premiers qui contiennent $\mathfrak{A}$.

(b) On a les décompositions primaires des idéaux (homogènes) :

(2) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{A}_s ,$$

où $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ (dites composantes) sont (homogènes) primaires, et $\mathfrak{A}_j \not\supseteq \bigcap_{i\neq j} \mathfrak{A}_i$, $j = 1, \ldots, s$. Les composantes de même hauteur que $\mathfrak{A}$ (dites isolées) sont déterminées de façon unique. Les autres ne sont pas définies intrinsèquement.

(c) Quand $\mathfrak{A} = \langle a_1 , \ldots , a_r \rangle$, est de hauteur r , toutes les composantes sont de hauteur r , et alors la décomposition primaire est unique (Théorème de Macaulay ([7], II, p. 203)).

(d) La hauteur de l'idéal engendré par l'idéal (homogène) $\mathfrak{A}$ et le polynôme (homogène) f est, au plus, $1 + h(\mathfrak{A})$ (théorème des idéaux principaux de Krull ([7], I, p. 238)).

2. Forme associée.

Cette forme a été introduite en géométrie algébrique par W. CHOW et B. L. VAN DER WAERDEN pour paramétrer l'ensemble des sous-variétés algébriques d'un espace projectif [6]. On l'appelle parfois forme de Chow ou forme de Cayley. Indépendamment, E. NOETHER et W. KRULL ont étudié ce polynôme sous le nom de Grundpolynom ([4], [6]). NESTERENKO a réétabli certains de ces résultats afin de borner les degrés de façon explicite.

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal homogène de $A = \underset{\sim}{C}[z , x_0 , \ldots , x_m]$ de générateurs $a_1 , \ldots , a_\ell$. On suppose que les composantes de $\mathfrak{A}$ dans (2) sont toutes de même hauteur r , la décomposition (2) est donc unique. On introduit les formes linéaires

$$L_i(x) = \sum_{j=0}^{m} u_{ij} x_j , \quad i = 1 , \ldots , m - r + 1 ,$$

et les nouvelles variables u_{ij} , et on considère l'idéal $(\mathfrak{A} , L_1 , \ldots , L_{m-r+1})$ de

$$A[U] = A[U_{1,0} , \ldots , U_{m-r+1,m}] ,$$

engendré par les L_i et les éléments de $\mathfrak{A}$. χ désigne l'idéal de $A[U]$, engendré par $x_0 , \ldots , x_m$.

(a) Il existe un polynôme $G_{\mathfrak{A}}(z , U) \in \underset{\sim}{C}[z , U]$ tel que

(i) $\deg_z \mathfrak{A} := \deg_z G_{\mathfrak{A}} \leqslant r(\max \deg_z a_j)(\max_{i,j} \deg_{x_i} a_j)^r$,

(ii) $\deg_x \mathfrak{A} := \max \deg_{u_j} G_{\mathfrak{A}} \leqslant (\max_{i,j} \deg_{x_i} a_j)^{r+1}$,

et

(iii) $G_{\mathfrak{A}}(z , u) \underset{\sim}{C}[z , U] = ((I , L_1 , \ldots , L_{m-r+1}) : \chi^H) \cap \underset{\sim}{C}[z , U]$, pour tous $M \geqslant M_0$.

(b) $G_{\mathfrak{A}} = \prod_{i=1}^{s} G_{\mathfrak{Q}_i} = \prod_{i=1}^{s} G_{\mathfrak{P}_i}^{e_i}$, où $\mathfrak{Q}_i$ est $\mathfrak{P}_i$-primaire et e_i est la plus petite puissance telle que $\mathfrak{P}_i^{e_i} \subseteq \mathfrak{Q}_i$.

(c) On introduit les nouvelles variables $s_{jk}^{(i)}$ liées par les relations

$$s_{jk}^{(i)} + s_{kj}^{(i)} = 0 .$$

Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier, les coefficients des monômes en $s_{jk}^{(i)}$ du polynôme $G_{\mathfrak{P}}(\sum_k s_{jk}^{(i)} \chi_k)$ engendrent un idéal $\mathfrak{C}$ qui admet $\mathfrak{p}$ comme composante isolée unique ([3], lemme 11, [5]).

3. Théorie de Picard-Vessiot.

Cette théorie est pour ainsi dire l'équivalent de la théorie de Galois des corps engendrés par les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires. Cette théorie n'est nécessaire que dans le cas où $z = 0$ est un point singulier du système

(3) $$y'_k = q_{k_0} + \sum_{k=1}^{m} q_{ki}\, y_i \ ,$$

$k = 1 , \dots , m$, $q_{ki} \in \underset{\sim}{C}(z)$. NESTERENKO se sert de la notation

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=0}^{m} \Big(\sum_{i=0}^{m} q_{ki}\, y_i\Big) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

et $t(z)$ = p. p. c. m. des dénominateurs des q_{ki} .

THÉORÈME 1 (NESTERENKO). - Il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement du système (3) telle que, pour chaque idéal homogène radical $\mathfrak{A}$ de $\underset{\sim}{C}[z , y_1 , \dots , y_m]$ qui est invariant par $t(z).D$ et, pour tous $\alpha_1 , \dots , \alpha_p$ distincts entre eux, où les y_j sont réguliers, on a

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{Ord}_{\alpha_i}(\mathfrak{A}) \leq C \ .$$

Voir [2].

4. Borne du zéro (cas linéaire).

THÉORÈME 2 (NESTERENKO). - Soit $\mathfrak{A}$ un idéal homogène dans $\underset{\sim}{C}[z , x_0 , \dots , x_m]$ de hauteur r et avec une base $\{Q_i\}$, où

$$\deg_z Q_i \leq n \ , \quad \deg_{x_j} Q_i \leq d \ , \quad d \geq 1 \ .$$

Alors

$$O(\mathfrak{A}) \leq c_1 (n + 1) d^{(m+1)^{m-r+2}} \ ,$$

où c_1 ne dépend que du système (3).

Esquisse de la preuve. - Dans le cas $r = m + 1$, on peut montrer l'inégalité désirée à l'aide des résultants. On procède par récurrence, et on raisonne par l'absurde.

Pour $r \leq m$, il y a des polynômes $P_1 , \dots , P_r \in \mathfrak{A}$ avec

$$\deg_z P_i \leq n \ , \quad \deg_{x_j} P_i \leq d$$

tels que l'idéal $\mathfrak{L} = (P_1 , \dots , P_r)$ est de hauteur r d'après le § 1 (c). Il est clair que $O(\mathfrak{A}) \leq O(\mathfrak{L})$. Soit $\mathfrak{L} = \mathfrak{Q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_s$ la décomposition primaire, alors

$$G_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{P}_1}^{e_1} \dots G_{\mathfrak{P}_s}^{e_s} \ .$$

Pour au moins un idéal premier associé, on a

$$O(\mathfrak{P}) \geqslant (\deg_z \mathfrak{P} + 1)(\deg_x \mathfrak{P})^{(m+1)^{m-r+2}}$$

(§ 2 (a) et (b)) si l'assertion n'est pas vraie.

On déduit de la forme associée $G_{\mathfrak{P}}$ des équations $\{R_i\}$ d'un idéal $\mathfrak{Q}$ avec $\mathfrak{P}$ comme composante unique isolée où

$$\deg_z R_i \leqslant \deg_z \mathfrak{P} \ , \quad \deg_{x_j} R_i \leqslant \deg_x \mathfrak{P} \ , \quad j = 0 \ , \ \dots \ , m \ .$$

Soit

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}_2' \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_t'$$

une décomposition primaire. Il existe un $Q \in (\mathfrak{Q}_2' \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_t') \setminus \mathfrak{P}$. Comme $Q\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$, il existe $R_{i_0} \in \mathfrak{Q}$ tel que $t(z).DR_{i_0} \notin \mathfrak{P}$, car sinon

$$t(z).D(QP) = t(z).(DQ)P + t(z).Q.(DP) \ ,$$

avec $t(z).D(QP) \in \mathfrak{P}$, $t(z).(DQ)P \in \mathfrak{P}$, pour tous $P \in \mathfrak{P}$ et $t(z).D\mathfrak{P} \subseteq D\mathfrak{P}$, ce qui contredit le théorème 1.

Alors l'idéal $\mathfrak{B} = (\mathfrak{C} \ , \ t(z).DR_{i_0})$ est de hauteur $r + 1$ (§ 1 (d)), et on a les inégalités

$$\deg_z \mathfrak{B} \leqslant 1 + \deg_z \mathfrak{P} \ , \ \deg_x \mathfrak{B} \leqslant (m - r + 1) \deg_x \mathfrak{P}$$
$$O(\mathfrak{B}) \geqslant O(\mathfrak{P}) - 1 \ .$$

Ces inégalités suffisent pour la récurrence et la démonstration est finie.

5. Borne du zéro (cas non linéaire).

D. MASSER et l'auteur ont observé qu'une modification de cette preuve donne le résultat suivant quand les fonctions $f_1 , \dots , f_m$ sont régulières au point $z = 0$.

THÉORÈME 3. - Soient $f_1 , \dots , f_m$ des fonctions, solutions de (1). Si $\mathfrak{U}$ est un idéal de hauteur r , avec une base $\{Q_i\}$ où $\deg Q_i \leqslant d$, alors

ou $O(\mathfrak{U}) = \infty$

ou

$$O(\mathfrak{U}) \leqslant c_r \, d^{(n+1)!/r!} \ , \tag{4}$$

où c_r ne dépend que de r et des f_i .

Très récemment, nous sommes arrivés à éviter l'usage de la forme associée et à réduire l'exposant, dans la majoration (4), à 2^{m-1} pour les idéaux qui comprennent les idéaux principaux. Notre outil principal, au lieu de la forme associée, est le polynôme de Hilbert, ce qui fournit une notion de degré d'un idéal.

Comme la théorie du polynôme de Hilbert ([1], p. 63-64) est plus simple que la théorie de la forme associée, les détails de la démonstration de notre résultat sont plus simples que ceux de NESTERENKO. Tout de même, ils sont assez longs, et il ne semble pas possible d'en donner un exposé complet dans le cadre d'un tel discours. Je m'en tiens à une esquisse qui doit indiquer seulement le sens de nos recherches.

Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, $\chi(\mathfrak{A} , \ell)$ désigne le nombre maximal des polynômes de degré total au plus ℓ qui sont $\underset{\sim}{C}$-linéairement indépendants modulo $\mathfrak{A}$. HILBERT a démontré que, pour tout ℓ suffisamment grand, $\chi(\mathfrak{A} , \ell)$ a la forme

$$\chi(\mathfrak{A} , \ell) = a_0\binom{\ell}{m - r + 1} + \ldots + a_{m-r+1} ,$$

où r est la hauteur de $\mathfrak{A}$ et $a_0 , \ldots , a_{m-r+1} \in \underset{\sim}{Z}$, $a_0 \geqslant 1$. a_0 est, par définition, le degré de $\mathfrak{A}$.

Nous considérons les idéaux $\mathfrak{A} = \langle a_1 , \ldots , a_r\rangle$ pour lesquels les localisations $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ sont de hauteur r , $1 < r < n$, où $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal des polynômes $P(x_1 , \ldots , x_m)$ avec $P(f_1(0) , \ldots , f_m(0)) = 0$. La localisation et la restriction à $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \cap \underset{\sim}{C}[x_1 , \ldots , x_m]$, sont nécessaires pour éviter les composantes de $\mathfrak{A}$, qui ne sont pas dans $\mathfrak{M}$, et qui peuvent être alors invariantes par "dérivation". Le degré ne s'accroit pas par cette méthode.

Puisque toutes les composantes de $\mathfrak{A}'$ ont la même hauteur, le degré de $\mathfrak{A}'$ est la somme des degrés de ces composantes primaires. Mais si $\mathfrak{Q}$, la composante $\mathfrak{P}$-primaire, est de degré e , $\mathfrak{P}^e \subseteq \mathfrak{Q}$. Comme $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$, il existe un $P \in \mathfrak{P}$ tel que pour

$$Q(f_1 , \ldots , f_m) = \frac{d}{dz} P(f_1 , \ldots , f_m) ,$$

$Q \notin \mathfrak{P}$. Alors $D^e \mathfrak{Q} \not\subseteq \mathfrak{P}$. De cette manière, on trouve une combinaison linéaire a_{r+1} de certaines dérivées de $a_1 , \ldots , a_r$ qui n'est dans aucune composantes de $\mathfrak{A}'$. Alors $\mathfrak{C} = \langle a_1 , \ldots , a_r , a_{r+1}\rangle_{\mathfrak{M}}$, est de hauteur $r + 1$ comme toutes ses composantes. C'est aussi vrai pour sa restriction $\mathfrak{C}'$. On peut borner le degré de ce nouvel idéal $\mathfrak{C}'$ à l'aide d'un théorème de Bezout pour les intersections de certaines hypersurfaces.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRULL (W.). - Idealtheorie. 2te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1968 (Ergebnisse der Mathematik, 46).

[2] NESTERENKO (Ju. V.). - On the algebraic dependence of the components of solutions of a system of linear differential equations [en russe], Izvestija Akad. Nauk SSSR, t. 38, 1974, p. 495-512 ; [en anglais] Math. of the USSR-Izvestija, t. 8, 1974, p. 501-518.

[3] NESTERENKO (Ju. V.). - Bornes pour l'ordre du zéro d'une classe de fonctions et leur application à la théorie des nombres transcendants [en russe], Izvestija Akad. Nauk SSSR, t. 41, 1977, p. 253-284.

[4] SEIDENBERG (A.). - Construction in algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 197, 1974, p. 273-313.

[5] SEIDENBERG (A.). - On the Chow form, Math. Annalen, t. 212, 1975, p. 183-190.

[6] VAN DES WAERDEN (B. L.). - Zur algebraischen Geometrie 19. Grundpolynom und zugeordnete Form, Math. Annalen, t. 136, 1958, p. 139-155.

[7] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P). - Commutative Algebra. Vol. 1 and 2. - Princeton, D. Van Nostrand, 1958-1960 ; Berlin, Springer-Verlag, 1975-1976 (The University Series in higher Mathematics).

(Texte reçu le 5 juin 1978)

W. Dale BROWNAWELL
Department of Mathematics
Pennsylvania State University
UNIVERSITY PARK, Pa 16802
(ETATS-UNIS)