

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARC LABORDE

Equirépartition des solutions du problème de Waring

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1976-1977),
exp. n° 20, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A3_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUIRÉPARTITION DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE WARING

par Marc LABORDE

1. Introduction.

1.1. - On se propose d'étudier ici une extension intéressante du problème de Waring : il s'agit de montrer que l'on peut représenter tout entier assez grand comme somme de s puissances k -ièmes "presques proportionnelles" à des nombres fixés à l'avance.

Pour démontrer ce résultat, on utilisera, après une approche géométrique du problème, une variante de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood-Vinogradov.

Ce problème a déjà été étudié par E. M. WRIGHT ([4], [5]) par deux méthodes différentes de celle proposée ici, et les résultats obtenus étaient différents de ceux que nous obtiendrons.

1.2. - Nous allons maintenant préciser les données du problème et nous ramener à des conditions équivalentes plus maniables.

Soit donc k un entier supérieur ou égal à 3, et s un entier tel que tout entier n assez grand puisse s'écrire comme somme de s puissances k -ièmes ; il existe $n_1, \dots, n_s$ entiers tels que $n = |n_1|^k + \dots + |n_s|^k$. En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^s$, muni de la norme L^k : si $x = (x_1, \dots, x_s)$,

$$N(x) = (|x_1|^k + \dots + |x_s|^k)^{1/k},$$

ceci veut dire que le point de coordonnées $\frac{n_1}{n^{1/k}}, \dots, \frac{n_s}{n^{1/k}}$ appartient à la sphère S de rayon 1. Soit alors Ω un domaine quarrable (dont la fonction caractéristique est Riemann-intégrable) de la sphère S . Le problème que l'on se pose est de déterminer le nombre asymptotique, quand n tend vers l'infini, de s -uplets $(n_1, \dots, n_s)$ tels que $(\frac{n_1}{n^{1/k}}, \dots, \frac{n_s}{n^{1/k}}) \in \Omega$.

Si $m_1, \dots, m_s$ sont des réels positifs de somme égale à 1, et si $\varepsilon > 0$, le domaine particulier

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_s) \in S ; |x_i^k - m_i| < \varepsilon\}$$

correspond, par définition, au cas des solutions presque-proportionnelles aux nombres $m_1, \dots, m_s$.

On se propose de montrer que le nombre de représentations de n "appartenant" à Ω est asymptotiquement proportionnel à la mesure de Ω . Plus précisément, soit $R(n)$ le nombre total de représentations de n sous la forme $n = |n_1|^k + \dots + |n_s|^k$, $n_i \in \mathbb{Z}$ et ν la mesure uniforme normalisée (invariante par rotation et de masse

totale égale à 1) sur S ; on veut montrer que, quel que soit le domaine quarrable Ω , on a, pour s assez grand,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R(n)} \text{card}\{(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^s ; (\frac{n_1}{n^{1/k}}, \dots, \frac{n_s}{n^{1/k}}) \in \Omega\} = \nu(\Omega),$$

ce qui signifie que les différentes représentations de n se répartissent régulièrement sur la surface de la sphère S quand n tend vers l'infini.

Par une démonstration analogue à celle du critère de Weyl d'équirépartition modulo 1, on montre que ceci est équivalent au fait que, pour toute fonction continue $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{n_i \in \mathbb{Z}, n = \sum |n_i|^k} f(\frac{n_1}{n^{1/k}}, \dots, \frac{n_s}{n^{1/k}}) = \int_S f(x) d\nu(x)$$

ou, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, au fait que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^s$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{n_i \in \mathbb{Z}, n = \sum |n_i|^k} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)/k}} = \int_S x_1^{\lambda_1} \times \dots \times x_s^{\lambda_s} d\nu(x).$$

En considérant uniquement les représentations positives, on est ramené à montrer que, pour s assez grand, on a, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^s$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{n_i \in \mathbb{N}, n = \sum n_i^k} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)/k}} = \int_Q x_1^{\lambda_1} \times \dots \times x_s^{\lambda_s} d\mu(x),$$

où

$r(n)$ est le nombre de s -uplets $(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ tels que $n = n_1^k + \dots + n_s^k$,

Q est l'ensemble des points de S à coordonnées positives ou nulles,

μ est la mesure uniforme normalisée sur Q .

En appelant $s_0(k)$ le plus petit entier s pour lequel ceci est vérifié, on montrera que

$s_0(k)$ existe,

pour tout $k \geq 3$, $s_0(k) \leq 2^k + 1$,

$s_0(k) \ll k^2 \log k$, lorsque k tend vers l'infini.

1.3. - Pour cela, on applique la méthode du cercle, et on écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{n_i \in \mathbb{N}, n = \sum n_i^k} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)/k}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{[n^{1/k}]} \dots \sum_{n_s=0}^{[n^{1/k}]} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)/k}} \int_0^1 \exp(2i\pi(n_1^k + \dots + n_s^k - n)x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi mx) dx ,$$

avec $g_i(x) = \left[\sum_{m=0}^{n^{1/k}} \left(\frac{m}{n^{1/k}} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi m^k x) \right]$.

On découpe alors l'intervalle $[0, 1]$ en arcs majeurs et arcs mineurs. Pour cela, on pose

$$P = n^{1/k} \quad \text{et} \quad \tau = 2kP^{k-1} .$$

Si $q \leq P^{1-(1/k)}$, et si $0 \leq a \leq q$, $(a, q) = 1$, on définit l'arc majeur

$$\mathcal{M}(a, q) = \{x \in [0, 1] ; x = \frac{a}{q} + y, |y| \leq \frac{1}{q\tau}\} .$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ des arcs mineurs est défini par

$$\mathcal{M} = \{x \in [0, 1] ; x = \frac{a}{q} + y, P^{1-(1/k)} < q \leq \tau ,$$

$$0 < a \leq q, (a, q) = 1, |y| \leq \frac{1}{q\tau}\} .$$

On sait alors que deux arcs majeurs ne se recoupent pas, et que tout point de l'intervalle $[0, 1]$ se trouve soit sur un arc majeur, soit sur un arc mineur [1].

2. Contribution des arcs majeurs.

On suppose donc que x est un point de $[0, 1]$ tel que

$$x = \frac{a}{q} + y, \quad q \leq P^{1-(1/k)}, \quad 0 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1, \quad |y| \leq \frac{1}{q\tau} .$$

On commence par utiliser un lemme de VAN DER CORPUT ([6], p. 226).

LEMME. - Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[a, b]$ et que $f'(x)$ soit monotone.

Soit $s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.

Alors il existe une constante absolue A telle que

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} s(n) \exp(2i\pi f(n)) - \int_a^b s(x) \exp(2i\pi f(x)) dx \right| \leq A \max(s(a), s(b)) .$$

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Si on pose

$$J_i(y) = \int_0^P \left(\frac{u}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y) du \quad \text{et} \quad S(a, q) = \sum_{r=0}^{q-1} \exp(2i\pi r^k (a/q)) ,$$

on a

$$g_i(x) = \frac{1}{q} S(a, q) J_i(y) + O(q) .$$

Démonstration. - On a

$$g_i(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{P}{P} \rfloor} \left(\frac{m}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi m^k x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{P}{P} \rfloor} \left(\frac{m}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi m^k (\frac{a}{q} + y)) .$$

D'où, en écrivant $m = jq + r$, $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$,

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \sum_{r=0}^{q-1} \left[\frac{(P-r)/q}{\sum_{j=0}^{q-1}} \right] \left(\frac{jq+r}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(jq+r)^k \left(\frac{a}{q} + y \right)) \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} \exp(2i\pi r^k \left(\frac{a}{q} \right)) \left[\frac{(P-r)/q}{\sum_{j=0}^{q-1}} \right] \left(\frac{jq+r}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(jq+r)^k y). \end{aligned}$$

On applique alors le lemme de Van der Corput à la dernière somme, avec

$$f(x) = (qx+r)^k y \quad \text{et} \quad s(x) = \left(\frac{qx+r}{P} \right)^{\lambda_i}.$$

En effet, on a alors

$$|f'(x)| = k q (qx+r)^{k-1} |y| \leq k q P^{k-1} |y| \leq \frac{1}{2}$$

et

$$\max(s(a), s(b)) = \max(s(0), s([(P-r)/q])) = (q[(P-r)/q] + r)^{\lambda_i} P^{-\lambda_i} \leq 1.$$

d'où

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(P-r)/q}{\sum_{j=0}^{q-1}} \right] \left(\frac{jq+r}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(jq+r)^k y) \\ &= \int_0^{(P-r)/q} \left(\frac{qx+r}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(qx+r)^k y) dx + O(1) \\ &= \frac{1}{q} \int_0^P \left(\frac{u}{P} \right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y) du + O(1). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$g_i(x) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \exp(2i\pi r^k \left(\frac{a}{q} \right)) J_i(y) + O(q) = \frac{1}{q} S(a, q) J_i(y) + O(q).$$

Il faut maintenant trouver une approximation du produit $g_1(x) \times \dots \times g_s(x)$.
D'où le lemme suivant.

LEMME. - Si a_i et b_i ($i = 1, 2, \dots, s$) sont des nombres complexes, on a

$$\prod_{i=1}^s a_i - \prod_{i=1}^s b_i \ll (\max |a_i - b_i|) \cdot (\max^{s-1}(|a_i|, |b_i|)).$$

Démonstration. - En posant $c_i = a_i - b_i$, il vient $\prod a_i = \prod (b_i + c_i)$ et, en développant le dernier produit en une somme de 2^s produits, on obtient tout d'abord le produit $\prod b_i$, puis des produits contenant chacun au moins un des c_i et qui sont donc majorés par $(\max |c_i|) \cdot (\max(|b_i|, |b_i + c_i|))^{s-1}$.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, il nous faut maintenant des estimations de $J_i(y)$ et de $S(a, q)$.

Or le fait que l'on ait, pour tout $k \geq 3$, $S(a, q) \ll q^{1-(1/k)}$ est un résultat classique.

Pour $J_i(y)$, on a l'estimation suivante.

PROPOSITION 2. - $J_i(y) \ll \min(P, |y|^{-1/k})$.

Démonstration. - On a évidemment $J_i(y) \leq P$.

En supposant $y > 0$, ce qui est possible puisque $J_i(-y) = \overline{J_i(y)}$, et en posant $v = uy^{1/k}$, on obtient d'autre part

$$J_i(y) = \int_0^P \left(\frac{u}{p}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y) du = (Py^{1/k})^{-\lambda_i} y^{-1/k} \int_0^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k) dv.$$

On peut, de plus, supposer que $Py^{1/k} \geq 1$, car sinon $\min(P, y^{-1/k}) = P$, et l'estimation est triviale. La dernière intégrale s'écrit alors

$$\begin{aligned} \int_0^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k) dv &= \int_1^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k) dv + O(1) \\ &= \int_1^{Py^{1/k}} \frac{v^{\lambda_i - k + 1}}{2ki\pi} (2ki\pi v^{k-1} \exp(2i\pi v^k)) dv + O(1) \\ &= \left[\frac{v^{\lambda_i - k + 1}}{2ki\pi} \exp(2i\pi v^k) \right]_1^{Py^{1/k}} - \frac{\lambda_i - k + 1}{2ki\pi} \int_1^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i - k} \exp(2i\pi v^k) dv + O(1) \\ &\ll (Py^{1/k})^{\lambda_i - k + 1} + 1 + (\lambda_i - k + 1) \int_1^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i - k} dv \ll (Py^{1/k})^{\lambda_i - k + 1} + 1, \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} J_i(y) &\ll (Py^{1/k})^{-\lambda_i} y^{-1/k} ((Py^{1/k})^{\lambda_i - k + 1} + 1) \\ &\ll y^{-1/k} ((Py^{1/k})^{-k+1} + (Py^{1/k})^{-\lambda_i}) \\ &\ll y^{-1/k}. \end{aligned}$$

Soient maintenant, si $s \geq 2k + 1$,

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} J_1(y) \times \dots \times J_s(y) \exp(-2i\pi ny) dy,$$

$$A(q) = q^{-s} \sum_{a=1, (a,q)=1}^q \exp(-2i\pi m(\frac{a}{q})) S^s(a, q)$$

et

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q).$$

On a alors, en suivant la méthode classique du cercle [1]

$$g_1(x) \times \dots \times g_s(x) = q^{-s} S^s(a, q) J_1(y) \times \dots \times J_s(y) + O(q^{-1} \min^{s-1}(P, |y|^{-1/k})),$$

puis

$$\begin{aligned} \int_{M(a,q)} g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi nx) dx \\ = \exp(-2i\pi m(\frac{a}{q})) q^{-s} S^s(a, q) L + O(q^{-1} P^{s-k-1}), \end{aligned}$$

et, en admettant provisoirement que $L \ll P^{s-k}$, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Si $s \geq 2k + 1$, on a

$$\int_{\text{arcs majeurs}} g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi mx) dx = L\mathcal{E} + O(P^{s-k-1/2k}) .$$

Étudions maintenant le comportement de $g_1(x)$ sur les arcs mineurs.

3. Contribution des arcs mineurs.

LEMME FONDAMENTAL. - Soient A et $B \in \mathbb{Z}$, et P un polynôme de degré μ ; si $ax \notin \mathbb{Z}$ et si, pour tout $X \in [A, B + \mu]$ et pour tout $v \leq \mu$, on a $|P^{(v)}(X)| \leq Q_v$, alors

$$\left| \sum_{A \leq n \leq B} P(n) \exp(2i\pi(an + b)x) \right| \leq \frac{Q_0}{\|ax\|} + \frac{Q_1}{\|ax\|^2} + \dots + \frac{Q_\mu}{\|ax\|^{\mu+1}}$$

(on a posé $\|u\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |n - u|$).

Démonstration. - On a, en posant $Y = \exp(2i\pi ax)$ (d'où $Y \neq 1$),

$$\sum_{A \leq n \leq B} P(n) \exp(2i\pi(an + b)x) = \exp(2i\pi bx) \sum_{A \leq n \leq B} P(n) Y^n .$$

Il suffit donc de montrer le lemme pour $b = 0$.

On considère tout d'abord le cas des polynômes de la forme $P(n) = (n+1)(n+2)\dots(n+p)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{A \leq n \leq B} P(n) Y^n &= \frac{\partial^p}{\partial Y^p} \sum_{A \leq n \leq B} Y^{n+p} \\ &= \frac{\partial^p}{\partial Y^p} \frac{Y^{B+p+1} - Y^{A+p}}{Y - 1} \\ &= \sum_{v=0}^p (-1)^v \frac{\varphi_v(B+1) Y^{B+v+1} - \varphi_v(A) Y^{A+v}}{(Y - 1)^{v+1}} , \end{aligned}$$

avec $\varphi_v(X) = \frac{p!}{(p-v)!} (X+p)(X+p-1)\dots(X+v+1)$.

On a alors

$$\varphi_v(x) = \varphi_{v-1}(x+1) - \varphi_{v-1}(x) = \sum_{\ell=0}^v (-1)^\ell \binom{v}{\ell} P(x+p-\ell) ,$$

puisque $\varphi_0(X) = P(X)$.

Retournons maintenant au cas d'un polynôme quelconque.

En prenant la dernière expression comme définition de $\varphi_v(X)$, la formule donnant $\sum P(n) Y^n$ reste valable, par linéarité, pour un polynôme quelconque.

Or on montre, par application répétée du théorème de Rolle, qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\sum_{\ell=0}^v (-1)^\ell \binom{v}{\ell} P(x+p-\ell) = P^{(v)}(x + \theta v) .$$

Le lemme en résulte immédiatement, puisque

$$|Y - 1| = |\exp(2i\pi ax) - 1| = 2 |\sin \pi ax| \geq 2 \|ax\|.$$

En suivant alors la méthode de Weyl [2], on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - En posant $\mu = 2^{k-1} \lambda_i$ et $P' = [P]$, on a

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k+\varepsilon} \sum_{r=1}^{k!P^{k-1}} \min(P, \frac{1}{\|rx\|} + \dots + \frac{P^{-\mu}}{\|rx\|^{\mu+1}}).$$

Démonstration. - L'application de la méthode de Weyl nous donne

$$\begin{aligned} |g_i(x)|^2 &= g_i(x) \overline{g_i(x)} = \sum_{m_1=0}^{P'} \sum_{m_2=0}^{P'} \left(\frac{m_1}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m_2}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(m_1^k - m_2^k)x) \\ &\leq P + 2 \sum_{0 \leq m_2 < m_1 \leq P'} \left(\frac{m_1}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m_2}{P}\right)^{\lambda_i} \operatorname{Re}(\exp(2i\pi(m_1^k - m_2^k)x)) \\ &\leq P + 2 \sum_{r=0}^{P'} \left| \sum_{m_2=0}^{P'-r} \left(\frac{m_2}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m_2+r}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi r(m_2^{k-1} + \dots)x) \right|, \end{aligned}$$

en posant $m_1 = m_2 + r$, les pointillés désignant une somme de termes dont le degré en m_2 est $\leq k-2$. Plus généralement, on obtient

$$\begin{aligned} |g_i(x)|^{2^{k-1}} &\ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k} \sum_{1 \leq r_1, \dots, r_{k-1} \leq P'} \left| \sum_{m=0}^{P'-r_1-\dots-r_{k-1}} \left(\frac{m}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m+r_1}{P}\right)^{\lambda_i} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left(\frac{m+r_{k-1}}{P}\right)^{\lambda_i} \dots \left(\frac{m+r_1+\dots+r_{k-1}}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi r_1 \times \dots \times r_{k-1} (k! m + \rho)x) \right| \end{aligned}$$

où ρ désigne un nombre indépendant de m .

Comme m et chacun des facteurs $(m + r_j)$, $\dots$, $(m + r_1 + \dots + r_{k-1})$ restent compris entre 0 et P , la valeur au point m de la dérivée d'ordre ν du polynôme de degré $\mu = 2^{k-1} \lambda_i$ en m , $\prod_{\varepsilon_j=0 \text{ ou } 1} ((m + \varepsilon_1 r_1 + \dots + \varepsilon_{k-1} r_{k-1})/P)^{\lambda_i}$ est un $O(P^{-\nu})$.

En appliquant alors le lemme précédent, on en déduit que

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k} \sum_{1 \leq r_j \leq P'} \min(P, \frac{1}{\|rx\|} + \dots + \frac{P^{-\mu}}{\|rx\|^{\mu+1}}),$$

avec $r = k! r_1 \times \dots \times r_{k-1}$.

On regroupe alors les termes qui donnent à r la même valeur : ceux-ci sont en nombre au plus égal à $d(r)$, nombre des diviseurs de r . Comme on a, pour tout $\varepsilon > 0$, $d(r) \ll r^\varepsilon \ll P^{k\varepsilon}$, on en déduit la proposition.

On divise alors la somme $U = \sum_{r=1}^{k!P^{k-1}}$ en sommes de la forme $U_m = \sum_{r=mq+1}^{(m+1)q}$,

l'idée étant que, si $x = a/q + y$ avec $|y| \leq 1/q^2$, alors $\|rx\|$ est à peu près déterminé par le résidu de r modulo q . On obtient ainsi $[(1/q)k! p^{k-1}]$ sommes de la forme U_m , plus éventuellement une somme ayant moins de q termes.

En posant $t = r - mq - 1$ et $\beta = x(mq + 1)$, il vient

$$U_m = \sum_{t=0}^{q-1} \min(P, \frac{1}{\|xt + \beta\|} + \dots + \frac{P^{-\mu}}{\|xt + \beta\|^{\mu+1}}).$$

La proposition suivante va nous donner une majoration de U_m .

PROPOSITION 5. - Soit α un réel tel que $0 \leq \alpha < 1$. Alors on a

$$U_m \ll Pq^\alpha + q \log q + \frac{q^{(1-\alpha)+1}}{P} + \dots + \frac{q^{\mu(1-\alpha)+1}}{P^\mu}$$

Démonstration. - Soit M l'entier (ou l'un des entiers) le plus proche de βq

$$\beta = \frac{M}{q} + \frac{z}{q}, \quad |z| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme on a, d'autre part,

$$|xt - \frac{a}{q}t| = t|x - \frac{a}{q}| \leq \frac{t}{q^2} < \frac{1}{q},$$

il vient

$$xt + \beta = \frac{at + M}{q} + \frac{\theta(t)}{q} \quad \text{avec} \quad |\theta(t)| < \frac{3}{2}.$$

En désignant par $\rho(t)$ le résidu de $at + M$ modulo q , $\rho(t) \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, on obtient donc

$$\|xt + \beta\| = \left\| \frac{\rho(t) + \theta(t)}{q} \right\|.$$

De plus, quand t varie de 0 à $q-1$, $\rho(t)$ varie aussi de 0 à $q-1$, puisque $(a, q) = 1$.

Considérons tout d'abord les termes de la somme U_m pour lesquels on a

$$3q^\alpha \leq \rho(t) \leq q - 3q^\alpha.$$

Pour ces termes, on a

$$\frac{3}{2} \leq 3q^\alpha - \frac{3}{2} \leq \rho(t) - \frac{3}{2} < \rho(t) + \theta(t) < \rho(t) + \frac{3}{2} \leq q - 3q^\alpha + \frac{3}{2} \leq q - \frac{3}{2}$$

et donc

$$\frac{\rho(t) + \theta(t)}{q} \in]0, 1[.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|xt + \beta\| &= \left\| \frac{\rho(t) + \theta(t)}{q} \right\| = \min\left(\frac{\rho(t) + \theta(t)}{q}, 1 - \frac{\rho(t) + \theta(t)}{q}\right) \\ &\geq \min\left(\frac{\rho(t) - (3/2)}{q}, 1 - \frac{\rho(t) + (3/2)}{q}\right) \end{aligned}$$

$$= \min\left(\frac{2\rho(t) - 3}{2q}, \frac{2q - 2\rho(t) - 3}{q}\right) \\ \geq \min\left(\frac{\rho(t)}{2q}, \frac{q - \rho(t)}{2q}\right).$$

On en déduit que, pour tout $v \leq \mu + 1$, $v \geq 1$, on a

$$\sum_{3q^\alpha \leq \rho(t) \leq q - 3q^\alpha} \frac{1}{\|xt + \beta\|^v} \leq (2q)^v \sum_{3q^\alpha \leq \rho \leq q - 3q^\alpha} \max\left(\frac{1}{\rho^v}, \frac{1}{(q - \rho)^v}\right) \\ \leq (2q)^v \sum_{3q^\alpha \leq \rho \leq q - 3q^\alpha} \left(\frac{1}{\rho^v} + \frac{1}{(q - \rho)^v}\right) = (2q)^v 2 \sum_{3q^\alpha \leq \rho \leq q - 3q^\alpha} \frac{1}{\rho^v} \\ \leq \begin{cases} 4q \log q & \text{si } v = 1, \\ 2(2q)^v \frac{1}{v - 1} (3q^\alpha - 1)^{1-v} & \text{si } v \geq 2, \end{cases}$$

soit, pour $v \geq 2$,

$$\sum_{3q^\alpha \leq \rho(t) \leq q - 3q^\alpha} \frac{1}{\|xt + \beta\|^v} \ll q^{(v-1)(1-\alpha)+1}.$$

On en déduit immédiatement le résultat de la proposition, puisque chacun des termes négligés est $\leq P$, et que leur nombre est inférieur à $6q^\alpha$.

On peut maintenant en déduire une majoration de $|g_i(x)|$ sur les arcs mineurs.

PROPOSITION 6. - Si x est un point d'un arc mineur, c'est-à-dire si

$$x = \frac{a}{q} + y, \quad |y| \leq \frac{1}{q^\tau}, \quad P^{1-1/k} \leq q \leq \tau = 2kP^{k-1},$$

on a

$$|g_i(x)| \ll P^{1-\sigma+\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sigma} = k2^{k-1},$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. - Comme on a $\log q \ll P^\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, et

$$U \ll \frac{P^{k-1}}{q} U_m,$$

il vient

$$U \ll P^k q^{-(1-\alpha)} + P^{k-1} \left(P^\varepsilon + \frac{q^{1-\alpha}}{P} + \dots + \left(\frac{q^{1-\alpha}}{P}\right)^\mu \right).$$

En tenant compte de ce que $q^{-1} \ll P^{-(k-1)/k}$ et de ce que $q \ll P^{k-1}$, on obtient

$$U \ll P^k P^{-(k-1)(1-\alpha)/k} + P^{k-1} \left(P^\varepsilon + P^{(k-1)(1-\alpha)-1} + \dots + P^{(k-1)(1-\alpha)-1} \mu \right).$$

En choisissant alors α tel que $(k-1)(1-\alpha) = 1$, il vient

$$U \ll P^{k-(1/k)} + P^{k-1} (P^\varepsilon + 1) \ll P^{k-(1/k)}.$$

En utilisant la proposition 4, on en déduit que

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k+\varepsilon} P^{(k-1)/k} \ll P^{2^{k-1}-(1/k)+\varepsilon}.$$

La proposition en résulte immédiatement.

PROPOSITION 7. - Si $s \geq k^2 2^{k-1} + 1$, on a

$$\int_0^1 g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi mx) dx = I\mathfrak{S} + o(n^{(s/k)-1}).$$

Démonstration. - Si x est un point d'un arc mineur et si

$$s \geq k^2 2^{k-1} + 1 = \frac{k}{\sigma} + 1,$$

on a, d'après la proposition précédente,

$$|g_1(x) \times \dots \times g_s(x)| \ll P^{s-\sigma+\varepsilon} \ll P^{s-k-\sigma+\varepsilon} = o(P^{s-k}) = o(n^{(s/k)-1}).$$

Le résultat découle alors du fait que l'intégrale sur les arcs mineurs est, elle aussi, un $o(n^{(s/k)-1})$ et du calcul de l'intégrale sur les arcs majeurs (proposition 3).

Pour achever la démonstration de l'existence de $s_0(k)$, il reste donc

- à calculer $L = L(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, et à vérifier que $L \ll n^{(s/k)-1}$,

- à montrer que ceci est bien la formule qu'on attendait.

4. Calcul explicite de L , et existence de $s_0(k)$.

LEMME. - On a

$$\int_{0 \leq \sum t_i \leq 1, t_i \geq 0} \int t_1^{\alpha_1-1} \times \dots \times t_s^{\alpha_s-1} dt_1 \times \dots \times dt_s = \frac{\Gamma(\alpha_1) \times \dots \times \Gamma(\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_s + 1)}.$$

Démonstration. - C'est un résultat classique.

On a alors $J_i(y) = \int_0^P \left(\frac{u}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y) du$,

soit, en posant $u = Pv$ et $z = P^k y$,

$$J_i(y) = P \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z) dv.$$

D'où, puisque $n = P^k$,

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_1(y) \times \dots \times J_s(y) \exp(-2i\pi ny) dy \\ &= P^{s-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi z) \left(\prod_{i=1}^s \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z) dv \right) dz. \end{aligned}$$

On considère alors la fonction

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^s \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z) dv \right) \exp(-2i\pi zt) dz,$$

et, plus précisément,

$$\Phi(c) = \int_0^c \varphi(t) dt, \quad c \geq 0.$$

Comme, d'après la proposition 2, l'intégrale donnant $\varphi(t)$ est absolument convergente, on peut changer l'ordre d'intégration entre z et t ; on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(c) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^s \int_0^1 v_i^{\lambda_i} \exp(2i\pi v_i^k z) dv_i \right) \frac{1 - \exp(-2i\pi z c)}{2i\pi z} dz \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \left(\prod_{i=1}^s \int_0^1 v_i^{\lambda_i} \exp(2i\pi v_i^k z) dv_i \right) \frac{1 - \exp(-2i\pi z c)}{2i\pi z} dz \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times \cdots \times v_s^{\lambda_s} \left(\int_{-A}^A \frac{\exp(2i\pi X z) - \exp(2i\pi(X-c)z)}{2i\pi z} dz \right) dv_1 \times \cdots \times dv_s, \end{aligned}$$

où l'on a posé $X = v_1^k + \cdots + v_s^k$.

On a donc

$$\begin{aligned} \Phi(c) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cdots \int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times \cdots \times v_s^{\lambda_s} \left(\int_0^A \left(\frac{\sin 2\pi X z}{z} - \frac{\sin 2\pi(X-c)z}{z} \right) dz \right) dv_1 \times \cdots \times dv_s \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cdots \int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times \cdots \times v_s^{\lambda_s} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\sin 2\pi X z}{z} - \frac{\sin 2\pi(X-c)z}{z} \right) dz \right) dv_1 \times \cdots \times dv_s, \end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque la fonction à intégrer est dominée, sur $[0, 1]^s$, par $2K$, où K est une constante telle que, pour tout a , on ait

$$\left| \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq K.$$

Comme on a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ -1 & \text{si } \alpha < 0, \end{cases}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \Phi(c) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\operatorname{sgn} X - \operatorname{sgn}(X - c)) v_1^{\lambda_1} \times \cdots \times v_s^{\lambda_s} dv_1 \times \cdots \times dv_s \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times \cdots \times v_s^{\lambda_s} dv_1 \times \cdots \times dv_s \\ &\quad 0 \leq X \leq c \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $v_i = u_i^{1/k} c^{1/k}$, il vient

$$\Phi(c) = k^{-s} c^{((\lambda_1 + \cdots + \lambda_s)/k) + 1} \int_0^{1/c} \cdots \int_0^{1/c} u_1^{((\lambda_1 + 1)/k) - 1} \cdots u_s^{((\lambda_s + 1)/k) - 1} du_1 \cdots du_s, \quad \sum u_i \leq 1$$

Or les conditions $\sum u_i \leq 1$ et $u_i \geq 0$ impliquent $u_i \leq 1$, pour tout i . Si on suppose de plus que $c \leq 1$, l'intégrale est alors égale à l'intégrale sur $[0, 1]^s$, et on peut appliquer le lemme; d'où

$$\Phi(c) = k^{-s} c^{((\lambda_1 + \dots + \lambda_s + s)/k) + 1} \frac{\Gamma((\lambda_1 + 1)/k) \times \dots \times \Gamma((\lambda_s + 1)/k)}{\Gamma((\lambda_1 + \dots + \lambda_s + s)/k + 1)}, \text{ si } c \leq 1.$$

En dérivant, il vient

$$\varphi(t) = k^{-s} t^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s + s)/k} \frac{\Gamma((\lambda_1 + 1)/k) \times \dots \times \Gamma((\lambda_s + 1)/k)}{\Gamma((\lambda_1 + \dots + \lambda_s + s)/k)}, \text{ si } 0 < t < 1.$$

Comme $L = P^{s-k} \varphi(1)$ et que φ est continue au point 1, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 8. - En posant

$$\gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \frac{\Gamma((\lambda_1 + 1)/k) \times \dots \times \Gamma((\lambda_s + 1)/k)}{\Gamma((\lambda_1 + \dots + \lambda_s + s)/k)},$$

on a $L = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s) n^{(s/k)-1}$.

En rassemblant les résultats obtenus, on a donc montré que

$$\sum_{n=\sum_{i=1}^s n_i, n_i \geq 0} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)/k}} = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mathfrak{S}(n) n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1}).$$

En faisant $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$, il vient

$$r(n) = \gamma(0, \dots, 0) \mathfrak{S}(n) n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1}).$$

Or on sait qu'il existe une constante c_k ne dépendant que de k , telle que, si $s \geq 4k$ (ou, pour $k = 3$, si $s \geq 8$), on ait

$$\mathfrak{S}(n) \geq c_k > 0.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{n=\sum_{i=1}^s n_i, n_i \geq 0} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)/k}} = \frac{\gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s)}{\gamma(0, \dots, 0)}.$$

Il reste donc à montrer que ceci est bien égal à ce que l'on attendait, c'est-à-dire à

$$\int_Q x_1^{\lambda_1} \dots x_s^{\lambda_s} d\mu(x).$$

Or on a, pour $p > 0$,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt = k \int_0^\infty e^{-u^k} u^{kp-1} du.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_s) &= k^s \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp(-(u_1^k + \dots + u_s^k)) u_1^{kp_1-1} \dots u_s^{kp_s-1} du_1 \dots du_s \\ &= k^s \int_0^\infty e^{-r^k} \left(\int_{Q(r)} u_1^{kp_1-1} \dots u_s^{kp_s-1} dS_r \right) dr, \end{aligned}$$

où $Q(r) = \{x = (x_1, \dots, x_s), x_i \geq 0, x_1^k + \dots + x_s^k = r^k\}$ et où dS_r est la mesure induite sur $Q(r)$ par la mesure $du_1 \dots du_s$ sur $\mathbb{R}^s$.

En faisant le changement de variable $u_i = r\xi_i$ dans l'intégrale interne, pour se ramener à $Q(1) = Q$, il vient

$$\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_s) = k^s \left(\int_0^\infty r^{k(p_1+\dots+p_s)-s} e^{-r^k} r^{s-1} dr \right) \left(\int_Q \xi_1^{kp_1-1} \dots \xi_s^{kp_s-1} dS \right).$$

D'où

$$\int_Q \xi_1^{kp_1-1} \dots \xi_s^{kp_s-1} dS = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_s)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_s)} k^s.$$

On en déduit donc que

$$\int_Q x_1^{\lambda_1} \dots x_s^{\lambda_s} d\mu(x) = \frac{\int_Q x_1^{\lambda_1} \dots x_s^{\lambda_s} dS}{\int_Q dS} = \frac{\gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s)}{\gamma(0, \dots, 0)}.$$

On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Pour tout $k \geq 3$, $s_0(k)$ existe et $s_0(k) \leq k^2 2^{k-1} + 1$.

5. Majorations de $s_0(k)$.

La première majoration concernera essentiellement les petites valeurs de k .

Rappelons tout d'abord un théorème de HUA [2].

LEMME. - Si $g(x) = \sum_{h=0}^{[P]} \exp(2i\pi h^k x)$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |g(x)|^{2^k} dx \ll P^{2^k - k + \varepsilon}.$$

COROLLAIRE. - Soit $N(P, k, s)$ le nombre de solutions de l'équation

$$h_1^k + \dots + h_s^k = h_1'^k + \dots + h_s'^k, \quad 0 \leq h_i \leq P, \quad 0 \leq h_i' \leq P;$$

Soit, de plus, $t = 2^{k-1}$; alors on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$N(P, k, t) \ll P^{2^k - k + \varepsilon}.$$

Démonstration. - On a en effet

$$N(P, k, s) = \sum_{0 \leq h_i, h_i' \leq P} \int_0^1 \exp(2i\pi(h_1^k + \dots + h_s^k - h_1'^k - \dots - h_s'^k)x) dx,$$

puisque l'intégrale vaut 1 quand le coefficient de x vaut 0, et vaut 0 sinon. On en déduit que

$$N(P, k, t) = \int_0^1 (g(x))^t (\overline{g(x)})^t dx = \int_0^1 |g(x)|^{2t} dx \ll P^{2^k - k + \varepsilon},$$

d'après le lemme de Hua.

On a encore besoin de la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 |g_1(x) \dots g_{2s}(x)| dx \leq N(P, k, s).$$

Démonstration. - On a tout d'abord, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^1 |g_1(x) \dots g_{2s}(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 |g_1(x) \dots g_s(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_0^1 |g_{s+1}(x) \dots g_{2s}(x)| dx \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_1(x) \dots g_s(x)|^2 dx &= \int_0^1 g_1(x) \dots g_s(x) \overline{g_1(x)} \dots \overline{g_s(x)} dx \\ &= \sum_{0 \leq h_1, h'_1 \leq P} \left(\frac{h_1 h'_1}{P^2} \right)^{\lambda_1} \dots \left(\frac{h_s h'_s}{P^2} \right)^{\lambda_s} \int_0^1 \exp(2i\pi(h_1^k + \dots + h_s^k - h_1'^k - \dots - h_s'^k)x) dx \\ &= \sum_{\substack{0 \leq h_1, h'_1 \leq P \\ h_1^k + \dots + h_s^k = h_1'^k + \dots + h_s'^k}} \left(\frac{h_1 h'_1}{P^2} \right)^{\lambda_1} \dots \left(\frac{h_s h'_s}{P^2} \right)^{\lambda_s} \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq h_1, h'_1 \leq P \\ h_1^k + \dots + h_s^k = h_1'^k + \dots + h_s'^k}} 1 = N(P, k, s). \end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer la première majoration de $s_0(k)$.

THÉOREME 2. - Pour tout $k \geq 3$, on a $s_0(k) \leq 2^k + 1$.

Démonstration. - D'après la proposition précédente et le corollaire du lemme de Hua, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |g_1(x) \dots g_{2^k}(x)| dx \ll P^{2^k - k + \varepsilon}.$$

Or, d'après la proposition 6, on sait que, sur un arc mineur, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|g_1(x)| \ll P^{1 - \sigma + \varepsilon}.$$

On en déduit que, si $s \geq 2^k + 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{M}} g_1(x) \dots g_s(x) \exp(-2i\pi mx) dx &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{M}} |g_{2^k+1}(x) \dots g_s(x)| \right) \int_0^1 |g_1(x) \dots g_{2^k}(x)| dx \\ &\ll P^{(s-2^k)(1-\sigma+\varepsilon)} P^{2^k - k + \varepsilon} = o(P^{s-k}). \end{aligned}$$

Comme l'estimation sur les arcs majeurs et la minoration de $\mathfrak{S}(n)$ sont valables pour $s \geq 2^k + 1$, on en déduit que, si $s \geq 2^k + 1$,

$$\int_0^1 g_1(x) \dots g_s(x) \exp(-2i\pi mx) dx = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mathfrak{S}(n) n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1}),$$

et donc que $s_0(k) \leq 2^k + 1$.

Passons maintenant à la seconde majoration de $s_0(k)$, qui concerne le comportement asymptotique de $s_0(k)$ quand k tend vers l'infini.

THÉORÈME 3. - On a $s_0(k) \ll k^2 \log k$.

Démonstration. - Soit $s \geq 10 k^2 \log k$. On sait alors [3] que la formule asymptotique $r(n) = \gamma(0, \dots, 0) \mathfrak{S}(n) n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1})$ est valable pour s .

On a alors

$$N(P, k, s) \leq \sum_{0 \leq n \leq sP^k} (r(n))^2.$$

En effet, le nombre de solutions de

$$h_1^k + \dots + h_s^k = h_1'^k + \dots + h_s'^k, \quad 0 \leq h_i \leq P, \quad 0 \leq h_i' \leq P$$

est égal au nombre de solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} n = h_1^k + \dots + h_s^k \\ n = h_1'^k + \dots + h_s'^k \end{array} \right\}, \quad 0 \leq h_i \leq P, \quad 0 \leq h_i' \leq P, \quad 0 \leq n \leq sP^k,$$

qui est inférieur ou égal au nombre de solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} n = h_1^k + \dots + h_s^k \\ n = h_1'^k + \dots + h_s'^k \end{array} \right\}, \quad 0 \leq n \leq sP^k,$$

c'est-à-dire à $\sum_{0 \leq n \leq sP^k} (r(n))^2$.

On a donc, si $s \geq 10 k^2 \log k$,

$$N(P, k, s) \ll \sum_{n=0}^{sP^k} (n^{(s/k)-1})^2 \ll (P^k)^{2(s/k)-1} = P^{2s-k}.$$

On en déduit alors, en reprenant la démonstration du théorème 2, que

$$s_0(k) \leq 20 k^2 \log k + 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AYOUB (R.). - An introduction to the analytic theory of numbers. - Princeton, American mathematical Society, 1963 (Mathematical Surveys, 10).
- [2] DAVENPORT (H.). - Analytic methods for diophantine equations and diophantine inequalities. - Ann Arbor, Ann Arbor Publishers, 1963.
- [3] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from Russian. - London, Interscience Publishers, s. d.
- [4] WRIGHT (E. M.). - An extension of Waring's problem, Phil. Trans. Royal. Soc., t. 232, 1933, p. 1-26.

- [5] WRIGHT (E. M.). - Proportionality conditions in Waring's problem, Math. Z., t. 38, 1934, p. 730-746.
- [6] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, I. 2nd edition. - Cambridge, at the University Press, 1959.

(Texte reçu le 9 mai 1977)

Marc LABORDE
Château de Breteuil
CHOISEL
78460 CHEVREUSE
