Guy Henniart

Représentations du groupe de Weil d'un corps local : conducteurs et facteurs ε

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1977-1978), exp. nº 37, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 37, 5 p.

3 avril 1978

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL : CONDUCTEURS ET FACTEURS ϵ

par Guy HENNIART

Résumé. - Soient F un corps local non archimédien et W_F le groupe de Weil (absolu) de F. Soit R une représentation linéaire continue de W_F, irréductible et de degré n. Notons $a(R)$ l'exposant de son conducteur d'Artin. Supposons R primordiale, i. e. $a(R \otimes \chi) \geqslant a(R)$, pour tout caractère χ de W_F. Alors nous montrons que l'on a

$$a(R \otimes \chi) = \sup(a(R)\ ,\ na(\chi))\ ,\ \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } W_F\ .$$

Fixons un caractère additif ψ de F, et supposons $n = 2$. Alors, si $a(\chi) \geqslant a(R)$, on a $\epsilon(R \otimes \chi\ ,\ \psi) = \epsilon(\chi\ ,\ \psi)\epsilon(\chi \det R\ ,\ \psi)$ (phénomène de dégénérescence pour les facteurs ϵ). On conjecture que, si n est quelconque, alors $a(\chi) \geqslant (2a(R))/n$ implique l'égalité

$$\epsilon(R \otimes \chi\ ,\ \psi) = \epsilon(\chi\ ,\ \psi)^{n-1}\ \epsilon(\chi \det R\ ,\ \psi)\ .$$

Abstract. - Let F be a non-archimedean local-field and W_F its absolute Weil-group. Let R be a continuous irreductible linear representation of W_F and n its degree. Let us denote by $a(R)$ the exponent of the Artin conductor of R. Let us suppose that R is primordial, i. e. $a(R \otimes \chi) \geqslant a(R)$, for every character χ of W_F. Then, we show the equality $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R)\ ,\ na(\chi))$, for every character χ of W_F. Let us choose a character χ of W_F and let us fix an additive character ψ of F. Suppose $n = 2$. Then, if $a(\chi) \geqslant a(R)$, we have

$$\epsilon(R \otimes \chi\ ,\ \psi) = \epsilon(\chi\ ,\ \psi)\epsilon(\chi \det R\ ,\ \psi)$$

(degeneracy phenomenon for the ϵ-factors). We conjecture that, for any n, the assumption $a(\chi) \geqslant (2a(R))/n$ implies the equality

$$\epsilon(R \otimes \chi\ ,\ \psi) = \epsilon(\chi\ ,\ \psi)^{n-1}\ \epsilon(\chi \det R\ ,\ \psi)\ .$$

1. La conjecture de Langlands pour GL_n.

Dans toute la suite, F désignera un corps local non archimédien, de caractéristique résiduelle p ; $\bar{F}$ sera une clôture algébrique séparable de F, et l'on notera W_F le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F [13] (app. 2).

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Nous nous intéressons à deux sortes d'objets : d'une part, les représentations continues de W_F dans $GL(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension n (nous les appellerons représentations de degré n de W_F) ; d'autre part, les représentations irréductibles admissibles [5] (p. 8) de $GL_n(F)$.

Pour $n = 1$, ce sont respectivement les caractères (continus) de W_F et ceux de $F^\times$. L'on sait que la théorie du corps de classes local établit une correspondance bijective entre ces deux types d'objets. Plus précisément, il existe une application continue surjective τ_F de W_F dans $F^\times$ et, à un caractère χ de $F^\times$, l'on associe le caractère $\chi \circ \tau_F$ de W_F. En particulier, pour $s \in \mathbb{C}$, nous noterons ω_s le caractère de W_F défini par

$$\omega_s(x) = q^{-v(\tau_F(x))} ,$$

où q est le cardinal du corps résiduel de F et v la valuation normalisée de F. Les caractères ω_s sont les caractères non ramifiés de W_F.

Désignons par ψ un caractère additif de F. Aux représentations admissibles irréductibles ρ de $GL(n , F)$ sont attachées des fonctions $L(\rho)$ qui vérifient une équation fonctionnelle et des facteurs $\varepsilon(\rho , \psi)$ qui interviennent dans cette équation [5] (théorème 3.3). Pour les représentations R de degré n de W_F, l'on définit également des fonctions $L(R)$ et des facteurs $\varepsilon(R , \psi)$ [12].

Pour $n = 1$, la correspondance donnée plus haut conserve les facteurs L et ε. C'est-à-dire que, si χ est un aaractère de $F^\times$, l'on a

$$L(\chi) = L(\chi \circ \tau_F) \quad \text{et} \quad \varepsilon(\chi , \psi) = \varepsilon(\chi \circ \tau_F , \psi) .$$

<u>Conjecture de Langlands pour</u> GL_n. - <u>Il existe une bijection naturelle entre (classes de) représentations irréductibles de degré</u> n <u>de</u> W_F <u>et (classes de) représentations admissibles irréductibles supercuspidales</u> [5] (p. 26) <u>de</u> $GL_n(F)$.

Soit R une représentation irréductible de degré n de W_F, et ρ la représentation supercuspidale correspondante de $GL_n(F)$. Le terme "naturelle" signifie que l'on a, entre autres, les propriétés suivantes :

1° $\det R = \omega_\rho \circ \tau_F$, où ω_ρ désigne le caractère central de ρ.

2° Si χ est un caractère de $F^\times$, à $R \otimes (\chi \circ \tau_F)$ est associée $\rho \otimes (\chi \circ \det)$.

3° $L(R) = L(\rho)$ et $\varepsilon(R , \psi) = \varepsilon(\rho , \psi)$.

Ces propriétés ne suffisent pas en général à caractériser la correspondance de Langlands. Néanmoins, on a le résultat suivant (voir [11] pour le cas $n = 3$, [6] pour le cas $n = 2$).

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> ρ <u>et</u> ρ' <u>deux représentations admissibles irréductibles de</u> $GL(n , F)$, <u>où</u> $n = 2$ <u>ou</u> 3. <u>Si l'on a</u> $\omega_\rho = \omega_{\rho'}$ <u>et</u>

$$\varepsilon(\rho \otimes (\chi \circ \det) , \psi) = \varepsilon(\rho' \otimes (\chi \circ \det) , \psi)$$

<u>quel que soit le caractère</u> χ <u>de</u> $F^\times$, <u>alors on a</u> $\rho = \rho'$.

La conjecture de Langlands a été établie pour $n = 2$ et $p \neq 2$, pour $n = 2$ et F de caractéristique 2, et enfin pour certaines extensions de $\mathbb{Q}_2$. On n'a pas d'autres résultats généraux.

2. Conducteurs d'Artin et exposants.

Soit R une représentation de degré n de W_F, $c(R)$ son conducteur d'Artin et $a(R)$ l'exposant de ce conducteur : On a $c(R) = \mathfrak{p}_F^{a(R)}$, où $\mathfrak{p}_F$ est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de F. Soit $a(\psi)$ le plus petit entier m tel que ψ soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^m$. Alors on a, pour $s \in \mathbb{C}$,

$$\varepsilon(R \otimes \omega_s , \psi) = \varepsilon(R , \psi) q^{-s(a(R)+na(\psi))} .$$

En vertu de la conjecture de Langlands et du théorème 1, il est intéressant d'obtenir des renseignements sur $a(R)$ et $a(R \otimes (\chi \circ \tau_F))$, pour un caractère χ de $F^\times$. Appelons π_V la projection de $GL(V)$ sur $PGL(V)$, V étant un espace vectoriel complexe de dimension n . Si R est une représentation de W_F dans $GL(V)$, la représentation projective $r = \pi_V \circ R$ sera dite associée à R , et on dira que R *relève* r *ou est un relèvement de* r . Deux représentations R et R' de W_F dans $GL(V)$ relèvent la même représentation projective si, et seulement si, il existe un caractère χ de $F^\times$ tel que l'on ait $R' = R \otimes (\chi \circ \tau_F)$.

THÉORÈME 2. - *Toute représentation (continue) de* W_F *dans* $PGL(V)$ *possède un relèvement.*

Pour la démonstration de ce théorème et celles des théorèmes suivants, voir [3].

Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Le théorème 2 nous permet de définir *l'exposant* $a(r)$ de r comme le minimum des $a(R)$ quand R parcourt l'ensemble des relèvements de r . Une représentation linéaire R de W_F sera dite *primordiale* si son exposant $a(R)$ est égal à celui de la représentation projective associée.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux représentations *irréductibles* de W_F .

THÉORÈME 3. - *Toute représentation projective irréductible de* W_F *est d'image finie.*

Par suite, le noyau d'une telle représentation r fixe une extension finie K de F . Cette propriété permet de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - *Soit* R *une représentation linéaire de* W_F , *irréductible, primordiale et de degré* n . *Soit* χ *un caractère de* W_F . *Alors on a*

$$a(R \otimes \chi) = \sup(a(R) , na(\chi)) .$$

En particulier, si $a(\chi) \geqslant a(R)/n$, on a $(R \otimes \chi) = na(\chi)$ (phénomène de dégénérescence pour les exposants).

Un cas difficile à décrire est celui où R est *primitive*, c'est-à-dire irréductible et non induite par une représentation d'un sous-groupe propre de W_F . On montre en particulier que, si R est primitive, son degré est une puissance de p [7]. Remarquons que toute représentation irréductible de W_F est l'induite d'une représentation primitive.

Nous dirons qu'une représentation projective r de degré n de W_F est *primitive* si ses relèvements le sont. Soient K le corps fixé par le noyau d'une telle représentation r , et F_1 l'extension modérément ramifiée maximale de F incluse dans K. Appelons r_1 la restriction de r à W_{F_1} et e l'indice de ramification de F_1 sur F.

THÉORÈME 5. - Soit r une représentation projective primitive de degré n de W_F. Avec les notations précédentes, l'on a

$$ea(r) = n(e - 1) + a(r_1) .$$

Remarque. - La représentation r_1 n'est plus primitive. Elle est même monomiale en ce sens que tous ses relèvements sont induits par un caractère d'un sous-groupe de W_F. Pour la question des exposants, on a ainsi réduit le cas des représentations primitives à celui des représentations monomiales.

Considérons le groupe $G = Gal(K/F)$ et notons G^u ses sous-groupes de ramification en numérotation supérieure. Soit α le plus grand indice u tel que G^u soit non trivial.

THÉORÈME 6. - Soit r une représentation projective primitive de degré $n = p^d$ de W_F. Alors on a

$$a(r) \geq p^d + (p^d + 1)\alpha .$$

Si $d = 1$, on a l'égalité dans la formule précédente.

Le cas $d = 1$ est dû à BUHLER [1]. Nous conjecturons qu'il y a égalité dans le cas général.

Ces résultats permettent de donner des informations sur les facteurs ϵ et en particulier de démontrer un phénomène de dégénérescence [4].

THÉORÈME 7. - Soit R une représentation irréductible de degré 2 de W_F. Soit χ un caractère de W_F.

Si $a(\chi) \geq a(R)$, on a

$$\epsilon(R \otimes \chi , \psi) = \epsilon(\chi , \psi)\epsilon(\chi \det R , \psi) .$$

En particulier, si l'on tord R par un caractère de W_F d'exposant assez grand, le facteur ϵ ne dépend plus que du déterminant de R.

3. Généralisations et espoirs.

On peut montrer [8] que l'analogue du théorème 7 est valable pour les représentations de $GL(2 , F)$. De même, l'analogue du théorème 4 est vrai pour les représentations de $GL(n , F)$ [2].

Les résultats de [8] (lemme 7.1) et de [9] suggèrent d'ailleurs, pour $a(\chi) \geq \frac{a(R)}{2}$, un autre type de dégénérescence des facteurs ϵ d'une représentation linéaire R de dimension 2 de W_F. Mais nous n'avons pu encore le démontrer.

Néanmoins, l'on peut voir, pour une représentation R de degré premier ℓ, induite à partir d'une extension de degré ℓ de F, que l'on a

$$\varepsilon(R \otimes \chi , \psi) = \varepsilon(\chi , \psi)^{\ell-1} \varepsilon(\chi \det R , \psi) ,$$

dès que χ est un caractère de W_F de conducteur $a(\chi) \geq (2a(R)/\ell$ [4].

L'on devrait pouvoir démontrer une telle dégénérescence pour les représentations de $GL(\ell , F)$, ℓ premier.

Remarquons enfin que le théorème 7 et son analogue pour les représentations de $GL(2 , F)$ permettent de donner la correspondance de Langlands pour le corps $F = \mathbb{Q}_2$, de manière explicite et par un nombre fini de calculs. L'on utilise pour cela le calcul des facteurs ε effectué par A. NOBS [10] et P. KUTZKO [8] pour les représentations supercuspidales dites exceptionnelles de $GL(2 , F)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUHLER (J.). - Icosahedral Galois representations. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître) (Thèse, Harvard University, 1977).

[2] CARAYOL (H.). - Représentations supercuspidales de GL_n, Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes (Gérardin), Université Paris-7, 1978, Publications mathématiques de l'Université de Paris-7 (à paraître).

[3] HENNIART (G.). - Représentations du groupe de Weil d'un corps local, Publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud (à paraître) (Thèse de 3e cycle, Orsay, 1978).

[4] HENNIART (G.). - Facteurs ε des représentations de W_F, en cours de rédaction.

[5] JACQUET (H.) and GODEMENT (R.). - Zeta-functions of simple algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 260).

[6] JACQUET (H.) and LANGLANDS (R. P.). - Automorphic forms on $GL(2)$. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 114).

[7] KOCH (H.). - Classification of the primitive representations of the Galois group of local fields, Invent. Math., Berlin, t. 40, 1977, p. 195-216.

[8] KUTZKO (P.). - The exceptional representations of GL(2), Invent. Math., Berlin (a paraître).

[9] KUTZKO (P.) et GÉRARDIN (P.). - Manuscrit en cours de rédaction.

[10] NOBS (A.). - Les représentations exceptionnelles de $GL_2(\mathbb{Q}_2)$ et $PGL_2(\mathbb{Q}_2)$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 767-769.

[11] PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I.). - Converse theory for GL(3), University of Maryland (Preprint).

[12] TATE (J.). - Local constants, "Algebraic number theory (L-functions and Galois properties)" [1975. Durham], p. 89-131. - London, Academic Press, 1977.

[13] WEIL (A.). - Basic number theory, 3rd edition. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 144).

(Texte reçu le 6 septembre 1978)

Guy HENNIART
Attaché de Recherches CNRS
Université Paris-Sud
91405 ORSAY