

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PIERRE LIARDET

Répartition et ergodicité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1977-1978),
exp. n° 10, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A8_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION ET ERGODICITÉ

par Pierre LIARDET

Résumé. - Soit T_x le produit croisé $(x, g) \mapsto (Tx, g.f(x))$ sur $X \times G$, X espace de probabilités et G groupe métrique compact. On étudie l'ergodicité et le mixage de T_x ; les théorèmes classiques de H. FURSTENBERG et J. P. CONZE ([1], [3]) sont précisés par quelques améliorations appliquées à l'équirépartition. Au passage, on verra que le théorème de W. A. VEECH sur les suites génératrices de suites équiréparties (théorème 2 [13]) est inexact dans un cas (et seulement ce cas).

1. Introduction et notations.

Soit $n \mapsto x_n$ une suite x d'éléments du tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et, soit I un arc de $\mathbb{T}$, de fonction caractéristique χ_I , de longueur $\ell(I)$. La suite x est équirépartie dans le tore si, pour tout I , la suite s des moyennes

$$n \mapsto \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \chi_I(x_h)$$

converge vers $\ell(I)$. De nombreuses études ont eu pour objet de préciser le comportement asymptotique de ces moyennes. A ce sujet, l'attention se porte naturellement sur la suite σ_I définie par $\sigma_I(n) = s(n) - n\ell(I)$. Si $I = [0, a[$, W. M. SCHMIDT [11] a montré que σ_I n'est bornée que pour au plus un ensemble dénombrable de a . Nous verrons, comme conséquence d'un théorème ergotique, le résultat suivant.

(1.1) Supposons $0 < \ell(I) < 1$. Alors, pour presque toutes suites x , la suite σ_I est équirépartie dans $\mathbb{Z}$.

On peut préciser. Rappelons que la suite x est dite complètement équirépartie (dans le tore $\mathbb{T}$) si, pour toute suite finie $I_1, \dots, I_k$ d'arcs de $\mathbb{T}$, la suite des moyennes $N \mapsto (1/N) \sum_{n=1}^N \chi_{I_1}(x_n) \dots (\chi_{I_k}(x_{n+k-1}))$ converge vers $\ell(I_1) \dots \ell(I_k)$. D'autre part, une suite $n \mapsto z_n$ dans un groupe abélien localement compact $\mathbb{Z}$ est dite équirépartie au sens de Hartman [5], si, pour tout caractère π de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi(z_n) = 0.$$

Alors, nous avons le résultat suivant.

(1.2) Pour toute suite x complètement équirépartie dans $\mathbb{T}$, et tout arc I de longueur non nulle et distinct de $\mathbb{T}$, la suite

$$n \mapsto (n, \sum_{h=1}^n \chi_I(x_h))$$

est équirépartie dans $\mathbb{Z}^2$ au sens de Hartman.

Dans un autre ordre d'idée, soit θ un nombre 2-normal, de développement dyadique suivant :

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n ,$$

et soit $k \mapsto n_k$ la suite des entiers successifs tels que $a_{n_k} = 0$.

(1.3) La suite $k \mapsto (n_k, k)$ est équirépartie dans $\mathbb{Z}^2$ au sens de Hartman.

Ce résultat s'obtient comme cas particulier des propriétés des suites génératrices de suites équiréparties de Veech. Posons $r_k = n_{k+1} - n_k$, pour $k \geq 1$, alors pour toute suite $n \mapsto z_n$ à valeurs dans un groupe compact métrisable G qui engendre un sous-groupe dense dans G , la suite w définie par $w_k = z_{r_1} \dots z_{r_k}$ est équirépartie selon la mesure de Haar dans G [13]. De plus, nous verrons en particulier le résultat suivant.

(1.4) Si $\{z_n; n \geq 1\}$ est dense dans G , le spectre de w se réduit à $\{0\}$.

La notion de spectre que nous adoptons est celle donnée dans [7], très proche de celle de M. MENDES-FRANCE [6]. Soit $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Le spectre de F est l'ensemble des α de $\mathbb{T}$ tels que

$$\limsup_{N: \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(n) \exp(-2i\pi n\alpha) \right| > 0 .$$

Le spectre d'une suite u à valeurs dans un espace compact X est alors la réunion $\text{Sp}(u)$ des spectres des applications $f \circ u$, où f est élément de l'espace $\mathcal{C}(X)$ des applications continues sur X à valeurs complexes.

Dans toute la suite, Ω désignera un espace compact métrisable, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité, boréliennes sur Ω , μ une telle mesure, G un groupe compact métrisable de mesure de Haar normalisée m . $\mathcal{P}(\Omega)$ sera muni de la topologie faible. Etant données les applications $T: \Omega \rightarrow \Omega$ et $\varphi: \Omega \rightarrow G$, on définit T_φ sur $\Omega \times G$ par $T_\varphi(x, g) = (Tx, g\varphi(x))$, la loi de G étant notée multiplicativement. Nous adoptons la terminologie de H. FURSTENBERG [2]. Le triplet (Ω, T, μ) est appelé PROCESSUS, si T est μ -mesurable et μ invariante par T . Rappelons qu'un tel processus est ergodique si les seules solutions de l'équation

$$(1.5) \quad f \circ T = \alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{C}, f \mu\text{-mesurable}),$$

avec $\alpha = 1$, sont les fonctions constantes μ -presque-partout. Il est faiblement mélangeant si (1.5) n'a que les solutions $\alpha = 1$, f constante μ -presque-partout ou α quelconque dans $\mathbb{C}$ et f nulle μ -presque-partout [4].

Une application f définie sur Ω et à valeurs dans un espace topologique sera dite μ -continue, si l'ensemble D de ses points de discontinuité est μ -négligeable. f sera dite T -quasicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g: \Omega \rightarrow (0, 1)$, continue, telle que $g \geq \chi_D$ (fonction caractéristique de D) et

$$(1.6) \quad \sup_{x \in \Omega} \limsup_{N: \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(T^n x) \right) \leq \varepsilon .$$

Cette notion a été introduite par G. RAUZY [8].

Rappelons qu'un point ω de Ω est dit (T, μ) -générique si, pour toute f

dans $\mathcal{C}(\Omega)$, on a :

$$(1.7) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^n \omega) = \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Enfin $\Lambda(G)$ désignera un ensemble complet de représentations unitaires non triviales, irréductibles et non équivalentes entre elles, de G et H_{π} l'espace de Hilbert de la représentation π dans Λ . H_{π} est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, de norme notée $\|\cdot\|_{\pi}$.

Je suis reconnaissant aux professeurs J. P. CONZE et G. RAUZY qui m'ont aidé dans ce travail par leurs remarques riches d'enseignements.

2. Ergodicité et équations fonctionnelles.

Soient (Ω, T, μ) un processus, $\varphi : \Omega \rightarrow G$ une application μ -mesurable et envisageons les trois propositions suivantes :

(i) Si ω , élément de Ω , est (T, μ) -générique, alors (ω, g) est $(T_{\varphi}, \mu \otimes m)$ -générique pour tout g de G .

(ii) Le processus $(\Omega \times G, T_{\varphi}, \mu \otimes m)$ est ergodique.

(iii) Pour toute π de $\Lambda(G)$, l'équation

$$(*) \quad X(\omega) = \pi(\varphi(\omega)).X(T\omega), \quad \mu\text{-presque-partout}$$

n'a pas de solution μ -mesurable $X : \Omega \rightarrow \text{End}(H_{\pi})$ autre que la solution nulle (μ -presque-partout).

Le théorème suivant est classique dans le cas continu [2] et son corollaire généralise le lemme 3 de J. P. CONZE [1].

(2.1) THÉOREME. - Les propositions (ii) et (iii) sont équivalentes lorsque (Ω, T, μ) est ergodique. Si T et φ sont μ -continues alors (iii) implique (i).

Si de plus le processus (Ω, T, μ) est ergodique, (i) implique (ii), et $\mu \otimes m$ est la seule mesure de $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariante par T_{φ} dont la projection sur le premier facteur soit μ .

Envisageons maintenant les propositions :

(j) Il existe une mesure $\nu \in \mathcal{P}(\Omega \times G)$ telle que tout (ω, g) de $\Omega \times G$ soit (T_{φ}, ν) -générique.

(jj) T_{φ} est uniquement ergodique (l'unique mesure de $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariante par T_{φ} étant $\mu \otimes m$).

On peut déduire du théorème précédent le théorème suivant.

(2.2) COROLLAIRE. - Si T et φ sont μ -continues, pour que T_{φ} soit uniquement ergodique, il faut et il suffit que T soit uniquement ergodique et $(\Omega \times G, T_{\varphi}, \mu \otimes m)$ ergodique. Supposons en outre que T soit T -quasicontinue, alors si T est uniquement ergodique, les propositions (j), (jj), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Démonstration. - L'équivalence entre (ii) et (iii) est facile. Elle se montre comme dans [1]. Supposons T et φ μ -continues et la proposition (i) fausse. Soit alors ω un point (T, μ) -générique et (ω, g) non $(T\varphi, \mu \otimes m)$ -générique. Le théorème de Peter-Weyl permet d'établir l'existence d'une représentation π dans $\Lambda(G)$ et d'une application continue $f : \Omega \rightarrow H_\pi$ telle que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi(f(T^n(\omega, g))) \right\|_\pi > 0,$$

(où $\pi.f$ est défini par $\pi.f(x, z) = \pi(z).f(x)$). Notons que l'égalité (1.7) reste satisfaite pour toutes les applications bornées de Ω dans H_π qui sont μ -continues. Le lemme ergotique de W. VEECH [13] assure alors l'existence d'une solution non triviale $X : \Omega \rightarrow H_\pi$ de l'équation (*) et par suite (iii) est fausse.

Dans le cas où (Ω, T, μ) est ergodique, μ -presque tout élément ω de Ω est (T, μ) -générique, et si on suppose (i), on en déduit (ii) par application du théorème ergodique individuel de Birkhoff. Désignons par A l'ensemble des mesures ν dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$, invariantes par T_φ et dont la projection sur le premier facteur est μ . Si λ est faiblement adhérente à A , sa projection sur le premier facteur est μ . Il en résulte que T_φ est λ -continue et un raisonnement type "intégrale de Riemann" montre que λ est invariante par T_φ . A est alors un convexe faiblement fermé (et par suite faiblement compact). On observe alors, comme dans [9], que les points extrémaux de A le sont aussi dans l'ensemble des mesures dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariantes par T_φ ; ils sont donc ergodiques relativement à T_φ . Supposons (i), alors ces points se réduisent au seul point $\mu \otimes m$ et par le théorème de Krein-Milman, $A = \{\mu \otimes m\}$.

La première partie du corollaire est une conséquence directe du théorème, la seconde partie s'obtient par application du lemme général suivant.

(2.3) LEMME. - Pour que T , supposée T -quasicontinue, soit uniquement ergodique, il faut et il suffit qu'il existe $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que tout élément de Ω soit (T, ν) -générique.

La condition du lemme pour avoir l'unique ergodicité est évidemment suffisante. Par ailleurs, pour tout ω de Ω , les valeurs d'adhérence (pour la topologie faible) de la suite des moyennes de Dirac $N \rightarrow (1/N) \sum_{n=1}^N \delta_{T^n \omega}$ sont invariantes par T [8], d'où la nécessité.

Remarques.

1° Si φ est supposée continue hors d'un ensemble fermé de μ -mesure nulle comme dans [1], alors T_φ est T_φ -quasicontinue lorsque T est uniquement ergodique et T -quasicontinue.

2° On peut introduire une notion d'uniforme quasi-continuité en remplaçant la condition (1.6) par :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(T^n x) \right) \leq \varepsilon.$$

Si T et φ sont uniformément quasicontinues, il en est de même de T_φ et de

plus la condition (j) peut être remplacée par la suivante :

(j') Pour toute $f : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega \times G} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T_\varphi^n(x)) - \mu \otimes m(f) \right| = 0.$$

Cela tient de l'équivalence entre (j') et (jj) qui est classique lorsque T_φ est continue. Dans le cas présent, faute de référence, nous la démontrons en annexe.

3° La démonstration de l'équivalence entre (ii) et (iii) dans (2.1) peut se généraliser aux cas des mixages et donne le résultat suivant.

(2.3) Le processus $(\Omega \times G, T_\varphi, \mu \otimes m)$ est faiblement mélangeant si, et seulement si, pour tout π de $\Lambda(G)$ et tout nombre complexe α , l'équation

$$(**) \quad X(\omega) = \alpha \pi(\varphi(\omega)) X(T\omega) \quad \mu\text{-presque-partout.}$$

n'a pas de solution μ -mesurable $X : \Omega \rightarrow \text{End}(H_\pi)$ autre que la solution nulle μ -presque-partout.

3. Processus disjoints.

Soit Ω^* un espace compact métrisable. Pour toute mesure λ dans $\mathcal{P}(\Omega \times \Omega^*)$, notons $\lambda|_1$ et $\lambda|_2$ les mesures boréliennes images de λ par la première projection $\Omega \times \Omega^* \rightarrow \Omega$ et deuxième projection $\Omega \times \Omega^* \rightarrow \Omega^*$, respectivement. Disons avec H. FURSTENBERG [2] que les processus (Ω, T, μ) et (Ω^*, T^*, μ^*) sont disjoints si, pour tout processus $(\Omega \times \Omega^*, T \times T^*, \lambda)$, on a

$$(\lambda|_1 = \mu \text{ et } \lambda|_2 = \mu^*) \implies (\lambda = \mu \otimes \mu^*).$$

Le résultat suivant est classique dans le cas continu.

(3.1) Soient (Ω, T, μ) et (Ω^*, T^*, μ^*) deux processus disjoints. Supposons T et T^* respectivement μ -continue et μ^* -continue. Si ω est (T, μ) -générique et ω^* , (T^*, μ^*) -générique, alors (ω, ω^*) est $(T \times T^*, \mu \otimes \mu^*)$ -générique.

En effet, si λ est une valeur d'adhérence de la suite

$$(*) \quad N \mapsto \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{(T_\omega^n, T_{\omega^*}^{*n})}$$

alors $\lambda|_1 = \mu$ et $\lambda|_2 = \mu^*$, et la régularité de λ montre que $T \times T^*$ est λ -continue. Un raisonnement standard style "intégrale de Riemann" donne l'invariance de λ par $T \times T^*$ et par suite $\lambda = \mu \otimes \mu^*$. Utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}(\Omega \times \Omega^*)$, on en déduit la convergence de la suite (*) vers $\mu \otimes \mu^*$.

Prenons maintenant pour Ω^* un groupe compact, μ^* sa mesure de Haar et T^* la translation à droite (ou à gauche) par un élément τ de Ω^* qui engendre un sous-groupe dense dans Ω^* . Alors (Ω^*, T^*, μ^*) est appelé un processus de Kronecker ; il est ergodique, de plus on a la caractérisation suivante.

(3.2) THÉOREME. - Pour que le processus (Ω, T, μ) soit disjoint du processus

de Kronecker (Ω^*, T^*, μ^*) , il faut et il suffit que le processus produit $(\Omega \times \Omega^*, T \times T^*, \mu \otimes \mu^*)$ soit ergodique.

La démonstration de ce théorème est essentiellement la même que celle faite dans [2] avec (Ω, T, μ) faiblement mélangeant.

Dans toute la suite, $\mathfrak{h}$ désignera la mesure de Haar (normalisée) du tore $\mathbb{T}$, $\mathfrak{h}_a$ celle du sous-groupe fermé $\underline{U}_a$ engendré par a dans $\mathbb{T}$, τ_a la translation de a . Le théorème suivant est classique.

(3.3) THÉORÈME. - Pour qu'un processus ergodique soit faiblement mélangeant, il faut et il suffit qu'il soit disjoint de tous les processus de Kronecker $(\tau_a, \mathfrak{h}_a, \underline{U}_a)$, $a \in \mathbb{T}$.

4. Ergodicité et suites complètement équiréparties.

Soit $f : \Omega \rightarrow G$, μ -mesurable, d'image au plus dénombrable. On pose

$$\mathfrak{I}(f) = \{g \in G ; \mu(f^{-1}(g)) > 0\}.$$

La proposition (1.2) de l'introduction est un cas particulier de la suivante.

(4.1) Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}$ $\mathfrak{h}$ -continue telle que $\mathfrak{I}(f)$ engendre $\mathbb{Z}$, et $0 \in \mathfrak{I}(f)$. Alors, pour toute suite x complètement équirépartie dans $\mathbb{T}$, la suite

$$n \rightarrow (n, \sum_{k=1}^n f(x_k))$$

est équirépartie dans $\mathbb{Z}^2$ au sens de Hartman.

Cette proposition est une conséquence directe d'un théorème plus général. Introduisons la notion de spectre d'une partie A de G comme étant l'ensemble $\text{Sp}(A)$ des $a \in \mathbb{T}$ tels que le sous-groupe fermé engendré par $A \times \{a\}$ ne soit pas égal à $G \times \underline{U}_a$.

(4.2) THÉORÈME. - Soit $\Omega_\infty = \Omega^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure produit μ_∞ induite par μ , $(\Omega_\infty, T, \mu_\infty)$ le shift sur Ω_∞ , et soit $f : \Omega \rightarrow G$, μ -mesurable telle que $f(\Omega)$ soit au plus dénombrable. Notons S la transformation sur $\Omega_\infty \times G$ donnée par :

$$(\omega, g) \mapsto (T\omega, gf(p(\omega))),$$

où p désigne la projection sur le premier facteur de Ω_∞ . Alors, le processus $(\Omega_\infty \times G, S, \mu_\infty \otimes m)$ est

- (i) ergodique si $\mathfrak{I}(f)$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- (ii) faiblement mélangeant si, et seulement si, $\text{Sp}(\mathfrak{I}(f)) = \emptyset$.

Démonstration. - Soit $a \in \mathbb{T}$ et S_a la transformation définie sur $(\Omega_\infty \times G \times \underline{U}_a)$ par $(\omega, g, z) \mapsto (T\omega, g.f(p\omega), z + a)$. La mesure $\lambda = \mu_\infty \otimes m \otimes \mathfrak{h}_a$ est invariante par S_a . Nous allons montrer le résultat suivant.

(4.3) λ est ergodique selon $S_a \iff a \notin \text{Sp}(\mathfrak{I}(f))$.

Envisageons $X : \Omega_\infty \rightarrow H_\pi$, solution mesurable de l'équation

$$(*) \quad X(\omega) = \pi(f(p\omega), a) X(T\omega) \quad \mu_\infty\text{-presque-partout}$$

avec $x \in \Lambda(G \times \underline{U}_a)$. L'ergodicité de μ_∞ relativement à T montre que $\|X\|_\pi$ est μ_∞ -presque-partout égale à une constante que nous pouvons supposer être 0 ou 1. Choisissons 1. Prenons l'espérance conditionnelle $E(X \parallel p, \dots, pT^{n-1})$. La norme (dans H_π) de cette espérance converge μ_∞ -presque-partout vers 1 quand n devient infini, mais par (*) cette espérance vaut :

$$\pi(f(p\omega) \dots f(pT^{n-1}\omega), na) E(XT^n \parallel p, \dots, pT^{n-1}),$$

ce qui donne par passage à la limite, $(\Omega_\infty, T, \mu_\infty)$ étant de Bernoulli,

$$\left\| \int_{\Omega_\infty} X(\omega) d\mu_\infty(\omega) \right\|_\pi = 1.$$

Il en résulte, par convexité, que X est constante presque partout. Alors, pour tout $g \in \mathfrak{I}(f)$, on a $\pi(g, a)X = X$. Si $a \notin \text{Sp}(\mathfrak{I}(f))$, on obtient $\pi(u)X = X$, pour tout u dans $G \times \underline{U}_a$. L'irréductibilité de π assure alors $X = 0$, contradiction. λ est donc ergodique suivant S_a . Réciproquement, si λ est ergodique, d'après le théorème (2.1), pour tout ω (T, μ_∞) -générique, le point $(\omega, 0, 0)$ est (S_a, λ) -générique. En particulier, on observe que la suite de point $z_n = (f(p\omega) \dots f(pT^{n-1}\omega), na)$ est dense dans $G \times \underline{U}_a$. Mais, pour presque tout ω , les z_n sont dans le sous-groupe engendré par $\mathfrak{I}(f) \times \{a\}$, donc $a \notin \text{Sp}(\mathfrak{I}(f))$. La partie (ii) du théorème se déduit soit de (2.3), soit de (3.2) et (3.3). La partie (i) s'obtient en faisant $a = 0$ dans (4.3).

Utilisons maintenant la notion de processus d'entropie totalement positive ([10], [2]). D'après un théorème de R. K. THOMAS [12], on déduit le résultat suivant.

(4.4) Supposons $\Omega = \mathbb{T}$ et le processus $S = (\Omega_\infty \times G, S, \mu_\infty \otimes m)$ faiblement mélangeant. Alors S est d'entropie totalement positive.

Du point de vue de la disjonction, sous les hypothèses de (4.4), S est alors disjoint de tout processus déterministe [2]. Illustrons cet aspect en choisissant un résultat d'expression simple obtenu en utilisant l'aspect générique en (3.1), et qui généralise (1.2).

(4.5) Soit $n \mapsto x_n$ une suite à termes dans $\mathbb{T}$, complètement équirépartie modulo 1, et soit I un arc de $\mathbb{T}$ de longueur ℓ telle que $0 < \ell < 1$. Alors, pour tout polynôme P à coefficients réels et tout nombre irrationnel θ , la suite $n \mapsto P(n) + \theta \sum_{k=1}^n \chi_I(x_k)$ est équirépartie modulo 1.

5. Générateurs de suites équiréparties.

Une suite d'entiers $n \mapsto q_n$ est dite s -générateur de suites équiréparties (s entier > 0) au sens de W. Veech, si, pour tout groupe compact G et toute suite $n \mapsto z_n$ dans G telle que la famille $\{z_n; n \geq s\}$ engendre un sous-groupe dense dans G , la suite

$$n \mapsto z_{q_1} \dots z_{q_n}$$

est équirépartie dans G selon m . Dans [13], W. VEECH donne des exemples de suites s -générateurs de suites équiréparties.

Quelques définitions et notations seront utiles. Pour m entier ≥ 2 , notons S_m la transformation de $\mathbb{T}$ donnée par

$$x \mapsto mx \pmod{1}.$$

Fixons Ω , partie de $\mathbb{T}$, de frontière négligeable, de mesure $\mathfrak{h}(\Omega) > 0$. Soit $q = q_\Omega$ l'application de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ définie par :

$$q(x) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* ; S_m^n(x) \in \Omega\}.$$

Une transformation $T_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$ est dite induite par S_m sur Ω si, pour $\mathfrak{h}$ -presque tout x dans Ω , on a $T_\Omega(x) = S_m^{q(x)}(x)$. On note μ la mesure de probabilité induite par $\mathfrak{h}$ sur Ω . On sait que (Ω, T_Ω, μ) est un processus ergodique.

(5.1) THÉOREME (W. VEECH). - Soit Ω une partie de $\mathbb{T}$ d'intérieur non vide, de frontière F telle que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathfrak{h}(F_\varepsilon)}{\log \varepsilon} > 0,$$

(où F_ε est le voisinage de F à ε -près pour la distance usuelle sur $\mathbb{T}$ identifié à $[0, 1[)$). Si Ω satisfait à l'une des conditions

(C₁) $\Omega = [a, b]$, intervalle tel que $a \neq 0$, $b \neq 1$, et dans le cas où $m=2$, $a \neq 1/6$ et $b \neq 5/6$;

(C₂) $\Omega \subset [1/m, 1[$ ou bien $\Omega \subset [0, 1 - (1/m)]$;
alors pour toute suite z dans G , la transformation W définie sur $\Omega \times G$ par

$$(\omega, g) \mapsto (T_\Omega \omega, g.z(q(\omega))),$$

détermine le processus $(\Omega \times G, W, \mu \otimes m)$ qui est :

- (i) ergodique si, et seulement si, $0 \notin \text{Sp}(\mathfrak{I}(z \circ q))$,
- (ii) faiblement mélangeant si, et seulement si, $\text{Sp}(\mathfrak{I}(z \circ q)) = \emptyset$.

Remarque 1. - Sous l'hypothèse C_1 ou C_2 du théorème, il existe un entier s tel que

$$n \geq s \implies n \in \text{Sp}(\mathfrak{I}(q)).$$

Il en résulte que, pour tout ω m -normal, la suite d'entiers $n \mapsto q(T_\Omega^n \omega)$ est s -générateur de suites équiréparties. On retrouve ainsi la formulation du théorème 2 de W. VEECH [13] à l'exception du seul cas où $a = 1/6$, $b = 5/6$ et $m = 2$. En fait, la démonstration de W. VEECH est insuffisante dans le cas que précise la proposition suivante.

(5.2) Soit $\Omega = [1/6, 5/6]$, $m = 2$ et D l'ensemble des rationnels p/q de dénominateur q égal à une puissance de 2 .

1° Pour tout x de $[0, 1[\setminus D$ ($\mathbb{T}$ identifié à $[0, 1[$) et tout s entier > 0 , la suite $n \mapsto q_\Omega(T_\Omega^n x)$ est une suite d'entiers non s -générateur de suites équiréparties.

2° Pour tout x normal en base deux et toute suite $n \mapsto z_n$ dans G telle que z_1 commute avec tous les z_n et $\{z_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ engendre un sous-groupe dense dans G , la suite $n \mapsto z_{q_1} \dots z_{q_n}$ est répartie dans G .

Démonstration. - Le 2° est implicitement démontré dans [13]. Le 1° est obtenu par le contre-exemple suivant. Choisissons pour G le groupe produit croisé $\{1, -1\} \times^* \mathbb{T}$ dont la loi est donné par :

$$(u, x) \cdot (u', x') = uu', x + ux'.$$

Soit a dans $\mathbb{T}$ n'appartenant pas au sous-groupe de torsion et prenons la suite $n \mapsto z_n$ définie par

$$z_{2n+1} = (-1, 0), \quad z_{2n} = (1, a), \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On vérifie aisément que le sous-groupe de G engendré par $\{z_1, z_2\}$ est dense dans G (muni de la topologie produit). En distinguant les cas où $x = 1/6, 1/3, 2/3, 5/6, x \in]1/2, 2/3[$ et $x \in]1/6, 1/3[\cup]2/3, 5/6[$, on montre que, pour tout $n \geq 1$,

$$z_{q_1} \dots z_{q_n} \in \{(1, 0), z_1, z_2, z_1 \cdot z_2, z_2 \cdot z_1\}$$

la suite $n \mapsto z_{q_1} \dots z_{q_n}$ ($(q_n = q(T_\Omega^n x), x \in \mathbb{T} \setminus D)$) n'est donc pas répartie dans G selon m .

Remarque 2. - Sous les hypothèses du théorème (5.1), on obtient en particulier que le processus (T_Ω, Ω, μ) est faiblement mélangeant. De plus si $\Omega = [0, 1/2[$ et $m = 2$, on a mieux.

(5.3) Le processus $(T_{[0, 1/2[}, [0, 1/2[, \mu)$ est de Bernoulli.

En effet, soit $E = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit usuelle, (p_n) la suite des applications coordonnées, S le shift sur E , ν_∞ la mesure produit, sur E , de la mesure ν sur $\mathbb{N}$ donnée par $\nu(i) = 2^{-i}$. Envisageons l'application $f: [0, 1/2[\rightarrow E$ définie, pour tout x , dans $[0, 1/2[$ par

$$p_i(f(x)) = q(T^i x), \quad (i \in \mathbb{N} \text{ et } q = q_\Omega).$$

f est une bijection, caractérisée par :

$$f(x) = (n_k)_{k \geq 0} \iff x = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(n_0 + \dots + n_i)} \right),$$

qui réalise un isomorphisme de processus entre $(T_{[0, 1/2[}, [0, 1/2[, \mu)$ et le processus de Bernoulli (E, S, ν_∞) . On est ainsi ramené pour cet intervalle à la situation du théorème (4.1).

Terminons en démontrant la proposition (1.4) de l'introduction. Soit $a \in \mathbb{T}$. La mesure $\mu \otimes m \otimes h_a$ est ergotique relativement à la transformation

$$(\omega, g, x) \mapsto (T\omega, gz_q(\omega), x + a)$$

sur $\Omega \times G \times \underline{U}_a$, notée W , d'après (5.1) ($T = T_\Omega$, $\Omega = [0, 1/2[$). Si ω dans $[0, 1/2[$ est normal en base deux, $(\omega, 1_G, -a)$ est $(W, \mu \otimes m \otimes \mathfrak{h}_a)$ -générique. De plus

$$W^n((\omega, 1_G, -a)) = (T^n \omega, z_{r_1} \dots z_{r_{n-1}}, (n-1)a).$$

Ainsi, pour tout f de $\mathcal{C}(G)$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(z_{r_1} \dots z_{r_n}) \exp(-2\pi i n a) \\ = \iint_{G \times \underline{U}_a} f(g) \exp(-2\pi i x) \, dm \otimes \mathfrak{h}_a(g, x). \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, cette limite est nulle. Il en est de même lorsque ω est dans $[1/2, 1[$, il suffit en effet d'envisager le point générique $(2^q(\omega), z_q(\omega), 0)$. Le spectre de la suite $n \xrightarrow{W} z_{r_1} \dots z_{r_n}$ se réduit donc à $\{0\}$. Il en résulte en particulier [7] que, pour toute suite strictement croissante $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ à caractère presque périodique telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(n)/n < +\infty$, la suite $n \mapsto w_n$ est répartie dans G selon la mesure de Haar, la condition de croissance stricte pouvant d'ailleurs être affaiblie [6].

ANNEXE

Ω désigne toujours un espace compact métrisable et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une transformation borélienne.

THÉORÈME. - Supposons T uniformément T -quasicontinue. Pour que T soit uniquement ergodique, il faut et il suffit que, pour toute $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, continue, il existe λ_f dans $\mathbb{R}$ tel que

$$(*) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^n x) - \lambda_f \right| = 0.$$

Démonstration.

Suffisance. L'égalité (*) définit une mesure $f \mapsto \lambda_f$ appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$. Soit λ cette mesure. La quasicontinuité de T montre que T est λ -continue, il en résulte l'invariance de λ par T . De plus, si ν est élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ invariante par T , l'égalité (*) assure $\nu(f) = \lambda_f$, pour toute f de $\mathcal{C}(\Omega)$. T est donc uniquement ergodique.

Nécessité. Procédons par étape.

1° Soit λ l'unique mesure de $\mathcal{P}(\Omega)$ invariante par T . Notons $\mathcal{R}_\lambda$ l'espace de Banach des applications réelles définies sur Ω et intégrables Riemann (i. e. bornées et λ -continues d'après la caractérisation de Lebesgue), la norme sur $\mathcal{R}_\lambda$ étant celle de la convergence uniforme. Soit E le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{R}_\lambda$ contenant $\{g \circ T - g ; g \in \mathcal{R}_\lambda\}$. λ définit sur $\mathcal{R}_\lambda$ une forme linéaire

continue encore notée λ . Elle est nulle sur E .

2° Soit L une forme linéaire continue sur $\mathcal{R}_\lambda$ nulle sur E . L'application $|L|$ définie pour $f \geq 0$ par

$$|L|(f) = \sup\{L(g) ; g \in \mathcal{R}_\lambda \text{ et } |g| \leq f\},$$

se prolonge par additivité en une forme linéaire positive (et donc continue) sur $\mathcal{R}_\lambda$. Elle détermine ainsi une mesure de Radon ℓ sur Ω . Quitte à supposer $\|L\|_\infty = 1$, on a $\ell \in \mathcal{R}(\Omega)$, de plus l'invariance de L par T entraîne celle de $|L|$.

3° ℓ est invariante par T . - Soit D l'ensemble des points de discontinuité de T et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur T , il existe une application continue $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$, un entier N , tels que :

$$\forall x \in \Omega, h(x) \geq \chi_D(x) \text{ et } \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(T^n x) \leq \varepsilon.$$

Alors

$$|L|\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h \circ T^n\right) = |L|(h) \leq \varepsilon \|L\|_\infty = \varepsilon.$$

Ainsi $\ell(h) \leq \varepsilon$ et, par suite, T est ℓ -continue. Il en résulte notamment :

$$\forall f \in C(\Omega), \int_\Omega f(Tx) d\ell(x) = |L|(f \circ T),$$

d'où l'invariance de ℓ par T .

4° T étant uniquement ergodique, l'étape 3 montre que $\ell = \lambda$. La démonstration ci-dessus montre que $|L| - L$ définit une mesure de Radon positive ℓ' sur Ω , invariante par T , d'où $\ell' = a\lambda$, avec $a \geq 0$, et, par suite, $L = (1 - a)\lambda$, avec $a = 0$ ou 2 , d'après l'hypothèse faite sur $\|L\|_\infty$.

5° L'étape 4 montre que E est le noyau de λ . Soit $f \in \mathcal{R}_\lambda$ et $\varepsilon > 0$, il existe alors g dans $\mathcal{R}_\lambda$ tel que

$$\|f - \lambda(f) - (g \circ T - g)\|_\infty \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^N f \circ T^n \right) - N\lambda(f) - (g \circ T^{N+1} - g) \right\|_\infty \leq N\varepsilon.$$

On obtient ainsi une condition plus forte que celle demandée :

$$\forall f \in \mathcal{R}_\lambda, \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f \circ T^n - \lambda(f) \right\|_\infty = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CONZE (J. P.). - Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques, Université de Rennes (préprint).
- [2] FURSTENBERG (H.). - Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation, Math. Systems Theory, t. 1, 1967, p. 1-49.
- [3] FURSTENBERG (H.). - Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. J. Math., t. 83, 1961, p. 573-601.

- [4] HALMOS (P. R.). - Lectures on ergodic theory. - [Tokyo], the mathematical Society of Japan, 1956 (publication of the mathematical Society of Japan, 3).
- [5] HARTMAN (S.). - Remarks on equidistribution on non compact groups, *Compositio Math.*, Gröningen, t. 16, 1964, p. 66-71.
- [6] MENDES FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, *J. number Theory*, t. 5, 1973, p. 1-15.
- [7] RAUZY (G.). - Propriétés statistiques de suites arithmétiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1976.
- [8] RAUZY (G.). - Répartition de suites et équations fonctionnelles associées, *Monatsh. Math.* (à paraître).
- [9] RAUZY (G.). - Répartition modulo 1, "Journées arithmétiques de Caen, 1976", *Astérisque* n° 41-42, 1977, p. 81-101.
- [10] ROKHLIN (V. A.). - New progress in the theory of transformation with invariant measure, *Russian math. Surveys*, t. 15, fasc. 4, 1960, p. 1-22.
- [11] SCHMIDT (W. M.). - Irregularities of distribution. VI, *Compositio Math.*, Gröningen, t. 24, 1972, p. 63-74.
- [12] THOMAS (R. K.). - Metric properties of transformation of G-spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 160, 1971, p. 103-117.
- [13] VEECH (W. A.). - Some questions of uniform distribution, *Annals of Math.*, Series 2, t. 94, 1971, p. 125-138.

(Texte reçu le 9 juin 1978)

Pierre LIARDET
 Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 225
 U. E. R. de Mathématiques
 Université de Provence
 3 place Victor-Hugo
 13331 MARSEILLE CEDEX 3
