Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Pierrette Cassou-Noguès

Fonctions L p-adiques des corps de nombres totalement réels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 33, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 33, 15 p.

13 mars 1978

FONCTIONS L p-ADIQUES DES CORPS DE NOMBRES TOTALEMENT RÉELS

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Soit K un corps de nombres totalement réel, et M une extension abélienne réelle finie de K, de conducteur $\mathfrak{f}$ sur K. Soit $K_{\mathfrak{f}}$ l'ensemble des éléments α de K, totalement positifs et congrus à 1 modulo $\mathfrak{f}$ (c'est-à-dire tels que $v_{\mathfrak{p}}(\alpha - 1) \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f})$, pour tout premier $\mathfrak{p}$ qui divise $\mathfrak{f}$, $v_{\mathfrak{p}}$ désignant la valuation $\mathfrak{p}$-adique telle que $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = 1$). Notons $I_{\mathfrak{f}}$ le groupe des idéaux fractionnaires de K, premiers à $\mathfrak{f}$ et $P_{\mathfrak{f}}$ le sous-groupe des idéaux principaux engendrés par les éléments de $K_{\mathfrak{f}}$. $R_{\mathfrak{f}} = I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$ est le groupe des classes de rayon modulo $\mathfrak{f}$. On sait que l'application d'Artin

$$I_{\mathfrak{f}} \longrightarrow G(M/K)$$
$$\mathfrak{A} \longmapsto \sigma_{\mathfrak{A}}$$

induit un homomorphisme surjectif de $R_{\mathfrak{f}}$ sur $G(M/K)$.

Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs associés aux caractères de $G(M/K)$. Pour $\chi \in \mathfrak{X}$, on définit

$$L(\chi , s) = \sum_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{f})=1} \chi(\sigma_{\mathfrak{A}})\, N\mathfrak{A}^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 ,$$

où la sommation est prise sur tous les idéaux entiers de K, premiers à $\mathfrak{f}$, et $N\mathfrak{A}$ désigne la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{A}$. On a

$$L(\chi , s) = \sum_{\sigma \in G(M/K)} \chi(\sigma)\, \zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma , s) ,$$

où $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma , s)$ est la fonction zêta partielle de σ définie par

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma , s) = \sum_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{f})=1, \sigma_{\mathfrak{A}}=\sigma} N\mathfrak{A}^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 ,$$

où la sommation est prise sur tout idéal entier $\mathfrak{A}$ de K premier à $\mathfrak{f}$, tel que $\sigma_{\mathfrak{A}} = \sigma$.

En 1937, SIEGEL [17] a montré que, pour tout entier k, $k > 0$, $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma , 1 - k)$ est **rationnel**. On peut alors se poser le problème de l'existence de congruences entre les valeurs de $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma , 1 - k)$ analogues aux congruences de Kummer pour les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta de Riemann. On sait que, dans ce cas, on peut ramener ces congruences au fait que la fonction

$$k \longmapsto (1 - c^{1-k})\, \zeta(-k)(1 - p^{-k})$$

se prolonge en une fonction d'Iwasawa sur $\mathbb{Z}_p$, pour c entier congru à 1 modulo p [12].

Dans le cas d'un corps de nombres totalement réel quelconque, les premiers résultats ont été obtenus par SERRE en 1972 [15]. On sait que $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma , 1 - k)$ s'obtient comme combinaison linéaire de termes constants de formes modulaires de Hilbert,

dont les coefficients supérieurs sont connus explicitement. En égalant toutes les variables, on obtient une forme modulaire sur $SL_2(\underset{\sim}{Z})$ dont les coefficients supérieurs sont rationnels. KLINGEN et SIEGEL [11], [18] ont alors montré que le terme constant d'une telle forme modulaire était combinaison linéaire à coefficinets rationnels d'un nombre fini des coefficients supérieurs, ce qui prouve la rationnalité de $\zeta_F(\sigma , 1 - k)$. SERRE a utilisé la même idée. Il a montré que des propriétés arithmétiques des coefficients supérieurs se transmettent au coefficient constant. Alors, il a défini des formes modulaires p-adiques et a obtenu la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres totalement réel à l'aide du coefficient constant de ces formes modulaires.

En 1974, QUEEN [13] a généralisé ces résultats à un niveau quelconque. Ceci lui permet d'obtenir les fonctions $L_p(\chi , s)$, pour tout caractère du groupe de Galois d'une extension abélienne réelle finie de K .

Cette méthode ne donne pas l'évaluation des dénominateurs de $L(\chi , 1 - k)$ conjecturée par SERRE [14], ni la relation avec l'élément de Stickelberger montrée par IWASAWA dans le cas du corps des rationnels. Ceci provient de l'utilisation de formes modulaires à une variable au lieu de plusieurs variables. C'est pourquoi SERRE a suggéré de définir des formes modulaires p-adiques de Hilbert.

C'est ce qu'ont fait, en 1975, DELIGNE et RIBET [7]. Ils ont pu démontrer ainsi des congruences conjecturées par COATES [5] qui donnent l'évaluation des dénominateurs de $L(\chi , 1 - k)$ et la relation avec le Stickelberger. Leur méthode utilise beaucoup de résultats de géométrie algébrique.

Ces congruences ont été démontrées en 1974 [6] par COATES et SINNOTT dans le cas d'un corps quadratique réel en utilisant une formule explicite de $\zeta_F(\sigma , 1 - k)$ donnée par SIEGEL [19]. Cette formule fait intervenir des produits de valeurs de polynômes de Bernoulli sur des rationnels et son étude est assez difficile.

En 1976, SHINTANI [16] a montré une formule explicite pour $\zeta_F(\sigma , 1 - k)$ dans le cas d'un corps totalement réel quelconque. Il a montré que $\zeta_F(\sigma , s)$ était la somme d'un nombre fini de fonctions élémentaires dont il donne les valeurs aux entiers négatifs, à l'aide de formules qui généralisent celles de SIEGEL et qui sont très compliquées.

Notre but a été d'exprimer ces valeurs par des formules utilisables en arithmétique qui permettent de démontrer aisément les conjectures de COATES. Le théorème est le suivant.

THÉORÈME 1. - *Soit*

$$Z(L , \xi , s) = \sum_{n_1 \in \underset{\sim}{N}} \cdots \sum_{n_r \in \underset{\sim}{N}} \xi_1^{n_1} \cdots \xi_r^{n_r} N(L(n_1 , \ldots , n_r))^{-s} ,$$

où L *est une fonction linéaire affine à* r *variables dont les coefficients sont*

des éléments de K totalement positifs, et les ξ_i sont des racines de l'unité différentes de 1. Alors, pour tout entier k, $k \geqslant 0$,

$$Z(L, \xi, -k) = R(N(L)^k)(\xi_1, \dots, \xi_r),$$

où $R(N(L)^k)(T_1, \dots, T_r)$ est la fraction rationnelle dont la série de Taylor à l'origine est

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \dots \sum_{n_r \in \mathbb{N}} N(L(n_1, \dots, n_r))^k T_1^{n_1} \dots T_r^{n_r}.$$

1. Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta partielles.

Soit K un corps totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathfrak{d}$ un idéal entier de K et $\mathfrak{A}$ un idéal entier de K, premier à $\mathfrak{f}$. Notons

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma_{\mathfrak{A}^{-1}}, s) = \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, s).$$

Alors,

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, s) = \sum_{\mathfrak{C}} N\mathfrak{C}^{-s}, \text{ pour } Re(s) > 1,$$

où la sommation est prise sur tous les idéaux entiers $\mathfrak{C}$, premiers à $\mathfrak{d}$, dans la même classe que $\mathfrak{A}^{-1}$. Pour de tels idéaux, on a $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = (\alpha)$, où α est un élément de $\mathfrak{A}$, totalement positif et congru à 1 mod $\mathfrak{d}$.

Définissons $A' = \{\alpha \in \mathfrak{A}, \ \alpha \gg 0, \ \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{d}\}$. Réciproquement, si $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = (\alpha)$, avec $\alpha \in A'$, $\mathfrak{C}$ est un idéal entier de K, premier à $\mathfrak{f}$, dans la classe de $\mathfrak{A}^{-1}$. Notons $E^+(\mathfrak{f})$ le groupe des unités totalement positives congrues à 1 mod $\mathfrak{f}$. Alors,

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, s) = N\mathfrak{A}^s \sum_{\alpha \in A' \bmod E^+(\mathfrak{f})} N(\alpha)^{-s},$$

où la sommation est prise sur un système de représentants de A' modulo l'action multiplicative de $E^+(\mathfrak{f})$. On utilisera le théorème suivant dû à SHINTANI [16].

THÉORÈME 2. - Il existe un entier J, et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant J$, des éléments de $\mathfrak{A}\mathfrak{f}$, totalement positifs, $v_{j1}, \dots, v_{jr(j)}$, tels que tout élément x de K, totalement positif, s'écrive de façon unique

$$x = u\left(\sum_{i=1}^{r(j)} q_i v_{ji}\right), \text{ où } u \in E^+(\mathfrak{f}), \ q_i \in \mathbb{Q}^+, \ 1 \leqslant j \leqslant J.$$

Soit $\alpha \in A'$. Alors α peut s'écrire de façon unique

$$\alpha = u\left(\sum_{i=1}^{r(j)} q_i v_{ji}\right) = u\left(\sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{ji} + \sum_{i=1}^{r(j)} m_i v_{ji}\right),$$

où $x_i \in \mathbb{Q}$, $0 \leqslant x_i < 1$ et $m_i \in \mathbb{N}$. Soit

$$(1) \quad R_j(\mathfrak{A}) = \{x = \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{ji} \ ; \ x_i \in \mathbb{Q}, \ 0 \leqslant x_i < 1, \ x \in \mathfrak{A}, \ x \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}.$$

Alors,

$$\alpha = u\left(x + \sum_{i=1}^{r(j)} m_i v_{ji}\right) \text{ avec } x \in R_j(\mathfrak{A}), \ m_i \in \mathbb{N}.$$

Réciproquement, un tel élément appartient à A'. On peut donc prendre

(2) $$A = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant J} \{x + \sum_{i=1}^{r(j)} m_i v_{ji} \; ; \quad x \in R_j(\mathfrak{A}) \; , \quad m_i \in \underset{\sim}{N}\}$$

comme système de représentants de A' mod $E^+(\mathfrak{f})$.

LEMME 3.

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \; , \; s) = N\mathfrak{A}^s \sum_{L_{j,x}} Z(L_{j,x} \; , \; s) \; ,$$

où la sommation est prise sur toutes les fonctions linéaires

$$L_{j,x}(y) = x + \sum_{i=1}^{r(j)} y_i v_{ji} \; , \quad x \in R_j(\mathfrak{A})$$

et

$$Z(L_{j,x} \; , \; s) = \sum_{n \in \underset{\sim}{N}^r} N(L_{j,x}(n))^{-s} \; .$$

Ces fonctions peuvent être prolongées à tout le plan complexe en des fonctions méromorphes qui prennent des valeurs rationnelles aux entiers négatifs, mais on ne peut pas travailler sur elles car elles ont une infinité de pôles.

Considérons un idéal entier $\mathfrak{C}$ de K satisfaisant :

(3)
- (i) $\mathfrak{C}$ est premier, à la différente $\mathfrak{D}$ de K ,
- (ii) Pour tout j , $1 \leqslant j \leqslant J$ et i , $1 \leqslant i \leqslant r(j)$, $(\mathfrak{C} \; , \; (v_{ji})) = 1$,
- (iii) $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{C} \simeq \underset{\sim}{Z}/c\underset{\sim}{Z}$, où c est le générateur positif de $\mathfrak{C} \cap \underset{\sim}{Z}$.

Soit ν un élément de $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}^{-1}$ tel que $\mathrm{tr}\,\nu = b/c$, avec $(b \; , \; c) = 1$, où tr désigne la trace de K sur $\underset{\sim}{Q}$.

LEMME 4. - Soit $\mathfrak{C}$ satisfaisant (3), alors, pour tout j , $1 \leqslant j \leqslant J$, et tout i , $1 \leqslant i \leqslant r(j)$, $\exp(2\pi i \; \mathrm{tr}(v_{ji}\,\nu))$ est une racine primitive c-ième de 1 .

Définissons

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \; , \; \mathfrak{C} \; , \; s) = N\mathfrak{C}^{1-s} \, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}^{-1} \; , \; s) - \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \; , \; s) \; .$$

LEMME 5. - $$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \; , \; \mathfrak{C} \; , \; s) = N\mathfrak{A}^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{\alpha \in A} (\exp(2\pi i \; \mathrm{tr}(\alpha\mu\nu))) N(\alpha)^{-s} \; .$$

Preuve.

$$\sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{\alpha \in A} (\exp(2\pi i \; \mathrm{tr}(\alpha\mu\nu))) \; N(\alpha)^{-s} = - \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \notin \mathfrak{C}}} N(\alpha)^{-s} + (N\mathfrak{C} - 1) \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \in \mathfrak{C}}} N(\alpha)^{-s}$$

$$= - \sum_{\alpha \in A} N(\alpha)^{-s} + N\mathfrak{C} \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \in \mathfrak{C}}} N(\alpha)^{-s} \; .$$

On a $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}^{-1} \; , \; s) = N\mathfrak{A}^s \, N\mathfrak{C}^s \sum N(\alpha)^{-s}$, où la sommation est prise sur un système de représentants des éléments totalement positifs de $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, congrus à 1 mod $\mathfrak{f}$, modulo $E^+(\;)$. Donc

$$N\mathfrak{A}^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{\alpha \in A} (\exp(2\pi i \; \mathrm{tr}(\alpha\mu\nu))) \; N(\alpha)^{-s} = - \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \; , \; s) + N\mathfrak{C}^{1-s} \, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}^{-1} \; , \; s) \; .$$

On a donc montré le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Soit $\mathfrak{A}$ un idéal entier de K, premier à $\mathfrak{f}$;

$$\{v_{ji} \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant J \, , \; 1 \leqslant i \leqslant r(j)\}$$

un ensemble d'éléments satisfaisant le théorème 2, et $R_j(\mathfrak{A})$ défini dans (1).

Soit $\mathfrak{C}$ un idéal entier satisfaisant (3). Alors,

$$N\mathfrak{C}^{1-s} \, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{C}^{-1} \, , \, s) - \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1} \, , \, s)$$
$$= N\mathfrak{A}^{s} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} (\exp(2\pi i \, \mathrm{tr}(\mu\nu x))) \, Z(L_{j,x} \, , \, \xi^{\mu} \, , \, s) \, ,$$

où $L_{j,x}$ parcourt l'ensemble des fonctions linéaires

$$L_{j,x}(m) = x + \sum_{i=1}^{r(j)} m_i \, v_{ji} \, , \text{ où } x \in R_j(\mathfrak{A}) \, ,$$

$$Z(L_{j,x} \, , \, \xi_j^{\mu} \, , \, s) = \sum_{m \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}} \xi_j^{\mu m} \, N(L_{j,x}(m))^{-s} \, , \text{ où } \xi_j^{\mu m} = \xi_{j_1}^{\mu m_1} \cdots \xi_{jr(j)}^{\mu m_{r(j)}} \, ,$$

les ξ_{ji} étant des racines primitives c-ièmes de 1.

Nous utilisons un autre théorème montré par SHINTANI [16].

THÉORÈME 7. - Soit $L(m) = (x_1 + m_1)v_1 + \cdots + (x_r + m_r)v_r$, où les v_i sont des éléments totalement positifs de K. Soit

$$M_j(t) = v_j^{(1)} \, t_1 + v_j^{(2)} \, t_2 + \cdots + v_j^{(n)} \, t_n \, ,$$

où $v_j^{(i)}$ est le i-ième conjugué de v_j. Alors, pour tout entier k, avec $k \geqslant 0$,

$$Z(L \, , \, \xi \, , \, -k) = \frac{(-1)^{nk} \, k!}{n(nk)!} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{kn}}{\partial u^{kn}} \frac{\partial^{k(n-1)}}{\partial t^{ki*}} \prod_{j=1}^{r} \frac{\exp\{u(1 - x_j) \, M_j(t)\}}{\exp\{u \, M_j(t)\} - \xi_j} \Bigg|_{\substack{u = 0 \\ t_1 = 0 \\ t_i = 1 \\ t_n = 0}}$$

et

$$\frac{\partial^{k(n-1)}}{\partial t^{ki*}} = \frac{\partial^k}{\partial t_1^k} \cdots \frac{\partial^k}{\partial t_{i-1}^k} \frac{\partial^k}{\partial t_{i+1}^k} \cdots \frac{\partial^k}{\partial t_n^k} \, .$$

Soit $\mathcal{K} = K(\xi \, , \, t)$ et $\mathcal{K}[[u]]$, l'anneau des séries formelles en u à coefficients dans $\mathcal{K}$, et $\mathcal{K}[[y \, , \, u]]$ l'anneau des séries formelles en $y_1, \ldots, y_r, u$ à coefficients dans $\mathcal{K}$. On définit $B_k(\xi_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, $k \in \underset{\sim}{N}$, par

$$\frac{u}{1 - \xi_j \exp\{u\}} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\xi_j) \frac{u^k}{k!} \, .$$

PROPOSITION 8. - Il existe une forme $\mathcal{K}[[u]]$-linéaire unique

$$J_{\xi} : \mathcal{K}[[y_1 \, , \, \ldots \, , \, y_r \, , \, u]] \longrightarrow \mathcal{K}[[u]]$$

telle que

$$J_{\xi}(y^i) = B_i(\xi) \, , \text{ où } y^i = y_1^{i_1} \cdots y_r^{i_r} \, ,$$

et

$$B_i(\xi) = B_{i_1}(\xi_1) \cdots B_{i_r}(\xi_r) \, .$$

De plus

(i) $J_\xi(\frac{\partial^k}{\partial u^k} f(y\ ,\ u)_{u=0}) = \frac{d^k}{du^k} J_\xi(f(y\ ,\ u))_{u=0}$,

(ii) Si D est la dérivation sur $\mathbb{K}$, que l'on prolonge à $\mathbb{K}[[y\ ,\ u]]$ par

$$D(\Sigma\ a_{ij}\ y^i\ u^j) = \Sigma\ D(a_{ij}) y^i\ u^j\ ,$$

alors

$$J_\xi(Df(y\ ,\ u)) = DJ_\xi(f(y\ ,\ u))\ .$$

On peut alors démontrer la proposition suivante [3].

PROPOSITION 9. - Pour tout entier k , $k \geqslant 0$,

$$Z(L\ ,\ \xi\ ,\ -k) = \frac{k!}{(nk+r)!}\ J_\xi\Big[\frac{1}{n}\ \Sigma_{i=1}^n\ \frac{\partial^{k(n-1)}}{\partial t^{ki*}}\ \frac{(\Sigma_{j=1}^r (y_j + x_j)\ M_j(t))}{\Pi_{j=1}^r\ M_j(t)}\Big]\ \Big|\ \begin{matrix} t_1 = 0 \\ t_i = 1 \\ t_n = 0 \end{matrix}\ ,$$

où

$$\frac{\partial^{k(n-1)}}{\partial t^{ki*}} = \frac{\partial^k}{\partial t_1^k} \cdots \frac{\partial^k}{\partial t_{i-1}^k}\ \frac{\partial^k}{\partial t_{i+1}^k} \cdots \frac{\partial^k}{\partial t_n^k}\ .$$

En utilisant le fait que b_i , le i-ième nombre de Bernoulli peut s'écrire

$$b_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{p^t}\ \Sigma_{n=0}^{p^t-1}\ n^i \quad \text{(limite p-adique)},$$

il est facile de voir que

$$B_i(\xi) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{cp^t}\ \Sigma_{n=0}^{cp^t-1}\ n^i\ \xi^n$$

lorsque ξ est une racine c-ième de 1 . Alors, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - Soit $P(y)$ un polynôme à r variables. Alors

$$J_\xi(P(y)) = \lim_{t_1\to\infty,\ldots,t_r\to\infty} \frac{1}{c^r\ p^{t_1+\ldots+t_r}}\ \Sigma_{n_1=0}^{cp^{t_1}-1} \ldots \Sigma_{n_r=0}^{cp^{t_r}-1}\ P(n)\ \xi^n\ ,$$

où $\xi^n = \xi_1^{n_1}$, ... , $\xi_r^{n_r}$, les ξ_i étant des racines c-ièmes de 1 .

On utilise maintenant le lemme bien connu suivant.

LEMME 11. - Soit P un polynôme à r variables. Alors $\Sigma_{n\in\mathbb{N}^r}\ P(n)\ T^n$ est la série de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle $R(P)(T)$

$$R(P)(T) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^r \\ k\neq(0,\ldots,0)}} \frac{\lambda_k}{(1-T)^k} \quad \text{où} \quad (1-T)^k = (1-T_1)^{k_1} \ldots (1-T_r)^{k_r}\ .$$

$$\lambda_k = \Sigma_{\ell_1=0}^{k_1} \ldots \Sigma_{\ell_r=0}^{k_r} \begin{Bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{Bmatrix} \ldots \begin{Bmatrix} k_r \\ \ell_r \end{Bmatrix} P(-\ell_1\ ,\ \ldots\ ,\ -\ell_r)\ ,$$

où

$$\left\{ {k_i \atop \ell_i} \right\} = \begin{cases} (-1)^{\ell_i - 1} \binom{k_i - 1}{\ell_i - 1} & \text{si } k_i \geqslant 1 \text{ et } \ell_i \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } k_i = 0 \\ 0 & \text{si } k_i \geqslant 1 \text{ et } \ell_i = 0 \end{cases},$$

et $\lambda_k = 0$ si $k > \deg P + r$.

Ces différentes notions sont liées de la façon suivante.

PROPOSITION 12. - Soit P un polynôme à r variables. Alors

$$J_\xi(P(y)) = R(\frac{\partial^r}{\partial y} P)(\xi)$$

où

$$\frac{\partial^r}{\partial y} P(y_1 , \dots , y_r) = \frac{\partial^r}{\partial y_1 \, \partial y_2 \dots \partial y_r} P(y_1 , \dots , y_r) .$$

On a enfin le théorème 1 [3] annoncé dans l'introduction.

THÉORÈME 1. - Pour tout entier k , $k \geqslant 0$,

$$Z(L , \xi , -k) = R(N(L)^k)(\xi) ,$$

où $R(N(L)^k)(T)$ est la fraction rationnelle dont la série de taylor à l'origine est

$$\sum_{m \in \underset{\sim}{N}^r} N(L(m))^k \, T^m .$$

2. Propriétés arithmétiques des fonctions zêta-partielles.

1° Dénominateur de $\zeta_\varphi(\mathfrak{A}^{-1} , 1 - k)$.

(a) Cas général.

PROPOSITION 13. - Soit $\mathfrak{C}$ un idéal entier de K , satisfaisant (3). Si p est un nombre premier qui ne divise pas $N\mathfrak{C}$, alors $\zeta_\varphi(\mathfrak{A}^{-1} , \mathfrak{C} , -k)$ est p entier, pour tout entier k , $k \geqslant 0$.

Preuve.

$$\zeta_\varphi(\mathfrak{A}^{-1} , \mathfrak{C} , -k) = \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} (\exp(2\pi i \, \mathrm{tr}(\mu\nu x))) \, Z(L_{j,x} , \xi_j^\mu , -k) \, N\mathfrak{A}^{-k} .$$

Mais

$$Z(L_{j,x} , \xi_j^\mu , -k) = R(N(L_{j,x})^k)(\xi_j^\mu)$$

et

$$R(N(L_{j,x})^k)(\xi_j^\mu) = \sum_{\substack{i \in \underset{\sim}{N}^r \\ i \neq (0,\dots,0)}} \frac{\lambda_i(k)}{(1 - \xi_j^\mu)^i} .$$

Puisque p ne divise pas c , et les ξ_{ji} sont des racines de l'unité, alors $|1 - \xi_{ji}|_p = 1$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant J$ et $1 \leqslant i \leqslant r(j)$. On a alors à examiner

$$\lambda_i(k)\, N\mathfrak{A}^{-k} = \sum_{\ell_1=0}^{i_1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{i_r} \left\{ \begin{matrix} i_1 \\ \ell_1 \end{matrix} \right\} \cdots \left\{ \begin{matrix} i_r \\ \ell_r \end{matrix} \right\} N(L_{j,x}(-\ell))^k\, N\mathfrak{A}^{-k} .$$

D'après le lemme 13, $\left\{ \begin{matrix} i_1 \\ \ell_1 \end{matrix} \right\} \cdots \left\{ \begin{matrix} i_r \\ \ell_r \end{matrix} \right\}$ est entier. De plus $L_{j,x}(-\ell) \in \mathfrak{A}$, et donc $N(L_{j,x}(-\ell))^k\, N\mathfrak{A}^{-k} \in \mathbb{Z}$.

Soit $\omega_n(M)$ le plus grand entier m tel que $G(M(\mu_m)/M)$ ait un exposant divisant n, où μ_m est le groupe des racines m-ièmes de 1. La proposition 13 nous donne le résultat suivant.

THÉORÈME 14. - *Pour toute extension abélienne réelle finie M de K, et pour tout $\sigma \in G(M/K)$, $\omega_{m+1}(M)\, \zeta_M(\sigma, -m)$ est un entier.*

(b) *Cas particulier* $p = 2$.

Dans le cas $p = 2$, DELIGNE et RIBET [7] obtiennent des résultats plus précis. Excluons le cas trivial où il existe une unité congrue à 1 mod $\mathfrak{f}$ de norme négative (dans ce cas pour tout entier impair k, $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}, 1-k) = 0$, [18]).

Ils montrent que

(4) $$\forall\, k \in \mathbb{N},\ k > 0,\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{C}, -k) \in \left| \frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})} \right| \mathbb{Z}_2 .$$

(5) $$\text{Si } \mathfrak{f} \neq (1) \text{ ou } \left| \frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})} \right| \neq 2^{n-1},\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{C}, 0) \in \left| \frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})} \right| \mathbb{Z}_2 .$$

(6) $$\text{Si } \mathfrak{f} = 1 \text{ et } \left| \frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})} \right| = 2^{n-1},\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{C}, 0) \in 2^{n-2} \mathbb{Z}_2 .$$

Remarquons tout d'abord que, d'après [4], on sait qu'il existe un idéal $\mathfrak{f}_0$ tel que, toute unité congrue à 1 modulo $\mathfrak{f}_0$, est totalement positive, dans ce cas (4) et (5) sont démontrés par la proposition 13.

Nous dirons que le corps K *possède la propriété* (*) s'il existe un entier a tel que toute unité de K, congrue à 1 mod 2^a, soit totalement positive. Si la conjecture de LEOPOLDT sur le régulateur 2-adique est vérifiée, alors K possède la propriété (*). Par exemple, le régulateur 2-adique est non nul si $|E/E^+| = 2^n$ et K possède la propriété (*).

PROPOSITION 15. - *Soit* K *possédant la propriété* (*). *Pour tout entier* k, $k>0$,

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{C}, -k) \in \left| \frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})} \right| \mathbb{Z}_2 .$$

Si tous les premiers qui divisent (2) *divisent* $\mathfrak{f}$, *alors*

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{C}, 0) \in \left| \frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})} \right| \mathbb{Z}_2 .$$

Pour cela nous allons démontrer le lemme suivant. Notons U le quotient du groupe des unités de K congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$ par le sous-groupe des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{p}$, et U^+ le quotient du groupe des unités de K totalement positives congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$ par le sous-groupe des unités totalement positives congrues à 1 mod $\mathfrak{p}$.

LEMME 16. - Si $\mathfrak{p} | \mathfrak{f}$, il existe un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{A}_i$ premiers à $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ tels que

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A} , s) = \frac{|U|}{|U^+|} \sum \zeta_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}_i , s) , \quad \mathrm{Re}(s) > 1 .$$

Si $\mathfrak{p} | \mathfrak{f}$, il existe un entier h , et un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{A}_i$ premiers à $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ tels que

$$(1 - N\mathfrak{p}^{-hs}) \, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A} , s) = \frac{|U|}{|U^+|} \sum \zeta_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}_i , s) , \quad \mathrm{Re}(s) > 1 .$$

Preuve du lemme. - Considérons sur l'ensemble $1 + \mathfrak{A}^{-1}$ la relation d'équivalence $\beta \equiv \beta' \iff \beta - \beta' \in \mathfrak{p}$. On note $(1 + \mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})/(1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1})$ l'ensemble quotient. Soient $\beta_1 , \dots , \beta_I$ un système d'éléments de $1 + \mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1}$ représentant les classes. On peut supposer que les β_i , $1 \leqslant i \leqslant I$, sont totalement positifs. Considérons

$$X = \sum_{\beta_i} \sum_{\mathfrak{C}} N\mathfrak{C}^{-s} ,$$

où la deuxième sommation est prise sur tous les idéaux $\mathfrak{C}$ tels que $\mathfrak{C} = (\beta)(\beta_i)\mathfrak{A}$, où $\beta \gg 0$ et $\beta \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1}(\beta)^{-1}$. On a donc

$$X = \sum_{\beta_i} N(\beta_i)^{-s} \, N\mathfrak{A}^{-s} \sum_{\substack{\beta \gg 0 \\ \beta \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1}(\beta_i)^{-1} \bmod E^+(\mathfrak{p}\mathfrak{f})}} N\beta^{-s} ,$$

où ici la deuxième sommation est prise sur tous les éléments de $1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1}(\beta_i)^{-1}$ totalement positifs modulo $E^+(\mathfrak{p}\mathfrak{f})$. Donc

$$X = N\mathfrak{A}^{-s} \sum_{\substack{\beta \gg 0 \\ \beta \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1} \bmod E^+(\mathfrak{p}\mathfrak{f})}} N(\beta)^{-s} ,$$

$$X = |U^+| \, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A} , s) .$$

D'autre part, l'injection de $E(\mathfrak{f})$ dans $1 + \mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1}$ donne par passage au quotient une injection de U dans $(1 + \mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})/(1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1})$. On considère sur $(1 + \mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})/(1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1})$ la relation d'équivalence

$$\beta \equiv \beta' \iff \text{il existe } u \in U \text{ tel que } \beta = \beta' u .$$

Soient $\alpha_1 , \dots , \alpha_{I_1}$ un système de représentants des β_i modulo cette relation d'équivalence.

Supposons que $\mathfrak{p} | \mathfrak{d}$. Toutes les classes d'équivalence ont $|U|$ éléments et

$$X = \sum_{\alpha_i} \sum_{u \in U} \sum_{\mathfrak{C}} N\mathfrak{C}^{-s} ,$$

où la troisième sommation est prise sur les idéaux $\mathfrak{C}$ tels que

$$\mathfrak{C} = (\beta)(\alpha_i u)\mathfrak{A} = (\beta)(\alpha_i)\mathfrak{A} , \text{ où } \beta \gg 0 , \ \beta \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}(\alpha_i)^{-1}\mathfrak{A}^{-1} .$$

Donc

$$X = \sum_{\alpha_i} |U| \sum_{\mathfrak{C}} N\mathfrak{C}^{-s} = |U| \sum_{\alpha_i} \zeta_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}((\alpha_i)\mathfrak{A} , s) .$$

Si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{d}$. Il existe une classe qui a un seul élément et toutes les autres ont

$|U|$ éléments. Notons α_1 le représentant de la classe à un élément.

$$X = \sum_{\mathfrak{G}_{\alpha_1}} N\mathfrak{G}_{\alpha_1}^{-s} + \sum_{\alpha_i \neq \alpha_1} \sum_{u \in U} \sum_{\mathfrak{G}_{\alpha_i}} N\mathfrak{G}_{\alpha_i}^{-s} ,$$

où $\mathfrak{G}_{\alpha_1}$ parcourt l'ensemble des idéaux de la forme

$$\mathfrak{G}_{\alpha_1} = (\beta)(\alpha_1)\mathfrak{A} \quad \text{où} \quad \beta \gg 0 \quad \text{et} \quad \beta \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1}(\alpha_1)^{-1} ,$$

et $\mathfrak{G}_{\alpha_i}$ parcourt l'ensemble des idéaux de la forme

$$\mathfrak{G}_{\alpha_i} = (\beta)(\alpha_i\, u)\mathfrak{A} \quad \text{où} \quad \beta \gg 0 \quad \text{et} \quad \beta \in 1 + \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1}(\alpha_i)^{-1} .$$

$$\sum_{\mathfrak{G}_{\alpha_1}} N\mathfrak{G}_{\alpha_1}^{-s} = N(\alpha_1)^{-s}\, N\mathfrak{A}^{-s} \sum_{\substack{\beta \gg 0 \\ \beta \in 1+\mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{A}^{-1}(\alpha_1)\mathfrak{A} \bmod E^+(\mathfrak{f}\mathfrak{p})}} N(\beta)^{-s}$$

$$= Np^{-s}\left(N\left(\frac{(\alpha_1)}{\mathfrak{p}}\right)\right)^{-s} N\mathfrak{A}^{-s} \sum_{\substack{\beta \gg 0 \\ \beta \in 1+\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{-1}((\alpha_1)/\mathfrak{p})^{-1} \bmod E^+(\mathfrak{f}\mathfrak{p})}} N(\beta)^{-s}$$

$$\sum_{\mathfrak{G}_{\alpha_1}} N\mathfrak{G}_{\alpha_1}^{-s} = Np^{-s}|U^+|\ \zeta_{\mathfrak{f}}\left(\frac{(\alpha_1)}{\mathfrak{p}}\mathfrak{A}\ ,\ s\right) .$$

Donc

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ s) - Np^{-s}\ \zeta_{\mathfrak{f}}\left(\frac{(\alpha_1)}{\mathfrak{p}}\mathfrak{A}\ ,\ s\right) = \frac{|U|}{|U^+|} \sum_{\alpha_i \neq \alpha_1} \zeta_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}((\alpha_i)\mathfrak{A}\ ,\ s) .$$

Soit h un entier tel que $\mathfrak{p}^h$ soit un idéal principal. Cette relation montre qu'il existe un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{A}_i$ tels que

$$(1 - Np^{-hs})\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ s) = \frac{|U|}{|U^+|} \sum_{\text{fini}} \zeta_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}_i\ ,\ s) .$$

Le lemme est démontré.

<u>Preuve de la proposition 15</u>. - Nous supposons qu'il existe un entier a tel que toute unité congrue à 1 modulo 2^a soit totalement positive. Ecrivons

$$(2^a) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{a_r} .$$

Supposons que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_\ell$ divisent $\mathfrak{F}$ et que $\mathfrak{p}_{\ell+1} \cdots \mathfrak{p}_r$ ne divisent pas $\mathfrak{F}$. Soit

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_\ell^{\alpha_\ell}\, \mathfrak{p}_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}-1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r-1}$$

et

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}\mathfrak{p}_{\ell+1} \cdots \mathfrak{p}_r .$$

On a

$$(1 - Np_{\ell+1}^{-h_{\ell+1}s})\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ s) = \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E(\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\ell)}\right|^{-1} \left|\frac{E^+(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\ell)}\right| \sum_{\text{finie}} \zeta_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\ell}(\mathfrak{A}_i\ ,\ s) .$$

On a donc

$$(1 - Np_{\ell+1}^{-h_{\ell+1}s}) \cdots (1 - Np_r^{-h_r s})\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ s) = \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})}\right| \left|\frac{E(\mathfrak{f}_1)}{E^+(\mathfrak{f}_1)}\right|^{-1} \sum_{\text{finie}} \zeta_{\mathfrak{f}_1}(\mathfrak{A}_i\ ,\ s) .$$

Pour tout $\mathfrak{p}_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $\mathfrak{p}_j$ divise $\mathfrak{C}_1$. Donc

$$\zeta_{\mathfrak{f}_1}(\mathfrak{A}, s) = \left|\frac{E(\mathfrak{f}_1)}{E(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{p}_j)}\right| \left|\frac{E^+(\mathfrak{f}_1)}{E^+(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{p}_j)}\right|^{-1} \sum_{\text{finie}} \zeta_{f_1 p_j}(\mathfrak{A}_i, s).$$

Donc

$$(1 - N\mathfrak{p}_{\ell+1}^{-h_{\ell+1}s}) \ldots (1 - N\mathfrak{p}_r^{-h_r s})\, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}, s) = \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})}\right| \left|\frac{E(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{G})}{E^+(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{G})}\right|^{-1} \sum_{\text{finie}} \zeta_{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{G}}(\mathfrak{A}_i, s).$$

Mais par définition $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{G} = (2^a)\mathfrak{f}$ et $E(\mathfrak{f}(2^a)) = E^+(\mathfrak{f}(2^a))$. Donc

$$(1 - N\mathfrak{p}_{\ell+1}^{-h_{\ell+1}s}) \ldots (1 - N\mathfrak{p}_r^{-h_r s})\, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}, s) = \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})}\right| \sum_{\text{finie}} \zeta_{\mathfrak{f}(2^a)}(\mathfrak{A}_i, s).$$

Soit $\mathfrak{C}$ un idéal entier de K, premier à tous les idéaux $\mathfrak{A}_i$ et vérifiant la propriété (iii) de (3). Alors, on a montré que, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\zeta_{\mathfrak{f}(2^a)}(\mathfrak{A}_i^{-1}, \mathfrak{C}, -k) \in \underset{\sim}{Z}_2.$$

On en déduit donc que, pour tout entier $k > 0$,

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, -k) \in \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})}\right| \underset{\sim}{Z}_2,$$

et que, si tous les premiers qui divisent (2) divisent $\mathfrak{f}$,

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, 0) \in \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})}\right| \underset{\sim}{Z}_2.$$

2° Dénominateur de $L(\varepsilon, 1-k)$.

Soit ε une fonction arbitraire définie sur $R_{\mathfrak{f}}$ à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}_2$. On définit

$$L(\varepsilon, s) = \sum \varepsilon(\mathfrak{A})\, N\mathfrak{A}^{-s},$$

où la sommation est prise sur tous les idéaux entiers de K, premiers à $\mathfrak{f}$. Si $\mathfrak{C}$ est un idéal entier de K premier à $2\mathfrak{f}$ et vérifiant (iii) de (3), notons

$$L(\varepsilon, \mathfrak{C}, s) = L(\varepsilon, s) - N\mathfrak{C}^{1-s}\, L(\varepsilon_{\mathfrak{C}}, s)$$

où $\varepsilon_{\mathfrak{C}}$ est la fonction

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{f}} &\longrightarrow \underset{\sim}{Z}_2 \\ \mathfrak{A} &\longmapsto \varepsilon(\mathfrak{A}\mathfrak{C}). \end{aligned}$$

Puisque $L(\varepsilon, \mathfrak{C}, s)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}_2$ de fonctions zêta partielles, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 17. - Soit K satisfaisant la proposition (*). Pour tout entier k, $k > 0$,

$$L(\varepsilon, \mathfrak{C}, -k) \in \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^+(\mathfrak{f})}\right| \underset{\sim}{Z}_2.$$

Si tous les premiers qui divisent (2) divisent $\mathfrak{f}$,

$$L(\varepsilon\ ,\ \mathfrak{C}\ ,\ 0) \in \left|\frac{E(\mathfrak{f})}{E^{+}(\mathfrak{f})}\right| \underset{\sim}{Z}_2\ .$$

On dit que ε est une fonction impaire, si, pour tout élément α congru à 1 modulo $\mathfrak{f}$,

$$\varepsilon((\alpha)\mathfrak{A}) = \mathrm{sgn}(N(\alpha))\ \varepsilon(\mathfrak{A})$$

(ceci a bien un sens car il n'y a pas d'unité de norme négative, congrue à 1 mod $\mathfrak{f}$). De même ε est une fonction paire, si, pour tout élément α congru à 1 modulo $\mathfrak{f}$,

$$\varepsilon((\alpha)\mathfrak{A}) = \varepsilon(\mathfrak{A})\ .$$

COROLLAIRE 18. - Soit K satisfaisant la proposition (*).

(i) Soit ε une fonction impaire (resp. paire) ; alors, pour tout entier k impair (resp. pair), $k > 1$,

$$L(\varepsilon\ ,\ \mathfrak{C}\ ,\ 1-k) \in 2^n\ \underset{\sim}{Z}_2\ .$$

(ii) Si ε est impair, et si les premiers qui divisent (2) divisent $\mathfrak{f}$, alors $L(\varepsilon\ ,\ \mathfrak{C}\ ,\ 0) \in 2^n\ \underset{\sim}{Z}_2$.

Preuve. - D'après [18], on a

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ 1-k) = J_k(N\mathfrak{d}^k)\ \sum_{\mathfrak{b}\,|\,\lambda} 1^{\mathrm{tr}(\lambda)}\ N(\lambda)^{-k}$$

où

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{D}\mathfrak{f}}\ ,\quad J_k = ((2\pi i)^{-k}\ \Gamma(k))^n\ d^{k-(1/2)}\ f^{k-1}\ ,$$

et la sommation est prise sur un système complet des éléments de $\mathfrak{b}$ non associés modulo $E^{+}(\mathfrak{f})$.

Soit α un élément de K congru à 1 mod $\mathfrak{f}$

$$\zeta_{\mathfrak{f}}((\alpha)\mathfrak{A}\ ,\ 1-k) = J_k\ N((\alpha))^k\ N\mathfrak{b}^k\ \sum_{(\alpha)\mathfrak{b}\,|\,\lambda} 1^{\mathrm{tr}(\lambda)}\ N(\lambda)^{-k}$$

où la sommation est prise sur un système complet des éléments de $(\alpha)\mathfrak{b}$ non associés modulo $E^{+}(\mathfrak{f})$. On a donc

$$\zeta_{\mathfrak{f}}((\alpha)\mathfrak{A}\ ,\ 1-k) = (\mathrm{Sgn}(\alpha))^k\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ 1-k)\ .$$

Donc, si ε et k sont de même parité

$$\varepsilon((\alpha)\mathfrak{A})\ \zeta_{\mathfrak{f}}((\alpha)\mathfrak{A}\ ,\ 1-k) = \varepsilon(\mathfrak{A})\ \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{A}\ ,\ 1-k)\ .$$

On en déduit le corollaire 18.

COROLLAIRE 19. - Soit K vérifiant la propriété (*)

(i) Pour tout entier k, $k > 1$,

$$w_k(K)\ \zeta_K(1-k) \in 2^n\ \underset{\sim}{Z}_2\ .$$

(ii) Soit χ un caractère du groupe de Galois de M sur K. Pour tout entier k, $k > 1$, k de même parité que χ,

$$w_k(M)\ L(\chi\ ,\ 1-k) \in 2^n\ \underset{\sim}{Z}_2\ .$$

Ce résultat a été démontré dans le cas abélien dans [8].

3° Interpolations p-adiques.

Notons F l'algèbre des fonctions définies sur $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans un anneau $\mathcal{O} \subset \underset{\sim}{C}_p$, et U_1 le sous-groupe de $\underset{\sim}{Z}_p^*$ qui consiste en les éléments u tels que $u \equiv 1 \mod p$, si $p \neq 2$ (resp. $u \equiv 1 \mod 4$, si $p = 2$). Si $u \in U_1$, on note f_u la fonction $s \longmapsto u^s$. Les f_u $(u \in U_1)$ engendrent un sous-$\mathcal{O}$-module L de F. Soit $\bar{L}$ la fermeture de L dans F pour la topologie de la convergence uniforme. Les éléments de $\bar{L}$ sont appelés fonctions d'Iwasawa.

PROPOSITION 20. - Soit $\mathfrak{P}$ un idéal entier de K tel que $\mathfrak{P} \cap \underset{\sim}{Z}$ soit divisible par $p\underset{\sim}{Z}$ si p est impair (resp. $\mathfrak{P} \cap \underset{\sim}{Z}$ divisible par $4\underset{\sim}{Z}$, si p est pair). Alors, il existe une fonction d'Iwasawa unique $Z_p(L_{j,x}, \xi, s)$ telle que, pour tout entier k, avec $k \geqslant 0$,

$$Z_p(L_{j,x}, \xi, -k) = Z(L_{j,x}, \xi, -k).$$

Preuve.

$$Z(L_{j,x}, \xi, -k) = \sum_{\substack{i \in \underset{\sim}{N}^r \\ i \neq (0,\dots,0)}} \frac{\lambda_i(k)}{(1-\xi)^i},$$

et

$$\lambda_i(k) = \sum_{\ell_1=0}^{i_1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{i_r} \binom{i_1}{\ell_1} \dots \binom{i_r}{\ell_r} N(L_{j,x}(-\ell))^k.$$

$N(L_{j,x}(-\ell)) \equiv 1 \mod p$, si p impair (resp. $N(L_{j,x}(-\ell)) \equiv 1 \mod 4$ si p pair), donc $s \longmapsto N(L_{j,x}(-\ell))^s$ est une fonction exponentielle. On définit

$$\lambda_i(s) = \sum_{\ell_1=0}^{i_1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{i_r} \binom{i_1}{\ell_1} \dots \binom{i_r}{\ell_r} N(L_{j,x}(-\ell))^s.$$

C'est une combinaison linéaire à coefficients entiers de f_u, avec $u \in U_1$. On peut montrer que

$$|\lambda_i(s)|_p \leqslant |p|_p^{i_1+i_2+\dots+i_r-r_1}$$

où r_1 est le nombre de i_m différents de 0. Donc

$$Z_p(L_{j,x}, \xi, s) = \sum_{\substack{i \in \underset{\sim}{N}^r \\ i \neq (0,\dots,0)}} \frac{\lambda i(s)}{(1-\xi)^i}$$

limite uniforme de combinaisons linéaires finies à coefficients entiers de fonctions exponentielles : c'est donc une fonction d'Iwasawa.

Soit M une extension abélienne de K et $\chi \in \mathfrak{X}$. Soit θ le caractère de Teichmüller défini sur $\underset{\sim}{Z}_p$ par

$$\theta(x) = \lim_{n \to \infty} x^{p^n} \quad \text{(limite p-adique)},$$

et Θ le caractère défini sur les idéaux entiers de K par

$$\Theta(\mathfrak{A}) = \theta(N(\mathfrak{A})).$$

Θ est un caractère d'ordre $\delta = [K(\mu_p)/K]$. Puisque

$$(\chi(\mathfrak{K})(\frac{N\mathfrak{K}}{\Theta(\mathfrak{K})})^{1-s} - 1)L(\chi , s)$$

peut s'exprimer comme une somme finie de $Z(L_{j,x} , \xi , s)$, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 20. - Il existe une fonction $L_p(\chi , s)$ telle que

(i) pour tout entier k , $k > 0$,

$$L_p(\chi , 1 - k) = L(\chi\Theta^{-k} , 1 - k) ,$$

(ii) $s \longmapsto (\chi(\mathfrak{C})(N\mathfrak{C}/\Theta(\mathfrak{C}))^{1-s} - 1)L_p(\chi , s)$ est une fonction d'Iwasawa.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARSKY (D.). - Lettre du 2 mars 1978.

[2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1971 (multigraphié).

[3] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques (à paraître).

[4] CHEVALLEY (C.). - Deux théorèmes d'arithmétique, J. of math. Soc. of Japan, t. 3, 1951, p. 36-44.

[5] COATES (J.). - p-adic L-functions and Iwasawa's theory, "Algebraic number fields (L-functions and Galois properties)", proceedings of a symposium organised by the London mathematical society [1975, Durham], p. 269-353. - London, Academic Press, 1977.

[6] COATES (J.) and SINNOT (W.). - On p-adic L-functions over real quadratic fields, Invent. Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.

[7] DELIGNE (P.) and RIBET (K.). - Values of abelian L-functions at negative integers (en préparation).

[8] FRESNEL (J.). - Valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, Année 1970/71, exposé n° 27.

[9] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[10] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., Series 2, t. 89, 1969, p. 198-205.

[11] KLINGEN (H.). - Über die werte der Dedekindsche Zeta-Funktion, Math. Annalen, t. 145, 1962, p. 265-272.

[12] KUBOTA (T.).und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I : Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen, J. für die reine und angew. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.

[13] QUEEN (C.). - The existence of p-adic abelian L-functions, "Number theory and algebra", Collected papers dedicated to Henry B. Mann, ..., p. 263-288. - New York, Academic Press, 1977.

[14] SERRE (J.-P.). - Cohomologie des groupes discrets, "Prospects in mathematics", p. 77-169. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1971 (Annals of Mathematics Studies, 70).

[15] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, "Modular functions of one variable, III" [1972, Antwerpen], p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[16] SHINTANI (T.). - On evaluation of zêta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. of Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, Section 1, t. 23, 1976, p. 393-417.

[17] SIEGEL (C. l.). - Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, III, Annals of Math., Series 2, t. 38, 1937, p. 212-291.

[18] SIEGEL (C. L.). - Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., t. 3, 1970, p. 15-56.

[19] SIEGEL (C. L.). - Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., t. 2, 1968, p. 7-38.

(Texte reçu le 7 juin 1978)

Mme Pierrette CASSOU-NOGUES
9 rue Ségalier
33000 BORDEAUX