Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Jean-Pierre Borel

Nombres premiers généralisés et équirépartition modulo 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1977-1978), exp. n° 7, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 7, 7 p.

7 novembre 1977

NOMBRES PREMIERS GÉNÉRALISÉS ET ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1

par Jean-Pierre BOREL

Résumé. - Le but de cet exposé est de présenter les résultats obtenus dans ma thèse de 3e cycle. Les démonstrations seront donc simplement esquissées, et le lecteur trouvera les démonstrations complètes dans [4].

1. Introduction.

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers généralisés de Beurling, c'est-à-dire un ensemble dénombrable $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\geq 1}$ muni d'une application norme $\mathcal{P} \longrightarrow \underset{\sim}{R}_+$ telle que

$$1 < \|p_1\| \leq \ldots \leq \|p_i\| \leq \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} \|p_i\| = +\infty ,$$

et soit $\mathcal{N}$ le semi-groupe multiplicatif libre engendré par $\mathcal{P}$, auquel on prolonge $\|\ \|$ de manière totalement multiplicative. $\mathcal{N}$ peut alors être ordonné, éventuellement de plusieurs façons, $\mathcal{N} = \{b_n\}_{n\geq 0}$ avec

$$1 = \|b_0\| \leq \|b_1\| \leq \ldots \leq \|b_n\| \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|b_n\| = +\infty .$$

On note b et p l'élément générique de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ respectivement. Dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse classique

(1.1) $\qquad \exists\, A > 0 , \quad B(x) = \sum_{\|b\|\leq x} 1 = Ax + R(x) \quad \text{avec} \quad R(x) = o(x) .$

Beurling a montré que, si (1.1) est vérifiée avec $R(x) = o(x \log^{-\gamma} x)$ et $\gamma > 3/2$, on obtient le théorème des nombres premiers

$$\pi(x) = \sum_{\|p\|\leq x} 1 = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) ,$$

et que ce résultat est faux si $\gamma < 3/2$ (cf. [3]).

Soit $\underset{\sim}{U}$ le cercle complexe unité, et $a_n = \exp 2\pi i\theta_n$ des éléments de $\underset{\sim}{U}$. Nous dirons que la suite $\{a_n\}$ est équirépartie sur $\underset{\sim}{U}$ si la suite $\{\theta_n\}$ est équirépartie modulo 1. Le critère de Weyl s'écrit alors (cf. [9])

(1.2) $\qquad \{a_n\}$ équirépartie sur $\underset{\sim}{U} \Longleftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}^* , \quad \sum_{n\leq N} a_n^k = o(N) .$

Le but de cet exposé est de répondre, du moins en partie, au problème suivant. Si f est une application de $\mathcal{N}$ dans $\underset{\sim}{U}$, y a-t-il des liens entre les propriétés suivantes ?

La suite $\{f(p_i)\}$ est équirépartie sur $\underset{\sim}{U}$, notée $f \in Eq$.

La suite $\{f(b_n)\}$ est équirépartie sur $\underset{\sim}{U}$, notée $f \in E$.

Nous supposerons que f est multiplicative, et ce cas se ramène au cas de f totalement multiplivative, que nous allons traiter d'abord. Nous appellerons caractères de $\mathcal{N}$, et noterons X, les applications totalement multiplivatives de $\mathcal{N}$

dans $\underset{\sim}{U}$.

Nous ne donnerons ici que des indications sur les démonstrations, que l'on trouvera dans leur totalité dans [4].

2. Critères d'équirépartition sur $\underset{\sim}{U}$.

Comme sur $\underset{\sim}{N}^*$, on sait définir sur $\mathcal{N}$ une fonction Λ de Von Mangolt

$$\Lambda(b) = \begin{cases} \log \|p\| & \text{si } b = p^\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous poserons alors, si f est une application de $\mathcal{N}$ dans $\underset{\sim}{C}$,

$$B(x , f) = \sum_{\|b\| \leq x} f(b) , \quad \pi(x , f) = \sum_{\|p\| \leq x} f(p) , \quad \psi(x , f) = \sum_{\|b\| \leq x} \Lambda(b) f(b) .$$

Nous supposerons que (1.1) est vérifiée, avec $R(x) = O(x \log^{-\gamma_0} x)$. Alors nous aurons le théorème suivant.

THEOREME 1. - *Soit* f *une application de* $\mathcal{N}$ *dans* $\underset{\sim}{U}$. *Alors*

$$f \in E \iff \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^* , \quad B(x , f^n) = o(x) ,$$

$$f \in E_q \iff \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^* , \quad \psi(x , f^n) = o(x) ,$$

dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée

$\gamma_0 > 3/2$,

$\gamma_0 > 1$ et, $\forall\, i \in \underset{\sim}{N}^*$, $\|p_i\| < \|p_{i+1}\|$.

Ce théorème utilise essentiellement le critère de Weyl (1.2) et des évaluations de $B(x)$ et $\pi(x)$, en remarquant qu'avec les hypothèses faites le nombre des entiers, tels que $\|b\| = x$, est asymptotiquement négligeable, ainsi que le nombre des premiers tels que $\|p\| = x$.
L'évaluation de $\pi(x)$ est celle de Beurling dans le premier cas, et l'inégalité de Čebyšev dans le second

$$\exists\, C > 0 , \quad \exists\, D > 0 , \quad C \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq D \frac{x}{\log x} ,$$

inégalité vraie dès que (1.1) est vraie avec $\gamma_0 > 1$ (voir [6]).

Enfin, on passe des fonctions π aux fonctions ψ en utilisant le résultat suivant

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \psi(x , f) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\log x}\right)^{-1} \pi(x , f) ,$$

vrai sous les hypothèses du théorème, et donc la démonstration est analogue au cas classique de $\underset{\sim}{N}^*$.

3. Fonctions B et ψ , et séries L .

Si f est une application de $\mathcal{N}$ dans $\underset{\sim}{U}$, on sait définir la fonction $L(x , f) = \sum f(b) \|b\|^{-s}$, série de Dirichlet holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, si l'on

suppose (1.1). Si, de plus,

(3.1) $\exists A(f)$, $B(x , f) = A(f)\, x + R(x , f)$ avec $R(x , f) = o(x)$,

on obtient par intégration par parties

(3.2) $$L(s , f) = \int_1^\infty x^{-s}\, dB(x , f) = \frac{A(f)}{s-1} + A(f) + s \int_1^\infty x^{-s}\, \frac{R(x , f)}{x}\, dx .$$

Mais si de plus $f = X$ est un caractère, $L(s , X)$ a une écriture en produit eulérien pour $Re(s) > 1$, $L(s , X) = \pi(1 - X(p)\, \|p\|^{-s})^{-1}$, d'où l'on déduit

(3.3) $$-\frac{L'}{L}(s , X) = \sum X(b)\, \Lambda(b)\, \|b\|^{-s} = \int_1^\infty x^{-s}\, d\psi(x , X)$$

ce qui permet, selon une méthode classique, d'obtenir $\psi(x , X)$ à l'aide de la connaissance de L'/L .

C'est cette méthode qui a permis à MÜLLER d'obtenir, si (3.1) est vérifiée avec $R(x , X) = o(x^\theta)$, $\theta < 1$, l'estimation (cf. [10])

(3.4) $$\psi(x , X) = B(X)\, x + o(x) ,$$

où $B(X)$ est l'ordre du pôle $s = 1$ de $L(s , X)$, et vaut 1 , 0 ou -1 . Cette méthode nécessite cependant que $L(s , X)$ ait un prolongement non nul (sauf en $s = 1$), et méromorphe sur une partie $Re(s) > \theta$, $\theta < 1$.

Ce résultat a été obtenu de manière tout à fait différente par AMITSUR ([1] et [2]), qui suppose (3.1) vrai avec $R(x , X) = O(x \log^{-\gamma} x)$, et qui obtient encore (3.4), $B(X)$ correspondant à l'ordre du "pôle" $s = 1$ d'une fonction holomorphe seulement pour $Re(s) > 1$, et dès que $\gamma > 2$ (resp. 3) si $B(X) = 1$ ou 0 (resp. -1) . Mais pour obtenir ce résultat, AMITSUR suppose, et c'est essentiel dans la démonstration, que X est d'ordre fini, ce qui entraine immédiatement $X \notin E$. La fin de cet exposé consiste à supprimer cette dernière restriction, en permettant des restes $R(x , X)$ analogues à ceux d'AMITSUR.

4. Résultat principal.

Nous dirons que $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ si f vérifie (3.1) avec $\exists\, \varepsilon > 0$, $R(x , f) = o(x \log^{-(\gamma+\varepsilon)} x)$, et nous définissons $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2 \cup \mathfrak{K}_3$ par

$\mathfrak{K}_1 = \{X \in \mathfrak{F}_2 , A(X) \neq 0\}$, on pose alors $B(X) = 1$,

$\mathfrak{K}_2 = \{X \in \mathfrak{F}_2 , A(X) = 0 \text{ et } L_0(X) \neq 0\}$, on pose alors $B(X) = 0$,

$\mathfrak{K}_3 = \{X \in \mathfrak{F}_3 , A(X) = L_0(X) = 0\}$, on pose alors $B(X) = -1$,

où, si $f \in \mathfrak{F}_\gamma$, $Lj(f)$ est défini, pour $0 \leqslant j \leqslant \gamma - 1$, par

$$Lj(f) = \int_1^\infty \frac{R(x , f)}{x^2} \log^j x\, dx .$$

On note $\langle X \rangle$ le groupe engendré par X . Alors nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Si X est un caractère de $\mathfrak{N}$ tel que $\langle X \rangle \subset \mathfrak{K}$, on a

$$X \in E \Longleftrightarrow X \in Eq \ .$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1 et de l'évaluation.

THÉORÈME 3. - *Si* $1 \in \mathcal{K}$, $X \in \mathcal{K}$, *et* $X^2 \in \mathfrak{F}_1$,

$$\psi(x \ , \ X) = B(X)\ x + o(x) \ .$$

Car, si $X \in \mathcal{K}_3$, on peut montrer que $X^2 \in \mathcal{K}_1$, d'où, si $\langle X \rangle \subset \mathcal{K}$,

$$X \in E \Longleftrightarrow \forall\ n \in \underset{\sim}{N}^* \ , \ X^n \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \Longleftrightarrow \forall\ n \in \underset{\sim}{N}^* \ , \ X^n \in \mathcal{K}_2$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ n \in \underset{\sim}{N}^* \ , \ B(X^n) = 0 \Longleftrightarrow X \in Eq \ .$$

La démonstration du théorème 3 est basée sur un résultat contenu dans un théorème de IKEHARA [8].

THÉORÈME 4. - *Soit* $f : [1 \ , \ \infty[\longrightarrow \underset{+}{R}$ *croissante, et telle que l'intégrale* $F(s) = \int_1^\infty x^{-s}\ df(x)$ *converge absolument pour* $Re(s) > 1$. *S'il existe* $A > 0$ *tel que* $F(s) - (A/(s-1))$ *soit continue sur le demi-plan fermé* $Re(s) \geqslant 1$, *alors*

$$f(x) = Ax + o(x) \ .$$

Ce qui, avec (3.2), nous amène à chercher à quelle condition

$$((L'/L)(s \ , \ X)) + (B(X)/(s-1))$$

est continue sur le demi-plan fermé $Re(s) \geqslant 1$.

D'après la définition de $\mathcal{K}$ (les conditions $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}_3$ sont exactement choisies pour ce résultat) et de $B(X)$, il existe un voisinage de $s = 1$ dans le demi-plan $Re(s) \geqslant 1$ tel que $((L'/L)(s \ , \ X)) + (B(X)/(s-1))$ soit continue sur ce voisinage.

D'autre part, si $X \in \mathfrak{F}_1$, $L(s \ , \ X)$ a un prolongement continu sur le demi-plan $Re(s) \geqslant 1$, et $L'(s \ , \ X)$ de même, dès que $X \in \mathfrak{F}_2$, d'après l'expression (3.2).

Pour montrer que $(L'/L)(s \ , \ X)$ a un prolongement continu sur un voisinage de $1 + it$, $t \neq 0$, dans le demi-plan $Re(s) \geqslant 1$, il suffit donc de montrer que $L(1 + it \ , \ X) \neq 0$. Cela se fait par la méthode classique de Hadamard, qui consiste à montrer que si $L(1 + it \ , \ X)$ est nul, avec $t \neq 0$, $L(s \ , \ X^2)$ a une singularité en $s = 1 + 2it$. Cette méthode ne nécessite que les hypothèses $X \in \mathfrak{F}_2$ et $X^2 \in \mathfrak{F}_1$.

Il reste à trouver des fonctions croissantes pour utiliser le théorème 4. On prend

$f_1(x) = 2\psi(x) - Re(\psi(x \ , \ X))$, d'où $F_1(s) = -\ 2\dfrac{\zeta'}{\zeta}(s) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L'}{L}(s \ , \ X) + \overline{\dfrac{L'}{L}(\bar{s} \ , \ X)}\right)$,

$f_2(x) = \psi(x) - Im(\psi(x \ , \ X))$, d'où $F_2(s) = -\ \dfrac{\zeta'}{\zeta}(s) - \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{L'}{L}(s \ , \ X) - \overline{\dfrac{L'}{L}(\bar{s} \ , \ X)}\right)$,

$f_3(x) = \psi(x)$, d'où $F_3(s) = -\ \dfrac{\zeta'}{\zeta}(s)$,

où $\psi(x) = \psi(x , 1)$ et $\zeta(s) = L(s , 1)$. Les hypothèses $1 \in \mathfrak{F}_2$, $X \in \mathfrak{F}_2$ et $X^2 \in \mathfrak{F}_1$ permettent d'appliquer le théorème 4, d'où

$$2\psi(x) - \mathrm{Re}(\psi(x , X)) = (2 - B(X))\, x + o(x) ,$$

$$\psi(x) - \mathrm{Im}(\psi(x , X)) = x + o(x) ,$$

$$\psi(x) = x + o(x) ,$$

et les théorèmes 3 et 2.

5. Problème de l'équirépartition d'un produit de caractères.

Le problème de l'évaluation d'une somme $B(x , XX')$, connaissant $B(x , X)$ et $B(x , X')$, ou plus généralement des renseignements sur X et X' mais pas sur leur produit, est important. Si on savait le résoudre, l'hypothèse $\langle X \rangle \subset \mathcal{K}$ du théorème 2, qui porte sur toutes les puissances X^n , pourrait être remplacée par des hypothèses sur X uniquement. On ne sait malheureusement rien dire en général, mais, dans certains cas particuliers, nous obtenons des résultats.

Soit L_θ le caractère de $\mathcal{N}$, $L_\theta(b) = \|b\|^{i\theta} = \exp(i\theta \log \|b\|)$. Alors nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.

$$f \in E \Longrightarrow \forall\, \theta \in \underset{\sim}{R} ,\quad fL_\theta \in E ,$$

$$f \in Eq \Longrightarrow \forall\, \theta \in \underset{\sim}{R} ,\quad fL_\theta \in Eq .$$

Ce théorème est intéressant car, en le combinant avec le théorème 2, on obtient

$$\exists\, \theta \in \underset{\sim}{R} ,\quad \langle XL_\theta \rangle \subset \mathcal{K} \Longrightarrow \{X \in E \Longleftrightarrow X \in Eq\} .$$

La démonstration du théorème 5 est très simple, et repose sur la formule de sommation de Abel. Si g est une application de $\mathcal{N}$ dans $\underset{\sim}{C}$:

$$B(x , gL_\theta) = B(\beta , gL_\theta) \text{ , où } \beta \text{ est le plus grand entier de } \mathcal{N} \text{ tel que } \|\beta\| \leqslant x$$

$$= B(\beta , g)\|\beta\|^{i\theta} - \int_1^{\|\beta\|} B(t , g)\, d(t^{i\theta}) ,$$

et l'on obtient

$$B(x , g) = o(x) \Longrightarrow B(x , gL_\theta) = o(\|\beta\|) = o(x) ,$$

et l'équivalence entre les deux, car $g = (gL_\theta)L_{-\theta}$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 1, en remarquant que $L_\theta^n = L_{n\theta}$ et $\psi(x , f) = B(x , \Lambda f)$.

Ce résultat contient un résultat de DELANGE sur $\underset{\sim}{N}$ (voir [5]). Si f est une fonction simplement additive sur $\underset{\sim}{N}$, le problème de l'équirépartition modulo 1 de la suite $\{f(n)\}$ est indépendant de l'ajout d'un terme $\theta \log n$ à f , résultat qui se traduit, avec nos notations, par

$$\text{si } \mathcal{N} = \underset{\sim}{N}^* ,\quad f \in E \Longrightarrow \forall\, \theta \in \underset{\sim}{R} ,\quad fL_\theta \in E$$

Notons $\langle X , X' \rangle$ le groupe engendré par X et X' . Alors, à l'aide d'une ca-

ractérisation de $E \cap \{X ;\ \langle X \rangle \subset \mathcal{K}\}$, et de l'étude des groupes de caractères contenus dans $\mathcal{K}$, on obtient le résultat suivant, du même type que le précédent, et qui généralise le théorème 5, car $1 \notin E \Longrightarrow \forall\, \theta \in \underset{\sim}{R}$, $L_\theta \notin E$.

THÉORÈME 6. - Soient X et X' deux caractères de $\mathcal{N}$ tels que $\langle X , X' \rangle \subset \mathcal{K}$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} X' \in E \\ X \notin E \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\, n \in \underset{\sim}{Z},\ n \neq 0,\ XX'^{n} \in E .$$

En particulier, ce résultat est vrai si X est d'ordre fini, car alors, pour un $n > 0$, $B(x , X^n) = B(x , 1) \neq o(x)$ et $X \notin E$. Néanmoins la condition $\langle X , X' \rangle \subset \mathcal{K}$ est là encore très contraignante.

6. Fonctions simplement multiplicatives de $\mathcal{N}$ dans $\underset{\sim}{U}$.

Nous noterons Y une telle application, X l'application totalement multiplicative définie, $\forall\, p \in \mathcal{P}$, par $X(p) = Y(p)$. Il est évident que $Y \in Eq$ est équivalent à $X \in Eq$.

D'autre part, en généralisant la technique employée par HALASZ dans [7], nous montrons que, si $B(x , X) = Cx + o(x)$, alors $B(x , Y) = CH(1)\, x + o(x)$, où H est une certaine série de Dirichlet absolument convergente en $s = 1$, d'où

$$Y \in E \Longrightarrow X \in E .$$

Malheureusement, on ne peut pas faire passer de $B(x , X)$ à $B(x , Y)$ des restes autres que $o(x)$, par exemple des restes $O(x \log^{-\gamma} x)$. Le théorème 2 donne donc l'équivalence $Y \in E \Longrightarrow Y \in Eq$, mais avec des conditions portant sur X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMITSUR (S. A.). - Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorems, Canad. J. Math., t. 13, 1961, p. 83-109.

[2] AMITSUR (S. A.). - Correction to "Arithmetic linear transformations", Canad. J. Math. t. 21, 1969, p. 1-5.

[3] BEURLING (A.). - Analyse de la loi asymptotique de distribution des nombres premiers généralisés, I, Acta Math., Uppsala, t. 68, 1937, p. 255-291.

[4] BOREL (J.-P.). - Problèmes d'équirépartition liés aux nombres premiers généralisés de Beurling et aux systèmes d'entiers de Gauss généralisés. Thèse de 3e cycle, Université Aix-Marseille-II, 1977.

[5] DELANGE (H.). - Quelques résultats nouveaux sur les fonctions additives, "Colloque de théorie des nombres [1969. Bordeaux]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 25, 1971, p. 45-53.

[6] DIAMOND (H. G.). - Chebyshev estimates for Beurling generalized prime numbers, Proc. Amer. math. Soc., t. 39, 1973, p. 503-508.

[7] HALASZ (G.). - Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionnen, Acta Math. Acad. Sc. Hungar., t. 19, 1968, p. 365-403.

[8] IKEHARA (S.). - An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers, J. of Math. and Phys., t. 10, 1937, p. 1-12.

[9] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience Series).

[10] MULLER (H.). - Ein Betrag zur abstrakten Primzahltheorie, J. für die reine und angew. Math., t. 259, 1973, p. 171-182.

(Texte reçu le 7 novembre 1977)

Jean-Pierre BOREL
Mathématiques université de Limoges
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES