

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-LOUP MAUCLAIRE

Sur certaines fonctions arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1976-1977),
exp. n° 26, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A7_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

On appelle fonction additive une application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ lorsque $(m, n) = 1$; si $f(mn) = f(m) + f(n)$ quels que soient m et n , f est dite "complètement additive".

I

P. ERDÖS a démontré que, si f est additive, et si $\{f(n)\}$ est une suite croissante, alors $f(n) = c \log n$ (voir [1]).

On peut étendre ce résultat de la façon suivante :

THÉOREME I. - Si f est additive, s'il existe a et b entiers tels que $(a, b) = 1$ et que $\{f(an + b)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ soit une suite croissante, alors il existe c tel que $f(n) = c \log n$ pour $(n, a) = 1$.

Remarquons que la condition $(a, b) = 1$ n'est introduite que pour simplifier l'énoncé du théorème (à ce sujet, voir [2], p. 6).

Preuve du théorème I. - L'outil essentiel sera le résultat suivant ([3], § 5, p. 47, Théorème 2.1) :

(R) Si $x, y, z \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, et si (x, y, z) sont multiplicativement indépendants, si f est une fonction telle que

$$f(x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}) = f(x^{\alpha_1}) + f(y^{\alpha_2}) + f(z^{\alpha_3}), \text{ où } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N},$$

si f est croissante sur l'ensemble $\mathcal{N} = \{n = x^k y^\ell z^m, k, \ell, m \in \mathbb{N}\}$, alors $f(n) = c \log n$ quand $n \in \mathcal{N}$.

On suppose $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ a été traité par I. KATAÏ dans [4]).

1° On démontre que si $(a, n_1) = 1$, $f(n_1^{\varphi(a)}) = \varphi(a) f(n_1)$, où φ est l'indicateur d'Euler.

En effet, soient $p_1, \dots, p_{\varphi(a)}$, $\varphi(a)$ nombres premiers distincts tels que

$$p_i n_1 \equiv 1 \pmod{a}, \quad 1 < i \leq \varphi(a),$$

et n_2, n_3, n_4 trois entiers premiers avec n_1 , avec $p_1, p_2, \dots, p_{\varphi(a)}$ premiers entre eux deux à deux, et tels que

$$\begin{aligned} n_2 &\equiv 1 \pmod{a}, \\ n_3 &\equiv 1 \pmod{a}, \\ n_4 &\equiv b \pmod{a}. \end{aligned}$$

La fonction $f(\cdot n_4) - f(n_4)$ est croissante sur $\{(n_1 p_i)^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3}, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N})\}$, et égale $f(\cdot)$ sur cet ensemble.

On applique R, et l'on a

$$f(n_1 p_i) = c \log(n_1 p_i), \quad (1 \leq i \leq \varphi(a)), \quad \text{avec} \quad c = \frac{f(n_2)}{\log n_2} = \frac{f(n_3)}{\log n_3}.$$

On en déduit

$$\varphi(a) f(n_1) + f\left(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i\right) = \varphi(a) c \log n_1 + c \log\left(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i\right).$$

De même, $f(\cdot n_4) - f(n_4)$ est croissante sur

$$\{(p_1 \times \dots \times p_{\varphi(a)})^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3}\},$$

d'où, par R,

$$f\left(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i\right) = c \log\left(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i\right).$$

Enfin, $f(\cdot n_4) - f(n_4)$ est croissante sur $\{(n_1^{\varphi(a)})^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3}\}$. On obtient, par R,

$$f(n_1^{\varphi(a)}) = \varphi(a) c \log n_1,$$

d'où $f(n_1^{\varphi(a)}) = \varphi(a) f(n_1)$.

2° Si $m \leq n$, $(mn, a) = 1$, $f(m) \leq f(n)$.

En effet, soit $\ell \equiv b \pmod{a}$, $(\ell, mn) = 1$. On a

$$f(m^{\varphi(a)} \ell) \leq f(n^{\varphi(a)} \ell).$$

D'où

$$f(m^{\varphi(a)}) \leq f(n^{\varphi(a)}),$$

et d'après le 1°,

$$f(m) \leq f(n).$$

3° D'après le 2°, f est croissante sur $\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots, p_i \text{ premier, } p_i \nmid a\}$; d'après (R), on a $f(n) = c \log n$ sur cet ensemble, ce qui établit le résultat annoncé.

II

On doit à E. WIRSING le résultat suivant [4] :

Si f est complètement additive, et si $f(n+1) - f(n) = o(\log n)$,

$$f(n) = c \log n.$$

On peut le généraliser de la façon suivante :

THÉORÈME II. - Si f et g sont complètement additives, s'il existe a, b , $(a, b) = 1$, tels que

$$f(an + b) - g(n) = o(\log n),$$

alors,

$$g(n) = c \log n$$

et

$$f(n) = c \log n \quad \text{pour} \quad (n, a) = 1 .$$

Preuve.

1° On a $f(an + b) - g(n) = o(\log n)$. On pose $b = \varepsilon |b|$, $\varepsilon = \pm 1$.

Alors, pour $n = |b|^m$,

$$f((am + \varepsilon)|b|) - g(|b|^m) = o(\log(|b|^m)) ,$$

d'où

$$f(am + \varepsilon) - g(m) = o(\log m) .$$

2° On démontre

$$g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n) .$$

En effet, pour $m = (a + 1)n + \varepsilon$, on a

$$am + \varepsilon = a((a + 1)n + \varepsilon) + \varepsilon = (a + 1)(an + \varepsilon) .$$

Comme

$$f(am + \varepsilon) - g(m) = o(\log m) ,$$

on a

$$(f(a + 1) + f(an + \varepsilon)) - g((a + 1)n + \varepsilon) = o(\log n) .$$

Or $f(an + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, donc

$$g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n) .$$

3° On démontre que $g(n) = c \log n$.

On utilisera le fait que, si $g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, alors $g(an + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$; c'est une conséquence du résultat suivant :

si $g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, alors $g((a + 1)n - \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$.

Ce dernier résultat s'établit comme suit : si $\varepsilon = + 1$, on a

$$g((a + 1)[(a + 1)^2 n^3 + 1] - g((a + 1)^2 n^3) = o(\log n) ,$$

i. e. $g((a + 1)n + 1) + g((a + 1)^2 n^2 - (a + 1)n + 1) - 3g(n) = o(\log n)$. Mais

$$g((a + 1)n + 1) - g(n) = o(\log n)$$

et

$$\begin{aligned} g((a + 1)^2 n^2 - (a + 1)n + 1) &= g[(a + 1)([a + 1]n - 1)n + 1] \\ &= g((a + 1)n - 1) + g(n) + o(\log n) , \end{aligned}$$

d'où, par substitution,

$$g((a + 1)n - 1) - g(n) = o(\log n) .$$

Si $\varepsilon = - 1$, on a

$$g((a + 1)((a + 1)n^2 - 1) - 2g(n) = o(\log n) ,$$

i. e. $g((a+1)n+1) + g((a+1)n-1) - 2g(n) = o(\log n)$, et par conséquent,
comme $g((a+1)n-1) = g(n) + o(\log n)$,

$$g((a+1)n+1) - g(n) = o(\log n).$$

Ainsi, si $g((a+1)n+\varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, on a simultanément

$$g((a+1)n-1) - g(n) = o(\log n),$$

et

$$g((a+1)n+1) - g(n) = o(\log n).$$

Alors,

$$\begin{aligned} g((a+1)n+1) + g(a) &= g(a(a+1)n+a) \\ &= g((a+1)(an+1) - 1) \\ &= g(an+1) + o(\log n). \end{aligned}$$

Mais $g((a+1)n+1) + g(a) = g(n) + o(\log n)$; donc $g(an+1) - g(n) = o(\log n)$,
et naturellement

$$g(an-1) - g(n) = o(\log n).$$

En itérant, on obtient $g(n+1) - g(n) = o(\log n)$, et, par le résultat de
WIRSING, précédemment cité, $g(n) = c \log n$.

4° Notre hypothèse devient

$$f(an+\varepsilon) - c \log n = o(\log n).$$

Si $\varepsilon = -1$, on a $f(a^2 n^2 - 1) = 2c \log n + o(\log n)$; or,

$$f(a^2 n^2 - 1) = f(an+1) + f(an-1) = f(an+1) + c \log n + o(\log n);$$

donc $f(an+1) = c \log n + o(\log n)$.

On a donc, de toute façon, $f(an+1) = c \log n + o(\log n)$.

Soit alors m tel que $(m, a) = 1$; à tout $k \in \mathbb{N}^*$, on associe $\rho(m, k) \in [1, a[$
tel que $m^k \rho(m, k) \equiv 1 \pmod{a}$. Alors,

$$f(m^k \rho(m, k)) = c \log(m^k \rho(m, k)) + o(\log(m^k \rho(m, k))),$$

d'où

$$\frac{f(m^k)}{\log n^k} = c + o(1), \quad (k \rightarrow +\infty),$$

et par conséquent $f(m) = c \log m$.

III

Pour terminer, mentionnons quelques résultats dont les démonstrations se trouvent dans [2].

THÉOREME III. 1. - α étant un entier ≥ 0 , on désigne par δ_α la fonction additive définie de la façon suivante :

$$\delta_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2|n \\ 0 & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}$$

pour $\alpha > 0$,

$$\delta_\alpha(n) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 2^{\alpha+1}|n \\ -1/2 & \text{si } 2^\alpha \parallel n \\ 0 & \text{si } 2^\alpha \nmid n. \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions additives. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(an + \varepsilon b) - g(n) - \ell| = 0,$$

où $a, b \in \underline{\mathbb{N}}^*$, $(a, b) = 1$, $\varepsilon = \pm 1$ (fixé).

1° Cas où a est pair. - Il existe une fonction complètement additive g' satisfaisant à

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |g'(kn + \varepsilon) - g'(n) - g'(k)| = 0 \text{ pour tout } k \geq a,$$

et une fonction additive h satisfaisant à

$$h(n) = h((n, b)) \text{ pour tout } n \in \underline{\mathbb{N}}^*.$$

(i. e. $h(p^r) = 0$ si $r \geq 1$ et $p \nmid b$, et $h(p^r) = h(p^\alpha)$ si $r \geq \alpha$ et $p^\alpha \parallel b$, $a \geq 1$), telles que

$$g(n) = g'(n) + h(n) \text{ pour tout } n \in \underline{\mathbb{N}}^*,$$

et

$$f(n) = g'(n) + h(n) \text{ pour } (n, a) = 1;$$

on a $\ell = g'(a)$.

2° Cas où a est impair. - b peut être pair ou impair. On suppose que $2^\alpha \parallel b$, $\alpha \geq 0$.

Il existe une fonction g' et une fonction h satisfaisant aux conditions indiquées plus haut, et une constante λ , telles que

$$g(n) = g'(n) + h(n) + \lambda \delta_\alpha(n) \text{ pour tout } n \in \underline{\mathbb{N}}^*,$$

et

$$f(n) = g'(n) + h(n) - \lambda \delta_\alpha(n) \text{ pour } (n, a) = 1.$$

On a

$$\lambda = 2g(2^{\alpha+1}) - g(2^{\alpha+2}) - g(2^\alpha),$$

$$\ell = g'(a) \text{ si } b \text{ est pair,}$$

$$\ell = g'(a) - \lambda \text{ si } b \text{ est impair.}$$

THÉORÈME III. 2. - Si f et g sont deux fonctions additives, et si
 $f(an + \varepsilon b) - g(n) = O(1)$, où $a, b \in \underline{\mathbb{N}}^*$, $(a, b) = 1$, $\varepsilon = \pm 1$ (fixé), il existe d tel que

$$g(n) - d \log n \text{ est bornée sur } \underline{\mathbb{N}}^*,$$

et

$$f(n) - d \log n \text{ est bornée sur l'ensemble des } n \text{ tels que } (n, a) = 1.$$

On remarquera que le théorème III.2 donne une condition nécessaire et suffisante pour que $f(an + \varepsilon b) - g(n) = o(1)$.

THÉOREME III. 3. - Si les hypothèses du théorème III. 1 ont lieu avec $a = 1$, il existe c tel que $g'(n) = c \log n$.

La preuve est immédiate, moyennant que le théorème 1 soit établi. On a en effet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |g'(n + \varepsilon) - g'(n)| = 0,$$

et par un résultat de I. KATAÏ, on a $g'(n) = c \log n$.

THÉOREME III. 4. - Soient f et g deux fonctions additives.

Etant donnés a et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $(a, b) = 1$, et $\varepsilon = \pm 1$ (fixé), on suppose que $f(an + \varepsilon b) - g(n)$ tend vers une limite finie λ quand n tend vers $+\infty$.

1° Si a est pair, il existe une constante c et une fonction additive h satisfaisant à

$$h(n) = h((n, b)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

(autrement dit, telle que, si $p \nmid b$, $h(p^r) = 0$ pour tout $r \geq 1$, et, si $p^\alpha \parallel b$, avec $\alpha > 0$, $h(p^r) = h(p^\alpha)$ pour $r \geq \alpha$), telles que

$$g(n) = c \log n + h(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$f(n) = c \log n + h(n) \text{ lorsque } (n, a) = 1.$$

2° Si a est impair, et $2^\alpha \parallel b$ avec $\alpha \geq 0$, il existe deux constantes c et λ , et une fonction h du type indiqué ci-dessus, telles que

$$g(n) = c \log n + h(n) + \lambda \delta_\alpha(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$f(n) = c \log n + h(n) - \lambda \delta_\alpha(n) \text{ lorsque } (n, a) = 1,$$

où δ_α est la fonction définie précédemment dans l'énoncé du théorème III. 1.

On a

$$\lambda = c \log a \text{ dans le cas où } b \text{ est pair,}$$

$$\lambda = c \log a - \lambda \text{ dans le cas où } b \text{ est impair.}$$

RÉFÉRENCES

- [1] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, *Annals of Math.*, t. 47, 1946, p. 1-20.
- [2] MAUCLAIRE (J.-L.). - Contribution à la théorie des fonctions additives, *Publications mathématiques d'Orsay*, n° 215-7665.

- [3] PISOT (C.) et SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.
- [4] WIRSING (E.). -- Additive number theoretic functions, "Journées sur la théorie additive des nombres" [1977. Bordeaux].

(Texte reçu le 5 septembre 1977)

Jean-Loup MAUCLAIRE
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
Campus universitaire
91405 ORSAY
