Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Peter Bundschuh

Une nouvelle application de la méthode de Gel'fond

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 42, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A16_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 42, 8 p.

29 mai 1978

UNE NOUVELLE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GEL'FOND

par Peter BUNDSCHUH

Dans son article fameux, C. L. SIEGEL [6] a indiqué sans démonstration le résultat suivant.

THÉORÈME 0 (SIEGEL).

(i) *Soit* $y(x)$ *une fonction algébrique de la variable complexe* x , *régulière au point* 0 , *et définie par une équation à coefficients rationnels.*

(ii) *Supposons de plus que la fonction* $A(x) := \int_0^x y(t)\,dt$ *ne soit pas algébrique.*

(iii) *Soit* ε *un nombre réel positif quelconque.*

Si $\xi \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$ *avec* $\xi \neq 0$, $d(\xi) \leqslant \ell$, $h(\xi) \leq M$ (*où* M , $\ell \in \underset{\sim}{N} := \{1 , 2 , \ldots\}$) *est tel que* $A(\xi) \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$, $d(A(\xi)) \leqslant \ell$, *alors on a l'inégalité*

$$|\xi| \geqslant \gamma \exp\{- (\log M)^{(1/2)+\varepsilon}\} . \tag{0}$$

Ici $\gamma > 0$ *ne dépend que de* ℓ *et de* ε .

Pour $\alpha \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$, nous notons $d(\alpha)$ (resp. $h(\alpha)$) le degré (resp. la hauteur) du nombre algébrique α . Remarquons que, pour démontrer son théorème, SIEGEL a évidemment appliqué sa méthode pour l'indépendance algébrique des fonctions E aux fonctions G . Comme le montre la condition (ii) ci-dessus, le cas où $A(x)$ est une fonction algébrique, est exclu, et la nécessité d'une telle exclusion provient de la méthode de démonstration employée par SIEGEL.

Dans deux articles récents, T. SCHNEIDER ([4], [5]) a essentiellement traité ce cas exclu par SIEGEL. Ici nous donnons d'abord une légère amélioration et généralisation des résultats de SCHNEIDER. Pour la démonstration de notre énoncé, nous n'appliquons plus sa méthode d'interpolation, mais tout simplement la méthode de GEL'FOND (voir par exemple [7], chapitre 3).

THÉORÈME 1. - *Soit* $y(x)$ *vérifiant la condition* (i) *du théorème* 0 *et de plus de degré* q . *Soient* $h := d(y(0))$, *et* M , $\ell \in \underset{\sim}{N}$. *Il existe deux fonctions positives* $c_i = c_i(\ell)$, $i = 1 , 2$, *ayant la propriété suivante* : *Si* $\xi \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$, $\xi \neq 0$, $[\underset{\sim}{Q}(\xi , y(\xi)) : \underset{\sim}{Q}] \leqslant \ell$, $h(\xi) \leq M$, *alors on a*

$$|\xi| \geqslant c_1 \exp\{- \frac{h\ell}{q} \log M - c_2(\log M)^{1/2}\} . \tag{1}$$

Remarquons d'abord que l'on est évidemment intéressé par le cas où M est croissant, comme d'ailleurs dans le théorème 0. De plus, une inégalité bien connue montre que, si $\xi \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$, $\xi \neq 0$, alors $|\xi| > (1 + h(\xi))^{-1}$. On déduit de ce fait que la minoration (1) pour $|\xi|$ n'est triviale que quand $h\ell < q$.

En prenant $h = \ell = 1$, on déduit une légère amélioration du résultat de [4]. D'ailleurs l'exemple de [4] (Bemerkung, 1°) montre que la minoration (1) est essentiellement la meilleure possible dans ce cas particulier.

En prenant $h = 1$, en choisissant pour $\underset{\sim}{K}$ un corps de nombres avec $[\underset{\sim}{K} : \underset{\sim}{Q}] =: \ell$, et en supposant ξ , $y(\xi) \in \underset{\sim}{K}$, $\xi \neq 0$, on déduit du théorème 1 une amélioration du résultat de [5].

Signalons finalement que notre méthode de démonstration du théorème 1 donne aussi l'énoncé suivant qui doit être comparé avec le théorème 0.

THÉORÈME 2. - Soient $y(x)$ et $A(x)$ comme en (i) et (ii) du théorème 0. Si $\xi \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$ avec $\xi \neq 0$, $d(\xi) \leqslant \ell$, $h(\xi) \leqslant M$ est tel que $A(\xi) \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$, $d(A(\xi)) \leqslant \ell$, $h(A(\xi)) \leqslant M$, alors on a l'inégalité

$$|\xi| \geqslant c_3 \exp\{- c_4(\log M \log\log M)^{1/2}\} , \tag{2}$$

où $c_i = c_i(\ell) > 0$ pour $i = 3 , 4$.

Nous remarquons que (2) est un peu meilleure que (0), mais (et c'est grave) nous devons imposer (contrairement à ce qui se passait dans le théorème 0) une condition sur la hauteur du nombre $A(\xi)$ supposé algébrique. Dans cette condition $h(A(\xi)) \leqslant M$, on peut remplacer M par une certaine fonction de M de croissance plus rapide, mais il semble qu'on ne puisse pas renoncer complètement à une hypothèse de ce type, si l'on utilise la méthode de GEL'FOND.

1. Deux lemmes analytiques et quelques remarques arithmétiques sur les fonctions algébriques.

Les deux lemmes que l'on va démontrer ici donnent des majorations pour l'ordre d'un zéro de certaines fonctions auxiliaires que nous allons utiliser pour la preuve des théorèmes 1 et 2.

Supposons que les polynômes $Q_0 , \dots , Q_q \in \underset{\sim}{C}[X]$ (pour l'instant non cécessairement dans $\underset{\sim}{Z}[X]$ comme dans les théorèmes), avec $q \geqslant 1$, sont premiers entre eux et tels que $Q_q \neq 0$ et que le polynôme

$$Q(Y) := \textstyle\sum_{j=0}^{q} Q_j \, Y^j \tag{3}$$

soit irréductible sur le corps $\underset{\sim}{C}(X)$. Supposons de plus que l'équation

$$\textstyle\sum_{j=0}^{q} Q_j(x) \, y(x)^j = 0 \tag{4}$$

définit notre fonction algébrique $y(x)$ de degré q . Tout $x \in \underset{\sim}{C}$, avec $D(x)\, Q_q(x) \neq 0$, s'appelle point régulier de $y(x)$. Ici, $D \in \underset{\sim}{C}[X]$ est le discriminant de $Q(Y)$; il est non nul d'après nos hypothèses (voir par exemple [1]). Pour les deux lemmes, nous supposons $x_0 \in \underset{\sim}{C}$ et $t \in \underset{\sim}{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que $y(x)$, définie par (4), soit régulière dans le cercle

$$\mathcal{U}_t(x_0) := \{x \in \underset{\sim}{C} ; \ |x - x_0| < t\} ,$$

où t peut être supposé maximal.

LEMME 1. - *Soit*

$$\Phi(x) := \sum_{i=0}^{p_1-1} \sum_{j=0}^{p_2-1} c_{ij}\, x^i\, y(x)^j \ , \tag{5}$$

avec p_1 , $p_2 \in \underset{\sim}{N}$, $c_{ij} \in \underset{\sim}{C}$. *Alors on a ou* $\Phi \equiv 0$ *ou*

$$\sum_{x \in \mathcal{U}_t(x_0)} \operatorname{ord}_x \Phi \leqslant (p_1 - 1)q + (p_2 - 1) \max_{0 \leq j \leq q} \deg Q_j \ . \tag{6}$$

Remarquons que l'inégalité (6) est vraie, quelle que soit celle des q-branches $y(x)$ de notre fonction algébrique que nous choisissons pour (5). Par exemple, dans le cas $p_2 = q$ que nous allons considérer plus tard, on voit facilement que la majoration (6) est la meilleure possible : On peut construire une fonction $\Phi \not\equiv 0$ du type (5) avec $\operatorname{ord}_{x_0} \Phi = p_1 q - 1$. D'autre part, en prenant $\max \deg Q_j = 1$, nous obtiendrons $p_1 q - 1$ comme borne supérieure pour $\operatorname{ord}_{x_0} \Phi$ dans (6).

Démonstration du lemme 1. - Soit $\Phi \not\equiv 0$, et définissons

$$P_j(X) := \sum_{i=0}^{p_1-1} c_{ij}\, X^i \ , \text{ pour } j = 0 , \ldots , p_2 - 1$$

ainsi que

$$P(Y) := \sum_{j=0}^{p_2-1} P_j\, Y^j \ . \tag{7}$$

Les P_j n'étant pas tous nuls, nous avons $P \neq 0$. Nous formons la résultante $R \in \underset{\sim}{C}[X]$ de P et Q , Q comme en (3) :

$$R := \begin{vmatrix} P_{p_2-1} & \cdots & P_0 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & P_{p_2-1} & \cdots & P_0 \\ & & & & \\ Q_q & \cdots & Q_0 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & Q_q & \cdots & Q_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} q \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} p_2 - 1 \end{array} \tag{8}$$

Si on avait $R = 0$, alors $P(Y)$, $Q(Y)$ auraient un facteur, disons $F(Y)$ en commun dépendant effectivement de Y . Nous aurions

$$P(Y) = F(Y)\, P^*(Y) \ , \quad Q(Y) = F(Y)\, Q^*(Y) \ , \tag{9}$$

où F , P^* , Q^* sont des polynômes non nuls en Y à coefficients dans $\underset{\sim}{C}(X)$. Comme $Q(Y)$ est irréductible sur $\underset{\sim}{C}(X)$, on trouve un polynôme $Q^* \in \underset{\sim}{C}(X)$ tel que $Q^*\, P(Y) = Q(Y)\, P^*(Y)$, d'où, en vertu de (4), (5) et (7), on conclut $Q^*(x)\, \Phi(x) \equiv 0$. Cela montre $\Phi \equiv 0$, d'où la contradiction voulue.

De (4), (5) et (8), on déduit

$$(10) \qquad 0 \neq R(x) = \begin{vmatrix} P_{p_2-1}(x) & \cdots & P_0(x) & \cdots & y^{q-1}(x)\,\Phi(x) \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & P_{p_2-1}(x) & \cdots & \Phi(x) \\ \\ Q_1(x) & \cdots & Q_0(x) & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & Q_p(x) & \cdots & 0 \end{vmatrix} =: \Phi(x)\,\Delta(x) \,,$$

où Δ est holomorphe en $\mathcal{U}_t(x_0)$; d'où $\operatorname{ord}_x \Phi \leq \operatorname{ord}_x R$, pour tout $x \in \mathcal{U}_t(x_0)$. Grâce à

$$\sum_{x\in\mathcal{U}_t(x_0)} \operatorname{ord}_x \Phi \leq \sum_{x\in\mathcal{U}_t(x_0)} \operatorname{ord}_x R \leq \sum_{x\in\underset{\sim}{C}} \operatorname{ord}_x R = \deg R \,,$$

on obtient (6) par une simple majoration de $\deg R$ en utilisant (8).

Pour le lemme suivant, nous définissons

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} y(t)\, dt$$

<u>dans le cercle</u> $\mathcal{U}_t(x_0)$, <u>et nous supposons que</u> $A(x)$ <u>n'est pas algébrique</u>.

LEMME 2. - <u>Soit</u>

$$(11) \qquad \Phi(x) := \sum_{i=0}^{p_1-1} \sum_{j=0}^{p_2-1} \sum_{k=0}^{p_3-1} c_{ijk}\, x^i\, y(x)^j\, A(x)^k \,,$$

<u>avec</u> p_1 , p_2 , $p_3 \in \underset{\sim}{N}$ <u>et</u> $c_{ijk} \in \underset{\sim}{C}$ <u>quelconques. Alors, on a ou</u> $\Phi \equiv 0$ <u>ou</u>

$$(12) \qquad \operatorname{ord}_{x_1} \Phi \leq \gamma(p_1 + p_2)p_3 \,, \text{ pour tout } x_1 \in \mathcal{U}_t(x_0) \,.$$

<u>Ici,</u> $\gamma > 0$ <u>ne dépend que de</u> x_0 , x_1 <u>et de la fonction</u> $y(x)$.

<u>Démonstration</u>. - Si $\Phi \neq 0$, on définit

$$(13) \qquad P_j(X\,,\,Z) := \sum_{i=0}^{p_1-1} \sum_{k=0}^{p_3-1} c_{ijk}\, X^i\, Z^k \,, \text{ pour } j = 0\,,\, \ldots\,,\, p_2 - 1\,,$$

ainsi que $P(Y)$ par (7). On continue ensuite comme dans la démonstration du lemme 1 , sauf que nous avons $R \in \underset{\sim}{C}[X\,,\,Z]$ en (8). En supposant $R = 0$, on retrouve (9), mais les polynômes F , P^* , Q^* en Y sont à coefficients dans $\underset{\sim}{C}(X\,,\,Z)$ et, sans perte de généralité, on peut même supposer ces coefficients dans $\underset{\sim}{C}[X, Z]$. Or, en raison de (3) et de la décomposition de $Q(Y)$ en (9), on peut dire : F et Q^* sont des polynômes (F non constant) en Y à coefficients dans $\underset{\sim}{C}[X]$, et de là on raisonne par l'absurde, comme plus haut, d'où $R \neq 0$.

En remplaçant $(X\,,\,Z)$ par $(x\,,\,A(x))$, dans notre nouveau R , du fait que $A(x)$ n'est pas algébrique, on déduit de (4), (11) et (13) de nouveau la formule (10) sauf que l'on doit remplacer les anciens $R(x)$ (resp. $P_j(x)$) par $R(x, A(x))$ (resp. $P_j(x\,,\,A(x))$). Cela entraîne $\operatorname{ord}_{x_1} \Phi \leq \operatorname{ord}_{x_1} R$, pour tout $x_1 \in \mathcal{U}_t(x_0)$, et pour majorer $\mathrm{ord}_{x_1} R$ on utilise un théorème de W. D. BROWNAWELL et D. W. MASSER [2] qui implique directement (12), après les deux remarques suivantes : De (8) et (13), on déduit

$$\deg_X R \leqslant (p_1 - 1)q + (p_2 - 1) \max \deg Q_j \quad \text{et} \quad \deg_Z R \leqslant (p_3 - 1)q \ .$$

D'ailleurs, en raison de (4), $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle

(14) $$y'(x) = -(\textstyle\sum_{j=0}^{q} Q_j'(x)\, y(x)^j)/(\sum_{j=1}^{q} jQ_j(x)\, y(x)^{j-1}) \ ,$$

où le dénominateur ne s'annule jamais dans $\mathcal{U}_t(x_0)$, sinon on aurait, pour un tel x_1 ,

$$\textstyle\sum_{j=0}^{q} Q_j(x_1)\, y(x_1)^j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{q} j\, Q_j(x_1)\, y(x_1)^{j-1} = 0 \ .$$

De là on pourrait conclure $D(x_n)\, Q_q(x_n) = 0$, et $y(x)$ ne serait pas régulier au point x_1 , en contradiction avec notre hypothèse générale.

Pour le reste de ce chapitre, nous imposons $Q_j \in \mathbb{Z}[X]$ dans (3), comme nous l'avons supposé dans les théorèmes. Si nous désignons encore par $y(x)$ une branche quelconque de la fonction algébrique, alors $y(x_1) \in \overline{\mathbb{Q}}$, pour tout $x_1 \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathcal{U}_t(x_0)$ et, de plus,

(15) $$a_\varkappa(x_1) := \frac{1}{\varkappa!}\, y^{(\varkappa)}(x_1) \in \mathbb{Q}(x_1\ ,\ y(x_1)) \quad (\varkappa = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots)$$

en raison de (14). Maintenant le théorème généralisé d'EISENSTEIN nous garantit l'existence d'un $T = T(x_1) \in \mathbb{N}$ tel que $T^{\varkappa+1} a_\varkappa$ soit un entier algébrique pour $\varkappa = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots$ Finalement, sous nos hypothèses, on peut montrer (voir les indications dans [3]) l'existence de deux constantes positives γ_1 , γ_2 ne dépendant que du degré de $x_1 \in \overline{\mathbb{Q}}$ telles que

(16) $$T(x_1) \leqslant (\gamma_1\, h(x_1))^{\gamma_2} \quad \text{et} \quad \overline{|T(x_1)^{\varkappa+1}\, a_\varkappa(x_1)|} \leqslant (\gamma_1\, h(x_1))^{\gamma_2(\varkappa+1)} \ ,$$

pour $x = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots$

2. Démonstration des théorèmes.

Selon nos hypothèses, le nombre x_0 du chapitre précédent est égal à 0 . Si nous posons $t_0 := \min(1\ ,\ t)$, où t a été défini avant le lemme 1, on voit que si $|\xi| \geqslant (1/3)t_0$, alors (1) et (2) sont démontrées. C'est pourquoi nous supposons dès maintenant

(17) $$0 < |\xi| < \frac{1}{3}\, t_0 \ .$$

Démonstration du théorème 1.

Pas 1. - Avec $p\ ,\ S_1\ ,\ S_2 \in \mathbb{N}$, qui seront choisis convenablement à la fin (voir (25)), nous construisons une fonction auxiliaire (5), avec $p_1 = p$, $p_2 = q$, $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ (c_{ij} non tous nuls, mais tous pas trop grands), telle que

(18) $$\Phi^{(s)}(0) = 0 \quad (0 \leqslant s < S_1) \quad \text{et} \quad \Phi^{(s)}(\xi) = 0 \quad (0 \leqslant s < S_2) \ .$$

Ces conditions sont équivalentes à

$$(19) \qquad 0 = \frac{1}{s!}\,\Phi^{(s)}(x_1) = \sum_{i,j} c_{ij} \sum_{\sigma=0}^{\min(s,i)} \binom{i}{\sigma} x_1^{i-\sigma} \sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_j=s-\sigma} \prod_{\iota=1}^{j} a_{\lambda_\iota}(x_1) \ ,$$

où x_1 est égal à 0 ou ξ , s comme dans (18), et $a_\lambda(x_1)$ comme dans (15). Si $d_1 := \text{dén}(x_1)$, le nombre

$$(20) \qquad d_1^p\, T(x_1)^{s+q} \textstyle\sum_{\sigma=0}^{\min(s,i)} \dots \in \mathbb{Q}(x_1\ ,\ y(x_1))$$

est entier sur $\mathbb{Z}$, et sa maison est bornée par

$$c_5^{s+q} \quad (\text{pour } x_1 = 0) \ , \text{ resp. } \ c_6^{p+s}\, M^{p+c_7(s+q)} \quad (\text{pour } x_1 = \xi) \ ,$$

en raison de (16) et de $h(\xi) \leqslant M$. A partir de maintenant c_5 , c_6 , ... sont positifs et ne dépendent que de ℓ . En supposant encore

$$(21) \qquad pq \geqslant 2(S_1\, h + S_2\, \ell) \ ,$$

une forme modifiée du lemme de SIEGEL concernant des équations linéaires homogènes à coefficients algébriques (voir [7], p. 32) nous garantit l'existence de pq nombres c_{ij} comme indiqué avant (18) tels que

$$(22) \quad |c_{ij}| \leqslant 2(pqc_5^{S_1+q})^{hS_1/(pq-S_1h-S_2\ell)}\,(pqc_6^{p+S_2}\, M^{p+c_7(S_2+q)})^{\ell S_2/(pq-S_1h-S_2\ell)} =: C \ ,$$

pour $i = 0 , \dots , p-1$; $j = 0 , \dots , q-1$.

Pas 2. - Par construction, nous avons $\Phi \not\equiv 0$. Soit $\Phi^{(\bar{s})}(0) \neq 0$, mais $\Phi^{(s)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant s \leqslant \bar{s}-1$. De la deuxième équation (19), on voit que $0 \neq \bar{\delta} := (1/\bar{s}!)\Phi^{(\bar{s})}(0) \in \mathbb{Q}(y(0))$, et de plus, de (20) on peut conclure que $0 \neq \delta := T(0)^{\bar{s}+q}\,\bar{\delta}$ est entier sur $\mathbb{Z}$ tel que

$$(23) \qquad 1 \leqslant |\bar{\delta}|\ c_8^{\bar{s}}(pC)^{h-1} \ ,$$

avec le C de (22). Cela nous donne une minoration pour $|\bar{\delta}|$, et nous allons maintenant chercher une majoration.

Pas 3. - La fonction

$$F(x) := \Phi(x)x^{-\bar{s}}\,(x-\xi)^{-S_2}$$

est holomorphe en $|x| < t$. D'ailleurs, on a $F(0) = \bar{\delta}.(-\xi)^{-S_2}$ d'où, en vue du principe du maximum et de (17),

$$|\bar{\delta}| = |F(0)|\,|\xi|^{S_2} \leqslant |\xi|^{S_2} \max_{|x|=(2/3)t_0} |F(x)|$$
$$\leqslant |\xi|^{S_2} \left(\frac{3}{2t_0}\right)^{\bar{s}} \left(\frac{3}{t_0}\right)^{S_2} \max_{|x|=(2/3)t_0} |\Phi(x)| \ .$$

De (5), on voit que le dernier max est borné par $c_9^p\, C'$. D'où l'on déduit, grâce à (23),

$$(24) \qquad 1 < |\xi|^{S_2} \left(\frac{3c_8}{2t_0}\right)^{\bar{s}} \left(\frac{3}{t_0}\right)^{S_2} c_{10}^p\, C^h \ .$$

Par construction, nous savons que $\bar{s} \geqslant S_1$, ce qui ne pourrait pas nous aider, si nous n'avions pas la majoration $\bar{s} \leqslant pq + c_{11}$ de (6). Maintenant, (24) entraîne

$$|\xi| \geqslant \frac{1}{3} t_0 \, c_{12}^{-p/S_2} \, C^{-h/S_2} .$$

L'inégalité (1) s'ensuit en remplaçant C dans (22), et en choisissant

(25) $$S_1 = S_2 = S \in \underset{\sim}{N} \text{ quelconque}, \quad p = S[(\log M)^{1/2}]$$

de telle manière que (21) soit aussi vérifiée dès que M est assez grand.

Démonstration du théorème 2. - Avec p, r, S_1, $S_2 \in \underset{\sim}{N}$, on construit une fonction (11), avec $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = r$, $c_{ijk} \in \underset{\sim}{Z}$, telle que (18) soit vérifiée, ce qui équivaut à

(26) $$0 = \frac{1}{s!} \Phi^{(s)}(x_1) = \sum_{i,j,k} c_{ijk} \sum_{\sigma=0}^{s} \Big(\sum_{\tau=0}^{\min(i,\sigma)} \binom{i}{\tau} x_1^{i-\tau} \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_j=\sigma-\tau} \prod_{\iota=1}^{j} a_{\lambda_\iota}(x_1)\Big)$$
$$\times \sum_{\sigma_1+\ldots+\sigma_k=s-\sigma} A(x_1)^{\#\{\varkappa\leqslant k|\sigma_\varkappa=0\}} \prod_{\substack{\varkappa=1\\ \sigma_\varkappa\geqslant 1}}^{k} \frac{1}{\sigma_\varkappa} a_{\sigma_\varkappa-1}(x_1) .$$

Si $D_1 := \text{dén}(A(x_1))$, où $A(x_1)$ est supposé algébrique, alors le nombre

(27) $$d_1^p \, D_1^r \, T(x_1)^{s+q} \, s! \sum_{\sigma=0}^{s} \ldots \in \underset{\sim}{Q}(x_1 , y(x_1) , A(x_1))$$

est entier sur $\underset{\sim}{Z}$ et sa maison est bornée par $S_1! \, c_{13}^{S_1}$, pour $x_1 = 0$, $s < S_1$, resp. par $S_2! \, c_{14}^{p+r+S_2} M^{p+c_{15}S_2} H^r$ pour $x_1 = \xi$, $s < S_2$, où $H := h(A(\xi))$. En vue de $[\underset{\sim}{Q}(\xi , y(\xi) , A(\xi)) : \underset{\sim}{Q}] \leqslant q\ell^2$, et en supposant

(28) $$pqr \geqslant 2(S_1 h + S_2 q\ell^2) ,$$

on voit l'existence de pqr nombres $c_{ijk} \in \underset{\sim}{Z}$, non tous nuls, avec

(29) $$|c_{ijk}| \leqslant 2(pqr \, S_1! \, c_{13}^{S_1})^{hS_1/(pqr-hS_1-q\ell^2S_2)}$$
$$\times (pqr \, S_2! \, c_{14}^{p+r+S_2} M^{p+c_{15}S_2} H^r)^{q\ell^2S_2/(pqr-hS_1-q\ell^2S_2)} =: C ,$$

pour $i = 0 , \ldots , p-1$; $j = 0 , \ldots , q-1$; $k = 0 , \ldots , r-1$ tels que la fonction auxiliaire (11) satisfasse à (18).

De nouveau, on a $\Phi \neq 0$, grâce à la construction et au fait que $A(x)$ n'est pas une fonction algébrique. On définit $\bar{s}$ et $\bar{\delta}$ comme ci-dessus, et on pose

$$\delta := T(0)^{\bar{s}+q} \, \bar{s}! \, \bar{\delta} .$$

Ce δ est un élément non nul du corps $\underset{\sim}{Q}(y(0))$, entier sur $\underset{\sim}{Z}$, et vérifie

(30) $$1 \leqslant |\bar{\delta}| \, \bar{s}!^h \, c_{16}^{\bar{s}} (pr\, C)^{h-1} ,$$

avec le C de (29). Ensuite on continue comme auparavant sauf qu'il faut majorer $|\Phi(x)| \leqslant c_{17}^{p+r} C$, pour $|x| \leqslant (2/3)t_0$, à cause de (11), et utiliser $\bar{s} \leqslant c_{18}\, pr$ (voir (12)). On conclut

$$|\xi| \geqslant \frac{1}{3} t_0 \, C^{-h/S_2} \, (pr)^{-c_{19}pr/S_2} ,$$

d'où finalement

$$(31) \qquad -\log|\xi| \ll \frac{pr}{S}\log pr + \frac{\log M}{r} + \frac{\log H}{p} + \frac{S}{pr}\log S + \frac{S}{pr}\log M ;$$

en supposant $S_1 = S_2 = S$ et $(pr/S) \longrightarrow \infty$ avec $M \longrightarrow +\infty$ (ce qui implique d'ailleurs (28)). La constante implicite dans le signe $\ll$ de la formule (31) ne dépend que de ℓ.

En choisissant

$$S = [(\log M)^{1/2}] , \quad p = r = [(\log M)^{1/2} (\log\log M)^{-1/4}] ,$$

on voit que $-\log|\xi| \ll (\log M \log\log M)^{1/2}$, pour $\log H \leqslant c_{20} \log M(\log\log M)^{1/4}$, d'où le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLISS (G. A.). - Algebraic functions. - New York, American mathematical Society, 1933 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 16) ; Ann Arbor, E. Brothers, 1947.

[2] BROWNAWELL (W. D.) and MASSER (D. W.). - Multiplicity estimates for analytic functions, I, 1977 (Preprint).

[3] SCHNEIDER (T.). - Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes, Math. Z., t. 60, 1954, p. 98-108.

[4] SCHNEIDER (T.). - Rationale Punkte über einer algebraischen Kurve, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° 20, 7 p.

[5] SCHNEIDER (T.). - Eine Bemerkung zu einem Satz von C. L. Siegel, Comm. pure and appl. Math., t. 29, 1976, p. 775-782.

[6] SIEGEL (C. L.). - Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. Preuss. Akad. Wiss., 1929, p. 1-70.

[7] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 16 juin 1978)

Peter BUNDSCHUH
Mathematisches Institut der Universität
Weyertal 86-90
D-5000 KÖLN 41 (Allemagne Fédérale)