Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Jacques Vélu

Quelques identités entre formes modulaires

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1977-1978), exp. n° 1, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 1, 6 p.

3 octobre 1977

QUELQUES IDENTITÉS ENTRE FORMES MODULAIRES

par Jacques VÉLU

1. Introduction.

La littérature ne manque pas d'identités donnant le développement en série d'un produit infini, et l'exemple le plus célèbre est peut-être celui d'Euler

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\, q^{(3m^2+m)/2} .$$

On en trouvera d'autres dans [1]. C'est une telle identité que je me propose de démontrer ici.

Dans ce qui suit, la lettre N désigne un entier strictement supérieur à 1, q et q_N sont deux variables liées par la relation

$$q = q_N^N .$$

Si $R \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous notons $\sigma(R)$ l'unique entier tel que $0 \leq \sigma(R) < N$ et $\sigma(R) \in R$, ainsi que

$$W(R) = \prod_{\substack{n>0 \\ n\in R}}(1 - q^n) \prod_{\substack{n>0 \\ n\in -R}}(1 - q^n) . \tag{1}$$

Enfin, si R et S sont des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous posons

$$\theta_{R,S} = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ mn>0 \\ m\in R \\ n\in S}} sg(m)\, q_N^{mn} \text{, avec } sg(m) = \frac{m}{|m|} . \tag{2}$$

Nous avons évidement

$$\theta_{R,S} = \theta_{S,R} \quad \text{et} \quad \theta_{-R,-S} = -\theta_{R,S} ,$$

et nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *La série* $\theta_{R,S}$ *admet le développement en produit infini :*

$$\theta_{R,S} = \begin{cases} 0 & \text{si } R + S = 0 \\ q_N^{\sigma(R)\sigma(S)} \dfrac{W(0)\, W(R+S)}{W(R)\, W(S)} & \text{si } \sigma(R+S) = \sigma(R) + \sigma(S) \\ -\, q_N^{\sigma(-R)\sigma(-S)} \dfrac{W(0)\, W(R+S)}{W(R)\, W(S)} & \text{si } \sigma(R+S) \neq \sigma(R) + \sigma(S) \end{cases} . \tag{3}$$

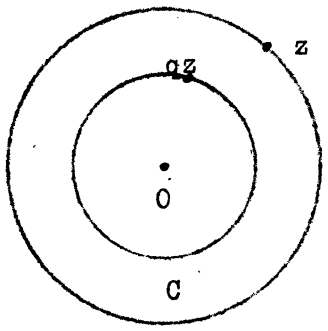
2. Les fonctions loxodromiques.

Soit q un nombre complexe non nul tel que $|q| < 1$. Notons K le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C} - \{0\}$ telles que

$$f(qz) = f(z) .$$

Ces fonctions qu'on appelle *loxodromiques* sont les fonctions méromorphes sur un

tore. En effet, on peut les interpréter comme les fonctions méromorphes sur la couronne C dont on a identifié les points z et qz des bords.



Le corps K est donc le corps des fonctions d'une courbe elliptique et sa structure est bien connue. Cependant, il existe une façon commode d'écrire les fonctions de K quand on connait leurs zéros et leurs pôles. En effet, posons

$$T(z , q) = (1 - z) \prod_{n>0}(1 - q^n z)(1 - q^n z^{-1})(1 - q^n) . \tag{4}$$

C'est une fonction de z holomorphe sur $\underset{\sim}{C} - \{0\}$, ayant pour zéros un zéro simple en chaque point de l'ensemble $\{q^n\}_{n\in\underset{\sim}{Z}}$ et vérifiant

$$T(qz , q) = - \frac{T(z , q)}{z} . \tag{5}$$

De plus, il est facile de prouver ([5] page 478) la proposition suivante.

PROPOSITION 1.

1° Soient $a_1 , \dots , a_s , b_1 , \dots , b_s$ dans $\underset{\sim}{C} - \{0\}$ tels que

$$\frac{\prod_i b_i}{\prod_i a_i} = q^n , \text{ avec } n \in \underset{\sim}{Z} ,$$

et soit $\lambda \in \underset{\sim}{C}$. La fonction

$$\varphi(z) = \lambda z^n \prod_i \frac{T(z/a_i , q)}{T(z/b_i , q)} \tag{6}$$

est dans K .

2° Réciproquement, si φ est une fonction de K , il existe $a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_s$, n et λ tels que φ s'écrive sous la forme (6).

3. Application.

Fixons $b_1 , \dots , b_s$ dans $\underset{\sim}{C} - \{0\}$, et posons

$$Q(z) = \prod_i (1 - \frac{z}{b_i}) .$$

Soit q un nombre complexe non nul tel que $|q| < 1$, et soit B l'ensemble des nombres complexes de la forme $b_i q^n$, avec $n \in \underset{\sim}{Z}$.

Il est aisé de prouver le lemme suivant.

LEMME. - Pour tout polynôme $P \in \underset{\sim}{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $\deg P < s$, la série $\sum_{m\in\underset{\sim}{Z}} P(q^m z)/Q(q^m z)$ converge uniformément sur tout compact de $\underset{\sim}{C} - \{0\}$ ne

rencontrant pas B, et sa somme est une fonction de K n'ayant pour pôles que les éléments de B.

A chaque fois qu'on peut déterminer les zéros de cette fonction, on obtient, grâce à la proposition 1, une identité du type

$$(7) \qquad \sum_{m\in Z} \frac{P(q^m z)}{Q(q^m z)} = \lambda z^m \prod_i \frac{T(z/a_i , q)}{T(z/b_i , q)} .$$

Il semble bien difficile de trouver les a_i pour des polynômes P et Q quelconques. Cependant, c'est ce que nous allons faire dans un cas très particulier.

4. Les fonctions φ_R.

Soient N un entier strictement supérieur à 1, et $R \in \underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z} - \{0\}$. Choisissons

$$Q(z) = 1 - z^N \quad \text{et} \quad P(z) = z^{\sigma(R)} ,$$

et posons

$$\varphi_R(z) = \sum_{m\in\underset{\sim}{Z}} \frac{P(q^m z)}{Q(q^m z)}$$

de sorte que

$$(8) \qquad \varphi_R(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{(q^m z)^{\sigma(R)}}{1 - (q^m z)^N} - \sum_{m\geq 1} \frac{(q^m/z)^{\sigma(-R)}}{1 - (q^m/z)^N} .$$

Cette fonction est dans K, ses pôles sont simples, ce sont les nombres ζq^n, avec $\zeta^N = 1$ et $n \in \underset{\sim}{Z}$. Elle vérifie de plus la relation

$$(9) \qquad \varphi_R(\zeta z) = \zeta^{\sigma(R)} \varphi_R(z) ,$$

pour toute ζ-racine N-ième de 1.

Nous allons écrire φ_R sous la forme (6). Supposons que

$$\varphi_R(z) = \lambda z^n (\prod_{i=1}^N T(z/a_i , q))/(\prod_\zeta T(z/\zeta , q)) .$$

La relation (9) montre que les nombres $a_1 \zeta q^m$, avec $\zeta^N = 1$ et $m \in \underset{\sim}{Z}$, sont des zéros de φ_R. D'autre part, si $\zeta \neq \zeta'$, le nombre $a_1 \zeta q^m / a_1 \zeta' q^{m'}$ n'est pas de la forme q^t, avec $t \in \underset{\sim}{Z}$. Il en résulte que φ_R n'a pas d'autres zéros que les nombres $a_1 \zeta q^m$. Quitte à remplacer a_i par $a_i q^m$, nous pouvons supposer qu'il existe un nombre complexe a non nul tel que

$$a_k = a \exp(2\pi i k)/N ,$$

et, avec les notations de la proposition 1,

$$\prod_{i=1}^N (b_i/a_i) = 1/a^N = q^n ,$$

pour un certain $n \in \underset{\sim}{Z}$. Donc $a = q_N^{-n}$, où q_N désigne une racine Nième de q. De sorte que

$$\varphi_R(z) = \lambda z^n \prod_\zeta (T(z/\zeta q_N^{-n} , q))/(T(z/\zeta , q)) ,$$

ce qu'on peut récrire

(10) $$\varphi_R(z) = \lambda z^n (T(z^N q^n , q^N))/(T(z^N , q^N)) .$$

La relation (9) montre que $n \in R$, et l'identité (5) que (10) est vraie, pour tout $n \in R$. On a en particulier

(11) $$\varphi_R(z) = \lambda z^{\sigma(R)} (T(z^N q^{\sigma(R)} , q^N))/(T(z^N , q^N)) .$$

Enfin, pour déterminer λ, il suffit d'étudier le comportement de φ_R au voisinage de $z = 1$ dans les expressions (8) et (11), ce qui donne

(12) $$\varphi_R(z) = \sum_{m \in \underset{\sim}{Z}} \frac{(q^m z)^{\sigma(R)}}{1 - (q^m z)^N} = \frac{W(0)}{W(R)} z^{\sigma(R)} \frac{T(z^N q^{\sigma(R)} , q^N)}{T(z^N , q^N)} .$$

Pour démontrer le théorème 1, il ne reste plus qu'à poser $z = q_N^s$, avec $s \in S$, dans (11). On trouve au passage

(13) $$\varphi_R(q_N^s) = \theta_{R,S} .$$

Remarque. - Les fonctions φ_R sont étudiées dans [6] afin de construire une courbe elliptique universelle munie d'un groupe $\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z} \times \mu_N$. On y définit aussi φ_0 par $\varphi_0(z) = 1$, pour que (9) soit conservée. Mais on peut définir une autre fonction φ_0 en posant $P(z) = -(z + \ldots + z^{N-1})$ de sorte que

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - z^N} - \frac{1}{1 - z}$$

et

$$\varphi_0(z) = \sum_{m \in \underset{\sim}{Z}} \frac{1}{1 - (q^m z)^N} - \frac{1}{1 - q^m z} .$$

L'intérêt de ce choix est le suivant. Notons $\hat{\underset{\sim}{Z}}$ le complété de $\underset{\sim}{Z}$ pour la topologie définie par les sous-groupes d'indice fini. A tout couple (r , N), où $r \in \hat{\underset{\sim}{Z}}$ et N est un entier $\geqslant 1$, est associée la boule $B(r , N)$ de $\hat{\underset{\sim}{Z}}$ définie par

$$B(r , N) = \{x \in \hat{\underset{\sim}{Z}} ; \quad x \equiv r \mod N\} .$$

Soit R la classe de r modulo N. Alors l'application qui associe à $B(r , N)$ la fonction φ_R est une distribution sur $\hat{\underset{\sim}{Z}}$ à valeurs dans K [3].

5. Une relation entre les séries $\theta_{R,S}$.

Nous supposons dans ce paragraphe que N est impair. La multiplication par 2 est alors un automorphisme du groupe $\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z}$. Ce qui donne un sens à la notation $R/2$.

THÉORÈME 2. - *Soient R et S dans $\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z}$ tels que $R \neq 0$, $S \neq 0$, $R + S \neq 0$. Alors*

(14) $$\theta_{R,S} = \frac{\theta_{R/2,-R} \, \theta_{S/2,-S}}{\theta_{(R+S)/2,-R-S}} .$$

Preuve. - Il faut examiner deux cas.

(i) $\sigma(R)$ *est pair*. - Alors, $\sigma(R/2) = \sigma(R)/2$ et $\sigma(-R) = N - \sigma(R)$, d'où

$$\sigma(R/2) + \sigma(-R) = N - \sigma(R)/2 < N ,$$

et

$$\theta_{R/2,-R} = q_N^{(\sigma(R)\sigma(-R))/2}\,\frac{W(0)}{W(R)}\ .$$

(ii) $\sigma(R)$ est impair. - Alors, $\sigma(R/2) = (N + \sigma(R))/2$ et $\sigma(-R) = N - \sigma(R)$, d'où

$$\sigma(R/2) + \sigma(-R) = (3N - \sigma(R))/2 > N\ ,$$

et

$$\theta_{R/2,-R} = -\,q_N^{(\sigma(R)\sigma(-R))/2}\,\frac{W(0)}{W(R)}\ .$$

Il résulte de cette alternative qu'on a toujours

$$\theta_{R/2,-R} = (-1)^{\sigma(R)}\,q_N^{(\sigma(R)\sigma(-R))/2}\,\frac{W(0)}{W(R)}\ , \tag{15}$$

et, en reportant cette relation dans (3), on obtient (14).

Remarque. - On trouvera d'autres relations entre les séries $\theta_{R,S}$ dans [6], où $\theta_{R/2,-R}$ est notée $1/a_R$.

6. Les séries $\theta_{R,S}^{(k)}$.

La série $\theta_{R,S}$ a la structure d'une série thêta classique [4]. Elle s'écrit

$$\theta_{R,S} = \sum_{\substack{(m,n)\in\underset{\sim}{Z}^2\\ m\in R\\ n\in S}} \chi(m\ ,\ n)\ q_N^{Q(m,n)}\ ,$$

où Q est la forme bilinéaire $Q(m\ ,\ n) = mn$, et χ est définie par

$$\chi(m\ ,\ n) = \begin{cases} 0 & \text{si } mn \leqslant 0 \\ \mathrm{sg}(m) & \text{si } mn > 0 \end{cases}\ .$$

La fonction χ est homogène de degré 0 et sphérique pour Q (au sens des distributions) car

$$\iint_{\underset{\sim}{R}^2} \chi(x\ ,\ y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} = 0\ ,$$

pour toute fonction f, C^∞ à support compact. Si la théorie des séries thêtas associées à une forme bilinéaire définie positive s'appliquait, on aurait ainsi une preuve directe du théorème suivant, dû à HECKE (cf. [2], papier 23, p. 451).

THÉORÈME 3. - La série $\theta_{R,S}$ est une forme modulaire de poids 1 pour $\Gamma(N)$.

Enfin, on peut généraliser les séries $\theta_{R,S}$, dans l'esprit de (13), de la façon suivante. Posons $z = \exp u$. Soit $R \in \underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z} - \{0\}$, alors

$$\varphi_R(z) = -\frac{1}{Nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\,\theta_{R,0}^{(k)}\ ,$$

avec

$$\theta_{R,0}^{(k)} = -\,N^{k-1}\,\frac{B_k\left(\frac{\sigma(R)}{N}\right)}{k} + \sum_{\substack{(m,n)\in\underset{\sim}{Z}^2\\ mn>0\\ m\in R,\ n\in 0}} \mathrm{sg}(m)\ m^{k-1}\ q_N^{mn}\ ,$$

et de même, pour tout entier $s \not\equiv 0 \ (N)$,

$$\varphi_R(q_N^S z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} \theta_{R,S}^{(k)} ,$$

avec

$$\theta_{R,S}^{(k)} = \sum_{\substack{(m,n)\in\tilde{Z}^2 \\ mn>0 \\ m\in R \\ n\equiv s(N)}} sg(m)\, m^{k-1}\, q_N^{mn} .$$

Ces séries $\theta_{R,0}^{(k)}$ et $\theta_{R,S}^{(k)}$ sont combinaisons linéaires des séries d'Eisenstein introduites par HECKE dans ([2], papier 24) et, de ce fait, sont des formes modulaires de poids k pour $\Gamma(N)$. Pour k fixé, il résulte de la remarque terminant le paragraphe 4 que l'application associant $\theta_{R,0}^{(k)}$ à la boule $B(R , N)$ de $\hat{\tilde{Z}}$ est une distribution sur $\hat{\tilde{Z}}$ à valeurs dans le groupe des formes modulaires de poids k pour $\Gamma(N)$, à coefficients entiers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMAZURE (M.). - Identités de MacDonald, Séminaire Bourbaki, 28e année, 1975/76, exposé n° 483, 11 p. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 567).

[2] HECKE (E.). - Mathematische Werke. - Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959.

[3] LANG (S.). - Introduction to modular forms. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 222).

[4] SCHOENEBERG (B.). - Elliptic modular functions. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 203).

[5] VALIRON (G.). - Cours d'analyse mathématique. Vol. I : Théorie des fonctions. 3e édition. - Paris, Masson, 1955.

[6] VÉLU (J.). - Courbes elliptiques munies d'un sous-groupe $\tilde{Z}/n\tilde{Z} \times \mu_n$, Bull. Soc. math. France, Mémoire 57, 1978 (à paraître).

(Texte reçu le 12 mai 1978)

Jacques VÉLU
3 résidence du Parc
91120 PALAISEAU