

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BERTRAND

Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 36, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A10_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS MODULAIRES, COURBES DE TATE
ET INDÉPENDANCE ALGÈBRIQUE

par Daniel BERTRAND

Résumé. - Dans la première partie de cet exposé (§ 2 et § 3), nous rappelons, à l'occasion d'un résultat d'indépendance algébrique récemment obtenu par G. CHOUDNOVSKY [9], certaines propriétés arithmétiques des dérivées de la fonction modulaire $j(\tau)$, et leur lien avec les constantes de la théorie des fonctions elliptiques. Dans la seconde partie (§ 4 à § 6), nous établissons une version p -adique du résultat de CHOUDNOVSKY, et nous proposons quelques conjectures.

1. Introduction.

Soit

$$J(q) = (1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} (n^3 q^n / (1 - q^n)))^3 / (q (\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n))^{24})$$

le développement de Fourier à l'infini de la fonction invariant modulaire $j(\tau)$. L'expression $J(q)$ définit, tant dans le domaine complexe que dans un domaine ultramétrique $\mathbb{C}_p$, une fonction analytique sur le disque unité "ouvert" privé de l'origine. Cette fonction vérifie une équation différentielle algébrique du troisième ordre par l'opérateur de dérivation

$$\theta = q \, d/dq \, .$$

Nous nous proposons ici d'étudier certaines propriétés arithmétiques des valeurs de ses deux premières dérivées. Nous obtiendrons en particulier le résultat suivant.

THÉORÈME 1 (resp. 1(p)). - Si q désigne un nombre complexe (resp. un élément de $\mathbb{C}_p$), où J est définie et prend une valeur algébrique différente de 0 ou de 1728 (resp. une valeur algébrique), les nombres $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Dans le cas complexe, l'assertion est un corollaire immédiat de récents travaux de G. CHOUDNOVSKY [9] sur les périodes et les pseudo-périodes de fonctions elliptiques de Weierstrass. Ce lien tient à quelques formules classiques, que nous rappelons au § 2. La situation peut être précisée dans le cas de multiplication complexe (§ 3), où l'on dispose de plus d'une relation d'algébricité. Cette relation, de nature modulaire, a été généralisée par SHIMURA [19]; elle équivaut à un énoncé de nature elliptique obtenu par MASSER [14], et BROWNAWELL-KUBOTA [7].

La démarche du § 2 ne peut être suivie dans le cas ultramétrique. Reprenant l'idée de [4], nous résolvons le problème en développant la méthode de CHOUDNOVSKY dans le cadre de la théorie de Jacobi-Tate (§ 4). Parallèlement à [9], nous déduisons le théorème 1(p) d'un énoncé plus général (§ 5), où apparaît une fonction ξ analogue à la fonction ζ de Weierstrass.

Nous concluons, au § 6, par quelques conjectures faisant intervenir la nature arithmétique des nombres q et τ .

2. Le cas complexe.

Soient p une fonction elliptique de Weierstrass, $\{\omega_1, \omega_2\}$ un couple de périodes fondamentales de p tel que $\tau = \omega_1/\omega_2$ ait une partie imaginaire > 0 , $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2)$ et $g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2)$ les invariants de la fonction p , ζ sa primitive impaire, et pour $i = 1, 2$, $\eta_i = \eta_i(\omega_1, \omega_2) = 2\zeta(\omega_i/2)$.

Le résultat suivant a été annoncé par G. CHOUDNOVSKY (pour la démonstration, voir, par exemple, WALDSCHMIDT [21]). Nous montrons ci-dessous comment il entraîne le théorème 1.

THÉOREME 2 [9]. - Soit u un nombre complexe, où p est définie et prend une valeur algébrique. Si g_2 et g_3 sont algébriques, et si u est $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendant de ω_2 , les nombres η_2/ω_2 et $\zeta(u) - (\eta_2/\omega_2)u$ sont algébriquement indépendants.

En vertu de la relation de Legendre :

$$\eta_2 \tau - \eta_1 = 2i\pi/\omega_2,$$

le théorème 2 entraîne, pour $u = \omega_1/2$, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1 [9]. - Si g_2 et g_3 sont algébriques, les nombres η_2/ω_2 et π/ω_2 sont algébriquement indépendants.

Soit $j(\tau) = 1728/(1 - 27 g_3^2/g_2^3)$ l'invariant modulaire de la fonction p . L'application $\tau \rightarrow j(\tau)$ définit une fonction analytique sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$. On a, en désignant d'une apostrophe l'opérateur de dérivation $d/d\tau$,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{j'(\tau)}{2i\pi j(\tau)} = 18 \left(\frac{\omega_2}{2i\pi}\right)^2 \frac{g_3(\omega_1, \omega_2)}{g_2(\omega_1, \omega_2)} \\ \frac{j''(\tau)}{2i\pi j'(\tau)} = -2 \frac{\omega_2}{2i\pi} \frac{\eta_2}{2i\pi} + W(j(\tau)) \left(\frac{\omega_2}{2i\pi}\right)^2 \frac{g_3(\omega_1, \omega_2)}{g_2(\omega_1, \omega_2)} j(\tau) \end{cases},$$

où $W(j(\tau)) = (12/j(\tau)) + (9/(j(\tau) - 1728))$.

Nous rappelons plus bas la démonstration de ces formules classiques.

En dehors des zéros de la fonction j' , le corollaire 1 est donc équivalent à l'assertion suivante.

COROLLAIRE 2. - Soit τ un élément de $\mathbb{H}$ non-zéro de j' . Si $j(\tau)$ est algébrique, les nombres $j'(\tau)/2i\pi$ et $j''(\tau)/(2i\pi)^2$ sont algébriquement indépendants.

Comme il est bien connu, les seuls zéros de j' sont les images des racines quatrièmes (resp. sixièmes) de l'unité par l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$. En ces points, la fonction $j(\tau) - 1728$ (resp. $j(\tau)$) a un zéro d'ordre 2

resp. 3). De plus, on a, pour $q = \exp 2i\pi\tau$, $j(\tau) = J(q)$, et l'opérateur $(1/2i\pi)d/d\tau$ est transformé, par ce changement de variable, en θ . Le théorème 1 équivaut donc au corollaire 2, et est démontré.

Démonstration des formules (1). - Soient P , Q et R les séries d'Eisenstein normalisées de poids 2, 4 et 6. On a, en reprenant les notations précédentes,

$$Q(q) = 12 g_2(2i\pi\tau, 2i\pi) = 12(\omega_2/2i\pi)^4 g_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$R(q) = -216 g_3(2i\pi\tau, 2i\pi) = -216(\omega_2/2i\pi)^6 g_3(\omega_1, \omega_2),$$

et (voir, par exemple, [10], I, chap. 4, § 9, formule 9)

$$P(q) = -12 \eta_2(2i\pi\tau, 2i\pi)/2i\pi = -12(\omega_2/2i\pi)(\eta_2(\omega_1, \omega_2)/2i\pi).$$

La stabilité de l'algèbre $\mathbb{Q}[P, Q, R]$, par l'opérateur θ (voir, par exemple, SWINNERTON-DYER [1], lemme 3) :

$$12 \theta P = P^2 - Q; \quad 3 \theta Q = PQ - R; \quad 2 \theta R = PR - Q^2,$$

entraîne, par dérivation logarithmique de la relation $J = 1728 \times Q^3/(Q^3 - R^2)$,

$$\theta J/J = -R/Q,$$

$$\theta^2 J/\theta J = P/6 + 2 \theta J/(3J) - Q^2/(2R),$$

soit

$$j'(\tau)/(2i\pi j(\tau)) = 18(\omega_2/2i\pi)^2 g_3/g_2,$$

$$j''(\tau)/(2i\pi j'(\tau)) = (-2 \eta_2 \omega_2/(2i\pi)^2) + (\omega_2/2i\pi)^2 (g_3/g_2) w(g_2, g_3),$$

avec :

$$w(g_2, g_3) = 12 + (g_2^3/3g_3^2) = 12 + (9j/(j - 1728)) = j W(j).$$

Remarque 1. - Une troisième dérivation fournit l'équation différentielle algébrique satisfaite par la fonction $J(q)$:

$$12 \theta \left(\frac{6 \theta^2 J}{\theta J} - (\theta J) \left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J - 1728} \right) \right) = \left(\frac{6 \theta^2 J}{\theta J} - (\theta J) \left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J - 1728} \right) \right)^2 - \frac{(\theta J)^2}{J(J - 1728)}.$$

3. Le cas de multiplication complexe.

Il s'agit, dans la situation décrite au § 2, du cas où τ est quadratique sur $\mathbb{Q}$. Nous notons $N\tau = \tau\bar{\tau} = \tau(\tau - 2i \operatorname{Im} \tau)$ sa norme sur $\mathbb{Q}$.

L'énoncé suivant a été établi par MASSER (voir [14], chap. III, et appendice 1), et, de façon moins précise, par BROWNAWELL et KUBOTA [7].

PROPOSITION 1 [14]. - Si p admet une multiplication complexe, il existe un élément $\kappa = \kappa(\omega_1, \omega_2)$ du corps $\mathbb{Q}(\tau, g_2, g_3)$ tel que :

$$\tau\eta_1 - (N\tau)\eta_2 = \kappa\omega_1.$$

De plus, le nombre $\psi(\tau)$, défini par

$$\kappa(\omega_1, \omega_2) = 2i \operatorname{Im} \tau \frac{g_3(\omega_1, \omega_2)}{g_2(\omega_1, \omega_2)} \psi(\tau),$$

appartient au corps $\mathbb{Q}(j(\tau))$.

La proposition 1, jointe à la relation de Legendre, entraîne

$$(\tau^2 - N\tau)\eta_2 = (2i\pi\tau/\omega_2) + \kappa(\omega_1, \omega_2)\tau\omega_2,$$

soit

$$2i(\operatorname{Im} \tau)\eta_2 \omega_2 / (2i\pi)^2 = (1/2i\pi) + \kappa(\omega_2/2i\pi)^2.$$

En vertu des formules (1), cette relation s'écrit, pour $j'(\tau) \neq 0$,

$$-\frac{j''(\tau)}{2i\pi j'(\tau)} = \frac{1}{2i\pi(i \operatorname{Im} \tau)} - \frac{j'(\tau)}{2i\pi j(\tau)} \lambda(\tau) j(\tau),$$

où $j(\tau) \lambda(\tau) = (-1/18)(2\psi(\tau) - j(\tau)W(\tau))$,

soit

$$(2) \quad \frac{2\psi(\tau)}{3j(\tau)} + 6\lambda(\tau) = \frac{4}{j(\tau)} + \frac{3}{j(\tau) - 1728}.$$

En dehors des zéros de j' , la proposition 1 est ainsi équivalente à l'assertion suivante, dont la première partie est classique (voir, par exemple, la dernière remarque de l'article de SIEGEL [20]).

PROPOSITION 2. - Soit τ un élément de $\mathbb{K}$ quadratique sur $\mathbb{Q}$. Alors, les nombres $j'(\tau)$, $j'(\tau)^2$ et $j''(\tau)$ sont linéairement dépendants sur le corps $\mathbb{Q}(\tau, j(\tau))$. De plus, si τ n'est pas zéro de j' , le nombre $\lambda(\tau)$, défini par

$$j''(\tau) - (i j'(\tau) / \operatorname{Im} \tau) = \lambda(\tau)(j'(\tau))^2,$$

appartient au corps $\mathbb{Q}(j(\tau))$.

La proposition 2, jointe au corollaire 2 du théorème 1, fournit un nouvel énoncé d'indépendance algébrique. Bien entendu, celui-ci est également une conséquence du résultat antérieur de CHOUDNOVSKY sur le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2)$ (voir [5], (7)).

COROLLAIRE 3. - Si τ désigne un élément de $\mathbb{K}$, quadratique sur $\mathbb{Q}$, où j' ne s'annule pas, les nombres π et $j'(\tau)$ sont algébriquement indépendants.

Les propositions 1 et 2 appellent quelques remarques.

Remarque 2. - La proposition 2 montre, en particulier, que le nombre $\lambda(\tau)$, défini pour $j'(\tau) \neq 0$, appartient au corps $\mathbb{Q}(\tau)_{ab}$, où K_{ab} désigne l'extension abélienne maximale du corps de nombres K . Ce fait a été généralisé par SHIMURA dans [19]. Voici un cas particulier de son résultat : soient r et e deux entiers ≥ 0 , et, pour tout entier $m > 0$, $\mathcal{U}_m$ l'ensemble des fonctions modulaires (pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$) qui s'écrivent comme quotient de deux formes modulaires, de poids respectifs $m + 2n$ et $2n$ (pour un entier $n \geq 0$), dont les développements de Fourier à l'infini ont des coefficients cyclotomiques (i. e. appartenant à

$\mathbb{Q}_{ab}$). Soient $f \in \mathcal{U}_r$, $g \in \mathcal{U}_{r+2e}$, et posons :

$$h(z) = \frac{1}{(2i\pi)^e} \left[\left(\frac{r+2(e-1)}{2i \operatorname{Im} z} + \frac{d}{dz} \right) \dots \left(\frac{r+2}{2i \operatorname{Im} z} + \frac{d}{dz} \right) \left(\frac{r}{2i \operatorname{Im} z} + \frac{d}{dz} \right) \right] f.$$

Dans ces conditions, si τ désigne un élément de $\mathbb{H}$, quadratique sur $\mathbb{Q}$, où f , g et g^{-1} sont holomorphes, le nombre $h(\tau)/g(\tau)$ appartient à $\mathbb{Q}(\tau)_{ab}$.

Appliquant ce résultat aux fonctions $f = j'/2i\pi$, qui appartient à $\mathcal{U}_2$ (elle s'écrit : $1728 RQ^2/(Q^3 - R^2)$), et $g = f^2$, on obtient la relation de la proposition 2 :

$$(j''(\tau)/(2i\pi)^2) + (j'(\tau)/((2i\pi)^2 i \operatorname{Im} \tau)) = \lambda(\tau)(j'(\tau)/2i\pi)^2,$$

avec $\lambda(\tau) \in \mathbb{Q}(\tau)_{ab}$. Le théorème III de [19] permet de plus de préciser la nature arithmétique de $\lambda(\tau)$.

Remarque 3. - Posons, avec les notations de la proposition 1,

$$S = S(\omega_1, \omega_2) = (6i/\operatorname{Im} \tau) \kappa(\omega_1, \omega_2) = -12(g_3/g_2) \psi(\tau),$$

de sorte que

$$-\frac{S}{12} = \frac{\kappa}{2i \operatorname{Im} \tau} = \frac{\eta_2}{\omega_2} - \frac{2i\pi\bar{\omega}_2}{\omega_2(\omega_1\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\omega_2)}.$$

D'après les travaux de HECKE (voir, par exemple, [11] ⁽¹⁾, remarque 1.3.11), l'expression ci-dessus n'est autre que la fonction

$$-\frac{1}{12} S(\omega_1, \omega_2) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^2 |n_1\omega_1 + n_2\omega_2|^{2s}}.$$

Vue en ces termes, la proposition 1 semble bien connue. Une formule classique (voir par exemple [16], (7)) montre que $(g_2/g_3) S(\omega_1, \omega_2)$ appartient au corps de classes de Hilbert $\mathbb{Q}(\tau, j(\tau))$ de $\mathbb{Q}(\tau)$. Ainsi que me l'a fait remarquer G. ROBERT, on peut alors se ramener, par l'automorphisme d'Artin, au cas où $j(\tau)$ est réel ; elle entraîne dans ce cas que $(g_2/g_3)S$ est réel, donc appartient à $\mathbb{Q}(j(\tau))$.

Remarque 4. - La proposition 1 montre l'existence d'un élément

$$\alpha = -\kappa/(2i \operatorname{Im} \tau) = S/12$$

du corps $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \tau)$ tel que

$$\omega_1 = \tau\omega_2, \quad \eta_1 + \alpha\omega_1 = \bar{\tau}(\eta_2 + \alpha\omega_2).$$

La cohomologie de De Rham sur la courbe elliptique associée à p (voir KATZ [1], appendice 1, et [11], lemme 1.3.1) fournit une interprétation naturelle de ces formules. Précisons qu'en vertu du lemme 3.2 de MASSER [14], le nombre α ne s'annule que si $g_2 g_3 = 0$, i. e. si τ est zéro de j' .

⁽¹⁾ Dans [11], c'est ω_2/ω_1 que l'on choisit de partie imaginaire > 0 ; mais le signe des pseudo-périodes est inversé (formule 1.2.4). D'autre part, le calcul de l'aire du réseau est, à la formule 1.3.2, incorrectement reproduit.

4. Quelques fonctions liées aux courbes de Tate.

Dans ce qui suit, p désigne un nombre premier, et $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p -adiques. On note $|\cdot|$ la valeur absolue de $\mathbb{C}_p$, et q un élément de $\mathbb{C}_p$ tel que $0 < |q| < 1$. D'après la théorie de Tate, le nombre $J(q)$, défini au § 1, est l'invariant modulaire d'une courbe elliptique (E_q) isomorphe à $\mathbb{C}_p^\times / \langle q \rangle$, où $\langle q \rangle$ désigne le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}_p^\times$ engendré par q . Comme $J(q)$ (ainsi, d'ailleurs, que $\theta J(q)$) a une valeur absolue > 1 , la courbe (E_q) n'admet pas de multiplication complexe.

Le théorème 1(p) a été démontré dans [6]. Nous le déduirons ici d'un énoncé plus général (théorème 2(p), § 5) qui fait pendant au théorème 2, et pour lequel nous construisons tout d'abord un analogue de la fonction $\zeta(Z) - (\eta_2/\omega_2)Z$. Cette construction est rendue possible par le fait que les fonctions $p(Z)$ et $\zeta(Z) - (\eta_2/\omega_2)Z$ ont une période commune. Signalons à ce propos que la démarche exposée plus bas est universelle, en ce sens qu'on peut également la suivre pour traiter le cas complexe.

Afin de paramétrer un modèle de (E_q) défini sur le corps $\mathbb{Q}(J(q))$ (voir formule (3) ci-dessous), nous introduisons le représentant $(\theta J(q)/J(q))^{-1}$ de l'invariant de Hasse de E_q (voir [17], p. 71), et nous posons, avec les notations du § 2,

$$\gamma = \gamma(q) = (Q(q)/R(q))^{1/2} = (-\theta J(q)/J(q))^{-1/2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(q) = \gamma^2(q) P(q)/12 = Q(q) P(q)/(12 R(q)).$$

Soit $\Theta = \Theta_q$ la fonction analytique sur $\mathbb{C}_p^\times$, définie par

$$\Theta(z) = \gamma^{-1}(1 - z^{-1}) \prod_{n \geq 1} [1 - q^n z](1 - q^n z^{-1}) / (1 - q^n)^2.$$

[A un facteur près, la fonction Θ_q correspond, dans le cas complexe, à

$$\exp(-(1/2)(\eta_2/\omega_2)Z^2 - i\pi Z/\omega_2) \sigma(Z),$$

où σ désigne la fonction σ de Weierstrass associée au couple $\{\omega_1, \omega_2\}$, et où l'on a posé $z = \exp 2i\pi(Z/\omega_2)$, $q = \exp 2i\pi(\omega_1/\omega_2)$.]

Nous définissons ⁽²⁾ alors les fonctions $\xi = \xi_q$ et $\varphi = \varphi_q$ par

$$\Delta\Theta/\Theta = \xi - \gamma/2$$

$$\Delta\xi = -\varphi + \varepsilon,$$

où $\Delta = \Delta_q$ désigne l'opérateur de dérivation

$$\Delta = \gamma z \, d/dz.$$

[La fonction ξ/γ (resp. φ/γ^2) est la fonction $\zeta + 1/2$ (resp. $p + 1/12$, formule (26)) de [17].]

Les fonctions φ et $\Delta\varphi$ engendrent le corps $\mathbb{F}_q$ des fonctions analytiques sur

⁽²⁾ Dans [6], ξ désigne la dérivée logarithmique de Θ . La dernière assertion de cette note concerne la fonction ξ définie ci-dessus.

$\mathbb{C}_p^x$ admettant q pour période (multiplicative), et vérifient :

$$(3) \quad (\Delta\varphi)^2 = 4\varphi^3 - \frac{J(q)}{12(J(q) - 1728)} \varphi + \frac{J(q)}{216(J(q) - 1728)} .$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à certaines relations fonctionnelles qui seront utilisées dans la démonstration du théorème 2(p) (voir [21] pour leurs analogues complexes). On désigne par m un entier ≥ 1 , et par $\psi_m(\varphi, \Delta\varphi)$ l'élément de $\mathfrak{F}_q$ qui correspond, sur (E_q) , à la fonction rationnelle ψ_m définie dans [8] (lemme 7.2). Son carré vaut :

$$\psi_m^2(\varphi) = m^2 \prod_{\substack{0 \leq \lambda, \mu < m \\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}} (\varphi - \varphi(\zeta_m^\lambda q_m^\mu)) ,$$

où ζ_m désigne une racine primitive m -ième de l'unité, et q_m une racine m -ième de q .

La relation $\Theta(q^{-1}z) = -z \Theta(z)$ entraîne :

$$\Theta(q^{-m}z) = (-1)^m q^{-m(m-1)/2} z^m \Theta(z) ,$$

et montre que la fonction $\Theta(z^m)/(z^{m(m-1)/2} \Theta(z)^{m^2})$ appartient à $\mathfrak{F}_q$. Comme elle a le même diviseur que $\psi_m(\varphi, \Delta\varphi)$, le théorème d'Abel-Jacobi ([17], proposition 1) montre qu'elle lui est proportionnelle. On calcule le facteur de proportionnalité en multipliant la relation par $(1 - z^{-1})^{m^2-1}$ et en faisant tendre z vers 1. On obtient

$$\Theta(z^m) = (-1)^{m-1} z^{m(m-1)/2} \Theta(z)^{m^2} \psi_m(\varphi(z), \Delta\varphi(z)) .$$

Remarque 5. - Cette formule fournit une interprétation élémentaire du symbole introduit par NERON dans [15].

En dérivant les relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \xi(q^{-m}z) &= \xi(z) + m\gamma \\ \xi(z^m) &= m \xi(z) + \frac{1}{m} \frac{\Delta(\psi_m(\varphi(z), \Delta\varphi(z)))}{\psi_m(\varphi(z), \Delta\varphi(z))} , \end{aligned}$$

et, bien entendu :

$$\begin{aligned} \varphi(q^{-m}z) &= \varphi(z) \\ \varphi(z^m) &= \Phi_m(\varphi(z))/\psi_m^2(\varphi(z)) , \end{aligned}$$

où Φ_m désigne la fonction rationnelle définie dans [8] (lemme 7.2).

Ces relations fonctionnelles, jointes à un lemme technique sur les algèbres différentielles de type fini, entraînent le résultat suivant. Rappelons que la hauteur $H(f)$ d'un polynôme f à coefficients entiers algébriques désigne le maximum des différentes valeurs absolues archimédiennes de ses coefficients.

LEMME 1. - On suppose que $J(q)$ appartient à un corps de nombres K , d'anneau d'entiers O_K , et on note u un point de $\mathbb{C}_p^x$, où φ et $\Delta\varphi$ sont définies et

prennent des valeurs dans K . Il existe un entier rationnel $C = C(q, u) > 0$, effectivement calculable en fonction de q et de u , et vérifiant la propriété suivante. Soient $L \geq 1$, $m \geq 1$ et $k \geq 0$ trois entiers tels que u^m n'appartienne pas à $\langle q \rangle$, et P un élément de $O_K[X_1, X_2, X_3]$, de degrés partiels $\leq L$, de hauteur $H(P) = H$. Alors, la fonction $F = P(\varepsilon, \varphi, \xi)$ est analytique au voisinage des points u et u^m , et vérifie :

$$C^{Lm^2+k} m^{L+k} \Delta^k F(u^m) = R_{k,m,F}(\varepsilon, \xi(u)) + \sum_{0 \leq s < k} r_{s,m}(u) \Delta^s F(u^m),$$

où les fonctions $r_{s,m}$ sont analytiques au voisinage de u , et $R_{k,m,F}$ désigne un élément de $O_K[X_1, X_2]$, de degrés partiels $\leq 2L$, tel que

$$H(R_{k,m,F}) \leq H C^{Lm^2+k} (Lm^2 + k)^k.$$

Démonstration. - En vertu des relations fonctionnelles décrites plus haut, la fonction $m^L \psi_m^{3L}(\varphi, \Delta\varphi)(z) F(z^m)$ s'écrit comme un polynôme P_m en $\varphi(z)$, $\Delta\varphi(z)$, ε et $\xi(z)$. L'analogie, sur le modèle de Tate, du lemme 3 de [3] permet d'évaluer

$$R_{k,m,F} = \Delta^k P_m(\varphi(z), \Delta\varphi(z), \varepsilon, \xi(z)).$$

On conclut par la formule de Leibniz.

5. Le cas ultramétrique.

On reprend les notations φ_q , ξ_q , $\gamma(q)$ et $\varepsilon(q)$ introduites au § 4.

THÉOREME 2(p). - Soit q un élément de $\mathbb{C}_p^\times$, $|q| < 1$, où J prend une valeur algébrique. Si u désigne un élément de $\mathbb{C}_p^\times$, non racine de l'unité, où φ_q est définie et prend une valeur algébrique, les nombres $\varepsilon(q)$ et $\xi_q(u)$ sont algébriquement indépendants.

La relation $\Theta(z^{-1})/\Theta(z) = (1-z)/(1-z^{-1})$ montre que

$$\xi(z^{-1}) + \xi(z) = 0,$$

d'où, par pseudo-périodicité, $\xi(q^{-1/2}) = \gamma/2$ (alors que $\xi(-1) = 0$). Pour $u = q^{-1/2}$, le théorème 2(p) entraîne donc le résultat suivant, dont une démonstration directe a été donnée dans [6].

COROLLAIRE 4. - Si $J(q)$ est algébrique, les nombres $\xi(q)$ et $\gamma(q)$ sont algébriquement indépendants.

D'après la définition de ε et de γ (§ 4) et les formules rappelées au § 2, ce corollaire équivaut au théorème 1(p).

Nous esquissons maintenant la démonstration du théorème 2(p). Nous notons K le corps de nombres $\mathbb{Q}(J(q), \varphi(u), \Delta\varphi(u))$, et nous supposons que, contrairement à sa conclusion, le corps $K(\xi(u), \varepsilon)$ a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ égal à 1. D'après le lemme suivant, c'est donc une extension algébrique de $K(\varepsilon)$.

LEMME 2. - Si $J(q)$ est algébrique, $\varepsilon(q)$ est transcendant.

Démonstration. - Le théorème 1 de [4] est encore valable lorsqu'on y remplace l'opérateur de dérivation $z(d/dz)$ par Δ_q . Or les fonctions φ et ξ sont algébriquement indépendantes, et d'ordre inférieur à tout nombre réel > 0 . Le corps $\mathbb{Q}(J(q), \varphi(-1), \Delta\varphi(-1), \varepsilon(q), \xi(-1))$ a donc un degré de transcendance ≥ 1 . Mais c'est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(J(q), \varepsilon(q))$.

Dans ce qui suit, les lettres $c_1, c_2, \dots$ désignent des nombres réels > 0 effectivement calculables en fonction de q et de u , et n est un entier rationnel $\geq c_1$. Le principe des tiroirs de Dirichlet, joint au lemme 1, permet de construire un élément P de $\mathcal{O}_K[X_1, X_2, X_3]$, de degré $\leq L$, où

$$L = n^2 [\log n]^6,$$

de hauteur $\leq c_2 n^4 (\log n)^5$, tel que, si l'on pose

$$k = n^3 [\log n]^{11},$$

la fonction $F = P(\varepsilon, \varphi, \xi)$ vérifie, pour tout entier m tel que $1 \leq m \leq n$ et u^m n'appartienne pas à $\langle q \rangle$, et tout entier s tel que $0 \leq s < k$,

$$\Delta^s F(u^m) = 0.$$

Pour tout entier $\ell \geq 0$, notons C_ℓ la couronne $\{z \in \mathbb{C}_p^\times; |q|^\ell < |z| < |q|^{-\ell}\}$. D'après le lemme de [6] (§ 2), la fonction F admet au plus $c_3(L^2 + Ln)$ zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) sur C_n . Il existe un entier $k_0 \leq K$, où $K = c_4 n^3 [\log n]^{12}$, tel que l'un au moins des points u^m considérés plus haut, soit u^{m_0} , soit zéro d'ordre k_0 de F .

La fonction $\Theta^{3L} F$ est analytique sur $\mathbb{C}_p^\times$. Le lemme 2 de [4] (lemme de Schwarz pour les couronnes emboîtées), appliqué aux couronnes C_h et C_{2h} , avec $h = n^2 [\log n]^4$, entraîne donc :

$$|\Delta^{k_0} F(u^{m_0})| < q^{-knh/4} c_5^{Lh^2 + Kn},$$

$$|\Delta^{k_0} F(u^{m_0})| \leq c_6^{-n^6 (\log n)^{15}}.$$

La norme de $\Delta^{k_0} F(u^{m_0})$, relativement à l'extension $K(\varepsilon, \xi(u))$ de $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, fournit, après en avoir chassé les dénominateurs, un élément P_n de $\mathbb{Z}[X]$, tel que

$$|P_n(\varepsilon)| < c_7^{-n^6 (\log n)^{15}}$$

$$d^0(P_n) \leq c_8 L = c_8 n^2 [\log n]^6$$

$$H(P_n) \leq c_9^{Ln^2 + K \log K} \leq c_{10} n^4 (\log n)^6$$

En vertu du lemme 10 de [2] (analogue p -adique du critère de transcendance de Gel'fond), l'existence d'une suite de polynômes $\{P_n; n \in \mathbb{N}, n \geq c_1\}$ vérifiant

les propriétés ci-dessus entraîne que le nombre ε est algébrique sur $\mathbb{Q}$, ce qui contredit le lemme 2.

6. Questions ouvertes.

En dehors du résultat de SCHNEIDER [18] selon lequel les nombres τ et $j(\tau)$ ne peuvent être simultanément algébriques que dans le cas de multiplication complexe, on connaît peu de choses sur les propriétés de transcendance de l'argument τ . La conjecture suivante concerne $\exp 2i\pi\tau$. Elle a été proposée par MANIN dans le cas ultramétrique, et par MAHLER et MANIN dans le cas complexe.

CONJECTURE 1 (resp. 1(p)) ([13], I, § 4 et [12]). - Soit q un nombre complexe (resp. un élément de $\mathbb{C}_p$) algébrique sur $\mathbb{Q}$, où J est définie. Alors, $J(q)$ est transcendant.

Signalons que les hypothèses de cette conjecture excluent le cas de multiplication complexe : c'est évident dans le cas ultramétrique (voir le premier alinéa du § 4); dans le cas complexe, c'est une conséquence du théorème de Gel'fond-Schneider ($q = \exp 2i\pi\tau$ est transcendant si τ est algébrique et irrationnel).

Une façon d'aborder la conjecture 1 consisterait à montrer que si le nombre $J(q)$ est algébrique, alors, les nombres q , $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants (on peut alors faire intervenir, comme "fonction auxiliaire", un polynôme en q , ε , z , $\varphi(z)$, $\xi(z)$ et $\theta(z)$). Dans cet esprit, nous proposons la conjecture plus générale suivante.

CONJECTURE 2 (resp. 2(p)). - Soit q un nombre complexe (resp. un élément de $\mathbb{C}_p$) algébrique sur $\mathbb{Q}$, où J est définie. Alors, les nombres $J(q)$, $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants.

Revenons, pour terminer, sur le cas de multiplication complexe. L'expression $\lambda(\tau)$ définie par la proposition 2 (ou la formule (2)) se prolonge par continuité en une fonction analytique réelle, que nous noterons encore λ , sur le demi-plan de Poincaré privé de l'ensemble des zéros de j' . Dans [11] (4.0.8), KATZ pose la question suivante : si $g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_3(\omega_1, \omega_2)$ et $S(\omega_1, \omega_2)$ (voir § 3, remarque 3) sont simultanément algébriques, le nombre ω_1/ω_2 est-il nécessairement quadratique sur $\mathbb{Q}$? D'après les calculs du § 3, cette question est équivalente au problème suivant, que nous proposons sous forme de conjecture.

CONJECTURE 3. - Soit τ un élément de $\mathbb{H}$, où λ est définie. Les fonctions j et λ ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques au point τ que dans le cas de multiplication complexe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Modular functions of one variable, III, Proceedings international summer school [1972, Antwerpen]. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).
- [2] ADAMS (W. W.). - Transcendental numbers in the p -adic domain, Amer. J. Math., t. 88, 1966, p. 279-308.
- [3] BAKER (A.). - On the quasi-periods of the Weierstrass ζ -function, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math-phys. Kl., t. 2, 1969, p. 145-157.
- [4] BERTRAND (D.). - Séries d'Eisenstein et transeendance, Bull. Soc. math. France, t. 104, 1976, p. 309-321.
- [5] BERTRAND (D.). - Transcendance de valeurs de la fonction gamma, d'après G. V. Čudnovskij, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des Nombres, 17^e année, 1975/76, n° G8, 5 p.
- [6] BERTRAND (D.). - Modular functions and algebraic independence, "Proceedings of a Conference on p -adic analysis [1978, Nijmegen]" (à paraître).
- [7] BROWNAWELL (D.) and KUBOTA (K.). - The algebraic independence of Weierstrass functions and some related members, Acta Arithm., Warszawa, t. 33, 1977, p. 111-149.
- [8] CASSELS (J. W. S.). - Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. London math. Soc., t. 41, 1966, p. 193-291.
- [9] CHOUDNOVSKY (G. V.). - Transcendance arising from exponential and elliptic functions, Colloquium de Mathématiques des Universités parisiennes, 1977.
- [10] FRICKE (R.). - Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Vol. 1 : Die Funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1916.
- [11] KATZ (N. M.). - p -adic interpolation of real analytic Eisenstein series, Annals of Math., Series 2, t. 104, 1976, p. 459-571.
- [12] MAHLER (K.). - On the coefficients of the 2^n -th transformation polynomial for $j(\omega)$, Acta Arithm., Warszawa, t. 21, 1972, p. 89-97.
- [13] MANIN (Yu. I.). - Corps cyclotomiques et courbes modulaires [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 26, 1971, p. 7-71.
- [14] MASSER (D.). - Elliptic functions and transcendence. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 437).
- [15] NÉRON (A.). - Hauteurs et fonctions θ , Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, t. 46, 1976, p. 111-135.
- [16] ROBERT (G.). - Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, Thèse Université Paris-Sud, Orsay, 1977.
- [17] ROQUETTE (P.). - Analytic theory of elliptic functions over local fields. - Göttingen, Vandenoock und Ruprecht, 1970 (Hamburger mathematische Einzelschriften, Neue Folge, 1).
- [18] SCHNEIDER (T.). - Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 1-13.
- [19] SHIMURA (G.). - On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, Annals of Math. Series 2, t. 102, 1975, p. 491-515.
- [20] SIEGEL (C. L.). - Bestimmung der elliptischen Modulfunktion durch eine Transformationsgleichung, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 27, 1964, p. 32-38.
- [21] WALDSCHMIDT (H.). - Nombres transcendants : Indépendance linéaire et algébrique de périodes et pseudo-périodes, 1978 (manuscrit).

(Texte reçu le 19 juin 1978)

Daniel BERTRAND, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique,
91128 PALAISEAU CEDEX.