Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Quelques aspects de la théorie additive des nombres

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 18, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 18, 4 p.

9 janvier 1978

QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES

par Jean-Marc DESHOUILLERS

Résumé. - Cet exposé présente quelques aspects de l'étude des bases et des applications qui transforment toute base en une base. Il renferme plus de questions (précédées d'un point d'interrogation) que de réponses, et le lecteur trouvera les démonstrations des résultats cités dans [1] et [2].

1. On appelle base une partie $\mathcal{B}$ de $\underset{\sim}{N}$ telle qu'il existe un entier h pour lequel tout élément de $\underset{\sim}{N}$ est somme d'au plus h éléments de $\mathcal{B}$, le plus petit tel h est l'ordre de la base.

Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\underset{\sim}{N}$, et k un entier naturel, on note $\mathcal{A}^{(k)}$ l'ensemble des puissances k-ièmes des éléments de $\mathcal{A}$.

Ainsi, avec ces notations, le théorème de Lagrange s'énonce en disant que $\underset{\sim}{N}^{(2)}$ est une base d'ordre 4, et le théorème de Hilbert relatif au problème de Waring énonce que, pour tout k, $\underset{\sim}{N}^{(k)}$ est une base.

On notera $\underset{\sim}{B}$ la famille de toutes les applications f croissantes (au sens large) de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et $f(\mathcal{B}) = \{f(b) ; b \in \mathcal{B}\}$ est une base, pour toute base $\mathcal{B}$. On vérifie aisément que toute application croissante de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(n) = \alpha n + O(1)$ (pour un certain $\alpha > 0$), est un élément de $\underset{\sim}{B}$. DESHOUILLERS, ERDŐS, FOURRY et SARKŐZI ont démontré que, pour tout entier $k > 1$, l'application $x \longmapsto x^k$ n'est pas dans $\underset{\sim}{B}$ et, fait plus surprenant, l'application $x \longmapsto [x^{1/k}]$ non plus !

Au vu de ces exemples, et des résultats exposés ci-dessous, j'ai été conduit à formuler la conjecture suivante.

? Si $f \in \underset{\sim}{B}$, et $\liminf((\log f(n))/f(n)) > 0$, il existe un nombre réel positif α tel que $f(n) = \alpha n + O(1)$.

Assez curieusement, je sais régler deux cas extrêmes :

(i) Si $\Delta^2 f > 0$ (i. e. f strictement convexe), $f \notin \underset{\sim}{B}$.

(ii) Si $\Delta f > 0$ (i. e. f strictement croissante), $f(n) = n + o(n)$, ou bien $f(n) = n + O(1)$, ou bien $f \notin \underset{\sim}{B}$.

Les deux variantes suivantes me semblent accessibles :

? $$\Delta^2 f \geqslant 0 \Longrightarrow (f(n) = \alpha n + O(1) \text{ ou bien } f \notin \underset{\sim}{B}) ,$$

? $$(\Delta f > 0 \text{ et } f \in \underset{\sim}{B}) \Longrightarrow f(n) = \alpha n + O(1) .$$

Le principe de démonstration est le suivant. On cherche à construire une base $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B})$ ne soit pas une base (pour des raisons générales, i. e. par application d'un critère générale pour non-bases).

2. Nous allons maintenant nous attacher à l'étude des critères pour non-bases. Le lecteur trouvera dans l'article de STÖHR [4] un grand nombre de tels critères que nous ne reprendrons pas ici. En ce qui nous concerne, ils souffrent du défaut d'être tels que si $\mathcal{B}$ est une base, $f(\mathcal{B})$ ne peut satisfaire à de tels critères. Avant d'énoncer le premier critère, qui est en fait une caractérisation des bases, donnons une définition.

Une application g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est dite sous-additive si on a

$$g(m+n) \leq g(m) + g(n) ,$$

pour tout couple d'entiers (m , n) .

CRITÈRE 1. - Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{N}$. On a l'équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

(i) Il existe une fonction sous-additive bornée sur $\mathcal{A}$ et non bornée sur $\mathbb{N}$,

(ii) $\mathcal{A}$ n'est pas une base.

L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est un exercice sans grande difficulté. E. WIRSING a fourni la démonstration de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) (sur laquelle j'avais "séché" bien longtemps) : Considérer l'application qui à n fait correspondre le nombre minimal d'éléments de $\mathcal{A}$ nécessaires pour écrire n comme somme d'éléments de $\mathcal{A}$!

Le cas des fonctions sous-additives bornées est moins clair, on a cependant le critère suivant.

CRITÈRE 2. - Soit g une fonction sous-additive bornée telle que

$$d_{\sup}\{n \; ; \; g(n) \leq \varepsilon\} \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \varepsilon .$$

Alors on a :

$$\lim_{a\in\mathcal{A},\, a\to\infty} g(a) = 0 \Longrightarrow \mathcal{A} \text{ non-base.}$$

Que se passe-t-il si la condition suppémentaire n'est pas satisfaite ? On a la réponse incomplète suivante.

Soit g une fonction sous-additive bornée telle que $\lim_{\varepsilon\to 0} d_{\inf}\{n \; ; \; g(n) \leq \varepsilon\} > 0$. Alors il existe une progression arithmétique sur laquelle g tend vers 0 .

L'énoncé suivant est-il correct ?

? Soit g une fonction sous-additive bornée. Alors on est dans l'un des deux cas suivants :
pour toute suite $\mathcal{A}$, $\lim_{a\in\mathcal{A},\, a\to\infty} g(a) = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ non-base,
il existe une pregression arithmétique sur laquelle g tend vers 0 .

On remarque qu'en appliquant le critère 2 au cas où $g(n) = \|\rho n\|$, pour ρ irrationnel, on retrouve un critère dû à DESHOUILLERS, ERDÖS et SÁRKÖZI [3]. Nous allons maintenant étendre ce dernier critère, ce qui permet de répondre à une question posée par ERDÖS .

Pour tout nombre réel α , et toute suite $\mathfrak{a}$, on note $E(\alpha , \mathfrak{a})$ l'ensemble des points d'accumulation (dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) de l'ensemble $\{\{\alpha a\} ; a \in \mathfrak{a}\}$, et on note μ_α la mesure de Haar de $E(\alpha , \mathbb{N})$. On a le critère suivant.

CRITERE 3. - Soit h un entier supérieur ou égal à 1 , et soit $\mathfrak{a}$ une partie de $\mathbb{N}$. On a

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \alpha ; \mu(hE(\alpha , \mathfrak{a})) < \varepsilon \Longrightarrow \mathfrak{a} \text{ n'est pas base d'ordre } h .$$

Ce critère (ou plutôt une légère extension de celui-ci) permet de démontrer l'existence d'une base $\mathfrak{B}$ telle que, pour tout couple d'entiers k et ℓ , on ait

$$\mathfrak{B} + \ell(\mathfrak{B}^{(2)} + \dots + \mathfrak{B}^{(k)}) \neq \mathbb{N} .$$

Si l'on cherche à remplacer dans les critères précédents les bases par des composantes essentielles, on est amené à se poser la question suivante.

? Existe-t-il une fonction sous-additive non bornée g telle que l'ensemble $\{n ; g(n)/(\max_{m\leq n} g(m)) \leq \beta\}$ admette une densité et que cette densité soit une fonction continue de β .

J'ai plutôt l'impression qu'une telle fonction n'existe pas.

2. Si $\mathfrak{a}$ est une partie de $\mathbb{N}$, on note $A(n)$ le nombre d'éléments positifs de $\mathfrak{a}$ au plus égaux à n , et on note $\sigma\mathfrak{a} = \inf_{n\in\mathbb{N}^*}(A(n)/n)$. $\sigma\mathfrak{a}$ est la densité de Šnirel'man de la suite $\mathfrak{a}$. Dans la dernière partie de l'exposé oral, j'avais posé la question de savoir si l'on avait la relation

$$\sigma(3\mathfrak{a}) \geq \min(1 , \frac{3}{2}\sigma(2\mathfrak{a})) .$$

J'ai trouvé depuis le contre-exemple suivant. Soit

$$\mathfrak{a} = \{0 , 1 , 3 , 6 , 8 , 16 , 22 , 23 , 24 , 25 , \dots\} ,$$

on a

$$2\mathfrak{a} = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9 , 11 , 12 , 14 , 16 , 17 , 19 , 22 , 23 , \dots\} ,$$

et

$$3\mathfrak{a} = \{0 , 1 , 2 , 3 , \dots , 20 , 22 , 23 , 24 , \dots\} .$$

On vérifie aisément que l'on a

$$\sigma(3\mathfrak{a}) = \frac{20}{21} \text{ et } \sigma(2\mathfrak{a}) = \frac{2}{3} .$$

? Le problème subsiste qui consiste à évaluer le minimum de $\sigma(3\mathfrak{a})$ sur toutes les suites pour lesquelles $\sigma(2\mathfrak{a})$ est donné.

Il résulte du théorème d'Erdös que ce minimum est strictement supérieur à $\sigma(2\mathfrak{a})$ (si $0 < \sigma(2\mathfrak{a}) < 1$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DESHOUILLERS (J.-M.). - Théorie additive et répartition modulo 1, Séminaire de Théorie des nombres de l'Université de Bordeaux, 1975/76, n° 2, 10 p.

[2] DESHOUILLERS (J.-M.). - Tératologie additive, "Comptes rendus des Journées additives". - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[3] DESHOUILLERS (J.-M.), ERDÖS (P.) and SÁRKÖZI (A.). - On additive bases, Acta Arith., Warszawa, t. 30, 1976, p. 121-132.

[4] STÖHR (A.). - Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, I et II, J. für reine und angew. Math., t. 194, 1955, p. 40-65 et p. 111-140.

(Texte reçu le 4 avril 1978)

Jean-Marc DESHOUILLERS
Mathématiques
Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 226
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALENCE CEDEX